VÄISÄLÄN PALKINNON SAAJAN ESITELMÄ 14.12.2015

Differentiaaliviive Painlevé yhtälöt

Risto Korhonen

Tavallisella differentiaaliyhtälöllä sanotaan olevan *Painlevé ominaisuus*, jos yhtälön kaikki ratkaisut ovat yksiarvoisia kaikkien liikkuvien singulariteettien ympärillä. Tämä ominaisuus on osoittautunut hyväksi kriteeriksi integroituvien differentiaaliyhtälöiden tunnistamisessa.

Painlevé, Fuchs ja Gambier käsittelivät 1900-luvun alussa yhtälöluokkaa $f''=F(z,f,f')$, missä $F(z,u,v)$ on analyyttinen muuttujan z suhteen ja rationaalinen muuttujien u ja v suhteen. He redusoivat Painlevé ominaisuutta käyttäen tämän yhtälöluokan yhteensä 50:n yhtälön luetteloksi. Tämä luettelo sisälsi kuusi oleellisesti uutta yhtälöä, jotka eivät olleet ratkaistavissa tunnettujen funktioiden avulla. Näitä kuutta yhtälöä nimitetään nykyään Painlevé yhtälöiksi. Myöhemmin on osoitettu, että kaikilla kuudella Painlevé yhtälöllä todellakin on Painlevé ominaisuus, jonka lisäksi ne on onnistuttu integroimaan käänteissirontamenetelmiä hyväksi käyttäen [1].

Painlevé yhtälöiden luonnollisia diskreettejä analogioita on esiintynyt kirjallisuudessa ainakin 1930-luvulta lähtien, vaikkakin näitä yhtälöitä ryhdyttiin kutsumaan *diskreeteiksi Painlevé yhtälöiksi* vasta paljon myöhemmin. Esimerkiksi yhtälö

$$x_{n+1}+x_n+x_{n-1}=\frac{an+b}{x_n}+c,$$

missä a, b ja c ovat kompleksivakioita, esiintyy ortogonaalisiin polynomeihin ja kvanttigravitaation partitiofunktioon liittyvissä tutkimuksissa. On osoitettu, että tämä yhtälö voidaan esittää lineaarisen yhtälöryhmän yhteensopivuusehtona, ja että ensimmäinen Painlevé yhtälö saadaan tästä yhtälöstä sopivalla rajankäynnillä. Näistä syistä edellä mainittu yhtälö tunnetaan nykyisin nimellä *diskreetti Painlevé I*. Lisää diskreettejä Painlevé yhtälöitä on löydetty muun muassa käyttäen hyväksi diskreettejä isomonodromiaongelmia, sekä integroituvien hilayhtälöiden reduktioita.

Diskreettien integroituvien systeemien yleistyttyä syntyi tarve muotoilla Painlevé ominaisuuden diskreetti analogia, jonka avulla voitaisiin luotettavasti tunnistaa integroituvat yhtälöt laajojen yhtälöluokkien sisältä vastaavalla tavalla kuin Painlevé ominaisuutta voidaan soveltaa integroituvien differentiaaliyhtälöiden etsinnässä. Ensimmäisen ehdotuksen diskreetiksi Painlevé ominaisuudeksi esittelivät Grammaticos, Ramani ja Papageorgiou. Heidän *singulariteettien eristysmenetelmänsä* perustuu ajatukselle, että diskreetin yhtälön iteroinnin johtaessa singulariteettiin, iteroinnin jatkaminen tuottaa yleisessä tapauksessa lisää singulariteetteja, mutta siinä erikoistapauksessa, jossa yhtälö on integroituva, iterointiprosessi palaa äärellisiin arvoihin säilyttäen informaatiota alkuarvoista [2]. Tämän menetelmän avulla on löydetty muun muassa diskreetit Painlevé yhtälöt III, IV ja V.

Singulariteettien eristämiseen perustuma menetelmä on osoittautunut toimivaksi algoritmiseksi työkaluksi, jonka avulla on löydetty uusia diskreettejä Painlevé yhtälöitä. Joissakin tapauksissa sen käyttöön kuitenkin liittyy myös ongelmia. Hietarinta ja Viallet ovat löytäneet numeerisesti kaoottisen diskreetin yhtälön, jonka ratkaisujen singulariteetit toteuttavat singulariteettien eristysmenetelmän ehdot. Heidän ratkaisunsa kaoottisten diskreettien yhtälöiden eliminoimiseksi perustuu ns. *algebrallisen entropian* käyttöön, joka mittaa iteraattien kompleksisuutta [3]. Muita lähestymistapoja integroituvien diskreettien yhtälöiden havaitsemiseen ovat ehdottaneet muun muassa Costin ja Kruskal, joiden menetelmä perustuu analysoituvien funktioiden teoriaan, sekä Roberts ja Vivaldi käyttäen rationaalikuvausten ratadynamiikkaa äärellisissä kunnissa.

Ablowitzin, Halburdin ja Herbstin ehdottama menetelmä diskreettien Painlevé yhtälöiden havaitsemiseksi perustuu differentiaaliyhtälöiden Painlevén ominaisuuden tavoin kompleksianalyysiin. Heidän lähestymistavassaan diskreetti yhtälö upotetaan kompleksitasoon ja analysoidaan siten syntyneen analyyttisen differenssiyhtälön meromorfisten ratkaisujen kasvua. Jos differenssiyhtälöllä on riittävä määrä äärellistä kertalukua olevia ratkaisuja, niin tämä on merkki siitä, että yhtälö on Painlevé tyyppiä [4]. Ablowitz, Halburd ja Herbst osoittivat muun muassa, että mikäli toisen kertaluvun differenssiyhtälöllä $w(z+1)+w(z-1)=R(z,w(z))$, missä $R(z,u)$ on rationaalinen molempien muuttujien suhteen, on yksikin ei rationaalinen meromorfinen äärellistä kertalukua oleva ratkaisu, niin $deg(R) \leq 2$. Tämä yhtälöluokka sisältää monia Painlevé tyyppiä olevia differenssiyhtälöitä, mutta myös paljon muita yhtälöitä. Halburd ja kirjoittaja [5] yleistivät ja täsmensivät Ablowitzin, Halburdin ja Herbstin tulosta osoittamalla, että jos yhtälöllä $w(z+1)+w(z-1)=R(z,w(z))$ on vähintään yksi äärellistä kertalukua oleva meromorfinen ratkaisu w, missä $R(z,u)$ on rationaalifunktio muuttujan u suhteen kerroinkuntanaan Nevanlinnan teorian mielessä pienet meromorfiset funktiot funktioon w verrattuna, niin joko w on samanaikaisesti Riccatin differenssiyhtälön ratkaisu, tai edellä mainittu yhtälö redusoituu yhdeksi kahdeksan yhtälön luettelossa, joka koostuu yksinomaan tunnetuista Painlevé tyyppiä olevista yhtälöistä, lineaariyhtälöistä ja linearisoituvista yhtälöistä. Myöhemmin on onnistuttu osoittamaan, että sama luettelo saadaan myös heikommalla oletuksella, jossa ratkaisun iteroidun kertaluvun vaaditaan olevan aidosti pienempi kuin yksi [6].

On tunnettua, että eräiden integroituvien differentiaalidifferenssiyhtälöiden reduktioilla on formaali yhteys (differentiaali) Painlevé yhtälöihin ns. jatkumoraja-arvon kautta. Esimerkiksi Quispel, Capel ja Sahadevan [7] onnistuivat redusoimaan tunnetun Kac-van Moerbeke yhtälön differentiaaliviiveyhtälöksi

$$w(z+1) - w(z-1) = \frac{aw'(z)}{w(z)} + b,$$

missä a ja b ovat vakioita. He myös osoittivat, että edellisellä yhtälöllä on formaali jatkumoraja-arvo ensimmäiseen Painlevé yhtälöön ja löysivät sen Laxin parin. Grammaticos, Ramani ja Moreira [8] ovat tarkastelleet Painlevé differentiaaliviiveyhtälöitä käyttäen hyväksi eräänlaista singulariteettien eristämismenetelmän muunnelmaa. Äskettäin Viallet [9] on esitellyt algebrallisen entropian käsitteen differentiaaliviiveyhtälöille.

Ensimmäisen puhtaasti kompleksianalyyttisen menetelmän differentiaaliviive Painlevé yhtälöiden havaitsemiseksi ovat vastikään esitelleet Halburd ja kirjoittaja [10]. Tässä lähestymistavassa vaaditaan, että yhtälön ratkaisulla on riittävän hitaasti kasvava meromorfinen ratkaisu, jonka arvot ovat jakautuneet tasaisesti kompleksitasoon. Tällaiset ominaisuudet ovat esimerkiksi kaikilla elliptisillä funktioilla. Ne ovat kasvun kertalukua kaksi ja niiden arvojen jakautuminen on hyvin tasaista funktioiden kaksijaksollisuuden seurauksena. Monet epälineaariset differentiaali-, differenssi- ja differentiaaliviiveyhtälöt ovat myös ratkaistavissa elliptisten funktioiden avulla. Halburd ja kirjoittaja ovat osoittaneet, että tämän menetelmän avulla edellä mainittu Quispelin, Capelin and Sahadevanin tarkastelema differentiaaliviive Painlevé yhtälö saadaan poimittua laajemmasta yhtälöluokasta vaatimalla vähintään yhden meromorfisen ratkaisun olemassaolo, jolla on kasvuunsa verrattuna riittävästi yksinkertaisia nollakohtia ja jonka iteroitu kasvun kertaluku on aidosti pienempi kuin yksi. Toinen tällä menetelmällä löydetty yhtälö on

$$w(z+1)-w(z-1)=\frac{(\alpha+\beta z)w'(z)+\big(\gamma\alpha+\beta(\gamma z-1)\big)w(z)}{w(z)^2},$$

missä α, β ja γ ovat kompleksisia vakioita. Tämä yhtälö ei kirjoittajan tietojen mukaan ole aiemmin esiintynyt kirjallisuudessa. Edellä kuvattu menetelmä vaikuttaa lupaavalta työkalulta uusien Painlevé differentiaaliviiveyhtälöiden etsinnässä.

Viitteet

[1] M. J. Ablowitz and H. Segur, Exact linearization of a Painlevé transcendent, *Phys. Rev. Lett. 38* (1977), 1103–1106.

[2] B. Grammaticos, A. Ramani, and V. Papageorgiou, Do integrable mappings have the Painlevé property?, *Phys. Rev. Lett. 67* (1991), 1825–1828.

[3] J. Hietarinta and C.-M. Viallet, Singularity confinement and chaos in discrete systems, *Phys. Rev. Lett. 81* (1998), 325–328.

[4] M. J. Ablowitz, R. G. Halburd, and B. Herbst, On the extension of the Painlevé property to difference equations, *Nonlinearity 13* (2000), 889–905.

[5] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, Finite-order meromorphic solutions and the discrete Painlevé equations, *Proc. London Math. Soc. 94* (2007), no. 2, 443–474.

[6] R. G. Halburd, R. Korhonen, and K. Tohge, Holomorphic curves with shift-invariant hyperplane preimages, *Trans. Amer. Math. Soc. 366* (2014), no. 8, 4267–4298.

[7] G. R. W. Quispel, H. W. Capel, and R. Sahadevan, Continuous symmetries of differential-difference equations: the Kac-van Moerbeke equation and Painlevé reduction, *Phys. Lett. A 170* (1992), 379–383.

[8] B. Grammaticos, A. Ramani, and I. C. Moreira, Delay-differential equations and the Painlevé transcendents, *Physica A 196* (1993), 574–590.

[9] C.-M. Viallet, Algebraic entropy for differential-delay equations, *arXiv:1408.6161* (2014).

[10] R. G. Halburd and R. J. Korhonen, Growth of meromorphic solutions of delay differential equations, *arXiv: 1602.08318* (2016).