Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ
Series A. I. Mathematica
Volumen 7, 1982, 73—79

Commentationes in memoriam
Rolf Nevanlinna

ÜBER KONFORME ABBILDUNGEN DES EINHEITSKREISES

ALBERT PFLUGER

Nach seiner Dissertation hat Rolf Nevanlinna zwei Arbeiten den schlichten konformen Abbildungen des Einheitskreises gewidmet, über die nachfolgend berichtet werden soll, wobei auch seine drei bedeutenden Arbeiten über Interpolation zu streifen sind.

1. Bei der ersten Arbeit [1] handelt es sich um eine wesentlich vereinfachte Herleitung der klassischen Verzerrungssätze in der Klasse S der Funktionen

$$f(z) = z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

die eine konforme Injektion des Einheitskreises $\mathbf{D}=\{|z|<1\}$ in die Ebene $\mathbf{C}$ bewirken. Es soll die Vorgeschichte kurz skizziert werden.

Paul Koebe hat im Jahre 1907 in [6] den Satz bewiesen, dass es zur Klasse S eine positive Zahl $\varkappa$ gibt, so dass jede Funktion f aus S die Kreisscheibe $\{|w|<\varkappa\}$ überdeckt, und dazu die folgende Bemerkung gemacht: „In dieser Form erinnert der Satz sofort an gewisse von den Herren Landau, Hurwitz und Carathéodory behandelte Fragen. Der Satz ist jedoch wesentlich neu. Insbesondere gibt die Forderung der Schlichtheit der Abbildung dem Satz ein charakteristisches Gepräge.“ Mehr als dieses Resultat, das als Hilfssatz in seine Untersuchungen über Uniformisierung eingebettet war, hat sein 1909 in [7] publizierter Verzerrungssatz grosse Aufmerksamkeit auf sich gezogen. Er besagt, dass es zwei positive Funktionen $m(r)$ und $M(r)$ gibt derart, dass $m(r)\leqq|f'(z)|\leqq M(r)$ ist für $|z|=r$ und jedes f aus S. Natürlich bestand damit das Problem, diese Funktionen m und M explizit zu bestimmen, und im Jahre 1913 hat J. Plemelj (cf. [8]) an der Tagung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Aerzte in Wien in seinem Vortrag angegeben, dass der Koeffizient a_2 für die Funktionen aus S eine obere Schranke N hat, die kleiner als 5 ist und aller Wahrscheinlichkeit nach gleich 2 sei, und dass man daraus schliessen könne, es sei

$$m(r) = \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^N \frac{1}{1-r^2} \quad \text{und} \quad M(r) = \left(\frac{1+r}{1-r}\right)^N \frac{1}{1-r^2}.$$

Wie er zu diesem Resultat kam, hat er in der kurzen Mitteilung nicht angegeben. Unabhängig davon ist G. Pick 1916 (cf. [9]) zu denselben Formeln gekommen und

doi:10.5186/aasfm.1982.0708

hat nachgewiesen, dass $N < 15$ sei. Natürlich erinnern diese sofort an den Verzerrungssatz für die Klasse V_k der Funktionen mit Randdrehung $\leqq k\pi$, was nicht zu verwundern ist, da die genaue Schranke des Koeffizienten a_2 in dieser Klasse gleich $k/2$ ist. Als dann im gleichen Jahr L. Bieberbach [12] zeigte, dass $N=2$ sei, ergab sich dann durch Einsetzen in die Formeln von Plemelj und Pick sofort, dass

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqq |f'(z)| \leqq \frac{1+r}{(1-r)^3}$$

und durch Integration, dass

$$\frac{r}{(1-r)^2} \leqq |f(z)| \leqq \frac{r}{(1-r)^2}$$

ist für die Funktionen der Klasse S, und dass in diesen Abschätzungen Gleichheit nur für die Koebefunktion und ihre Rotationen eintreten kann.

Rolf Nevanlinna gibt für diese Ungleichungen eine wesentlich vereinfachte Herleitung. Mit f aus S ist bis auf die Normierung auch

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{\zeta+z}{1+\bar{z}\zeta}\right)$$

aus S und durch Entwickeln von $\varphi(\zeta)$ nach Potenzen von ζ gewinnt er die Ungleichung

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} - \frac{2r^2}{1-r^2}\right| \leqq \frac{4r}{1-r^2} \tag{1}$$

für jedes z aus $\mathbf{D}$ aus der mit $|a_2| \leqq 2$ äquivalenten Abschätzung $|\varphi''(0)/2\varphi'(0)| \leqq 2$, und nach Trennen von Real- und Imaginärteil durch Integration direkt die obigen Verzerrungssätze sowie den kurz vorher von Bieberbach in [13] umständlich bewiesenen Drehungssatz

$$|\arg f'(z)| < 2 \log \frac{1+r}{1-r}, \quad |z| = r.$$

(Die genaue Schranke für die linke Seite der Ungleichung ist 1936 von G. M. Golusin gegeben worden.) Diese Herleitung der klassischen Verzerrungssätze ist seither unverändert in die Lehrbuchliteratur eingegangen.

Mit der von E. Study 1913 gegebenen Bedingung Re $\{zf''(z)/f'(z)\} > -1$ für konvex abbildende Funktionen hat er aus (1) auch sofort den exakten Wert $2-\sqrt{3}$ für die Rundungsschranke gefunden, d. i. der Radius des grössten Kreises $\{|z|<r\}$, der durch Funktionen aus S auf ein konvexes Gebiet abgebildet wird.

Eine interessante Verallgemeinerung der obigen Resultate gewinnt Nevanlinna, indem er die Ebene durch ein einfach zusammenhängendes Gebiet H ersetzt, das den Nullpunkt enthält und dort den konformen Radius >1 besitzt, und jene Funktionen aus S betrachtet, die den Einheitskreis in H abbilden. Die Extremalen in dieser Klasse S_H haben ein Bildgebiet, das aus H durch Anbringen eines Einschnittes entsteht. Diese Konfiguration ist für viele später behandelten Fragen typisch geblieben.

2. Nachdem die Bestimmung der genauen Koeffizientenräume für die Funktionen aus S damals (und bis heute) nicht gelungen ist, man jedoch im Fall der konvexen Funktionen in S (cf. [16], [3]) zu völlig abschliessenden Resultaten gelangt ist, betrachtet Nevanlinna in seiner zweiten Arbeit nun eine umfassendere Teilklasse von S, welche $\mathbf{D}$ auf ein Sterngebiet (bezüglich 0) abbilden, d. i. die Klasse S^* der sternförmigen Funktionen. Er beweist zunächst, dass f genau dann zu S^* gehört, wenn die Funktion

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \varphi(z) = 1 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots \tag{2}$$

positiven Realteil hat und somit zur Carathéodory-Klasse C gehört.

Damit gewinnt er zunächst eine untere Abschätzung für die Sternschranke, d. i. der Radius des grössten Kreises $\{|z|<R_S\}$, der durch jedes f aus S auf ein Sterngebiet abgebildet wird. Der Weg dazu führt ihn zu der auch an sich interessanten exakten Ungleichung

$$\left|\log\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}\right|\right| \leqq \log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

für f aus S, die von H. Grunsky 1932 [17] zu

$$\left|\log\frac{zf'(z)}{f(z)}\right| \leqq \log\frac{1+|z|}{1-|z|}$$

verschärft worden ist. Die beiden äquivalenten Bedingungen

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} > 0 \quad \text{und} \quad \arg\left\{\frac{zf'(z)}{f(z)}\right\} < \pi/2$$

für die Sternförmigkeit der Abbildung ergeben dann den exakten Wert der Sternschranke aus der Gleichung $\log\big((1+R_S)/(1-R_S)\big)=\pi/2$, also $R_S=0{,}65\ldots$. Sodann gelingt ihm, wiederum mit Hilfe der Bedingung (2), die Lösung der folgenden zwei Aufgaben:

1. Die Bestimmung der genauen Koeffizientenräume für die Klasse S^*, d. h. die der Kugel in $\mathbf{C}^{n-1}$ homöomorphen Koeffizientenkörper

$$S_n^* = \{(a_2, \ldots, a_n) | f \in S^*\},$$

in deren Gefolge sich dann insbesondere die für alle f aus S^* und $n=2, 3, \ldots$ gültigen Ungleichungen $|a_n| \leqq n$ ergeben haben. S^* war damit die erste der vielen heute bekannten Teilklassen von S, für welche die Bieberbach'sche Vermutung bewiesen wurde.

2. Die Bestimmung von oberen und unteren Schranken für $|f'(z)|$ und $|f(z)|$, wenn die ersten Koeffizienten $a_2, \ldots, a_n$ (d. i. ein Punkt aus S_n^*) und $|z|=r$ gegeben sind. Es handelt sich also hier um ein Extremalproblem mit Nebenbedingungen.

Der Zusammenhang mit den entsprechenden Problemen in der Klasse C war durch die Bedingung (2) unmittelbar gegeben, und die Übertragung der betreffenden Resultate von Carathéodory (cf. [14], [15]) (über die Koeffizienten c) und jener von Pick [10] und Nevanlinna [3] über Interpolation bot keine prinzipiellen Schwierigkeiten.

Als geometrisch bemerkenswertes Resultat stellte sich heraus, dass bei den 2 obgenannten Aufgaben die Randpunkte von S_n^* bzw. die genauen Schranken für $|f'(z)|$ und $|f(z)|$ solchen Funktionen entsprechen, die **D** auf ein Sterngebiet abbilden, dessen Rand aus höchstens $n-1$ bzw. n Halbgeraden besteht. Im Falle $n=1$ (d. i. ohne Zusatzbedingungen) und $n=2$, d. h. für gegebenes a_2 ($|a_2|\leqq 2$) werden die genauen oberen und unteren Schranken für $|f'(z)|$ und $|f(z)|$ wie auch die Extremalfunktionen explizit berechnet, und es ist bemerkenswert, dass diese Extremalfunktionen nur von α_2 (und nicht von $|z|=r$) abhängig sind.

3. Es soll nun noch etwas auf Nevanlinna's Arbeiten über Interpolation eingegangen werden. In der soeben erwähnten gross angelegten Dissertation über das Interpolationsproblem beschränkter analytischer Funktionen in **D** bzw. von Funktionen mit positivem Realteil behandelt er zunächst das Problem endlich vieler Interpolationsstellen, das 1916 von Pick [10] mit anderer Methode angegangen wurde. Wenig später kommt dieser in [11] auf Nevanlinna's Arbeit zurück, „in welcher" (wie Pick schreibt) „der Verfasser ohne Kenntnis meiner Arbeit und auf einem andern Wege im wesentlichen dieselben Ergebnisse erzielt hat. Nicht nur die verwendete Methode ist dabei bemerkenswert, welche darin besteht, das gesamte Resultat auf das *eine* Prinzip zurück zu führen, dass eine reguläre Funktion das Maximum des Betrages nicht im Innern des Bereiches annimmt, oder, wenn man will, darin, dass der Fall mehrerer Wertzuordnungen auf den Fall einer einzigen zurückgeführt wird. Sondern es findet sich in Nevanlinna's Arbeit vor allem auch ein wesentlich neues Ergebnis: der allgemeine Ausdruck für eine beschränkte Funktion, der n zulässige Wertzuordnungen auferlegt sind."

Bei dem finiten Interpolationsproblem P_n geht es darum, in der Klasse E der holomorphen Funktionen von **D** nach $\overline{\mathbf{D}}$ jene zu finden, die an n verschiedenen Stellen $z_1, \ldots, z_n$ in **D** vorgeschriebene Werte $w_1, \ldots, w_n$ aus $\overline{\mathbf{D}}$ annehmen, und sowohl notwendige wie auch hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit anzugeben. Diese Bedingungen wie auch die Lösung werden durch ein rekursives Verfahren gefunden, das mit dem folgenden Ansatz beginnt:

$$\zeta(z) = \frac{w(z)-w_1}{1-\bar{w}_1 w(z)} : \frac{z-z_1}{1-\bar{z}_1 z}. \tag{3}$$

Wenn $w(z)$ in E und $w(z_1)=w_1$ ist, so ist $\zeta(z)$ in E, nach einer dem Schwarz'schen

Lemma zugrunde liegenden Schlussweise, und durch Auflösen von (3) nach $w(z)$ wird umgekehrt jeder Funktion $\zeta(z)$ aus E wieder ein $w(z)$ in E mit $w(z_1)=w_1$ zugeordnet.

Ist nun $w(z)=w_1(z)$ eine Lösung des Interpolationsproblems P_n, so definiert (3) eine neue Funktion $\zeta(z)=w_2(z)$ aus E, die an den Stellen $z_2, \ldots, z_n$ Werte $w_2', \ldots, w_n'$ annimmt. Damit sind neue, aber nur noch $n-1$ Wertzuordnungen gegeben, d. h. $w_2(z)$ löst ein Interpolationsproblem P_{n-1}'. Mit dem gleichen Verfahren gewinnt man aus P_{n-1}' eine Funktion $w_3(z)$, die ein Interpolationsproblem P_{n-2}'' löst, und so kann man weiterfahren. Immer müssen natürlich die $w_2(z_2), w_3(z_3), \ldots$ einen Betrag $\leqq 1$ haben, und wenn dieser (zum ersten Mal) gleich eins wird, sei dies für

$$w_j(z_j) = \omega_j(z_1, w_1, \ldots, z_j, w_j)$$

der Fall, so ist die Funktion $w_j(z)$ eine Konstante, und das Verfahren bricht ab. Geht jedoch das Verfahren weiter bis $j=n$ und ist $|\omega_n|=|w_n(z_n)|<1$, so löst die Funktion $w_n(z)$ ein Interpolationsproblem $P_1^{(n-1)}$ und der nächste Rekursionsschritt führt zu einer Funktion $w_{n+1}(z)$ aus E ohne Zusatzbedingungen. Beginnt man umgekehrt mit einer beliebigen Funktion $w_{n+1}(z)$ aus E und wird der beschriebene Algorithmus rückwärts aufgerollt (da jeder Rekursionsschritt eindeutig umkehrbar ist), so gelangt man zu einer Funktion

$$w(z) = \frac{A_n(z)\, w_{n+1}(z) + B_n(z)}{z^n[\bar{A}_n(1/z) + \bar{B}_n(1/z)\, w_{n+1}(z)]}, \tag{4}$$

die das Interpolationsproblem P_n löst. Dabei sind die A_n und B_n Polynome vom Grad n, die sich rekursiv aus den Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} A_j &= (z-z_j)(A_{j-1}+\bar{\omega}_j B_{j-1}) \\ B_j &= (1-\bar{z}_j z)(A_{j-1}\omega_j + B_{j-1}) \end{aligned} \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

mit der Anfangsbedingung $A_0=1$, $B_0=0$ berechnen lassen.

Notwendig und hinreichend, damit das Problem P_n lösbar sei, ist demnach, dass einer der folgenden 2 Fälle auftrete: Entweder es ist $|\omega_j|<1$ für alle $j\leqq n$ und dann sind durch (4) alle Lösungen gegeben, wenn für $w_{n+1}(z)$ die Funktionen aus E eingesetzt werden (hierin führt der Algorithmus von Nevanlinna wesentlich über die Resultate von Pick hinaus), oder es gibt ein $j\leqq n$, so dass $|\omega_k|<1$ ist für $k<j$ und $|\omega_j|=1$. In diesem Fall gibt es eine und nur eine Lösung, die eine rationale Funktion vom Grad $j-1$ ist und gegeben wird durch (4), wenn man dort n durch $j-1$ ersetzt und für $w_j(z)$ die eindeutig bestimmte Konstante ω_j einsetzt.

Für ein bestimmtes z aus $\mathbf{D}\setminus\{z_1, \ldots, z_n\}$ durchlaufen im ersten Fall die möglichen Werte von $w(z)$ eine Kreisscheibe K_n, die durch (4) gegeben wird, wenn w_{n+1} als komplexe Variable die abgeschlossene Kreisscheibe $\bar{\mathbf{D}}$ durchläuft. Dabei wird ein innerer Punkt von $\mathbf{D}$ von unendlich vielen Funktionen angenommen, ein Randpunkt jedoch von genau einer.

Denkt man sich nun die Zahl n der vorgeschriebenen Wertepaare (z_j, w_j) unbegrenzt wachsend, und zwar so, dass für die betreffenden Grössen ω_j der Betrag stets kleiner als 1 ist, so lässt sich für jedes n stets eine solche in $z_1, \ldots, z_n$ interpolierende Funktion $w_n(z)$ auswählen, dass die entstehende Folge gegen eine Funktion in E konvergiert. Die zu einem $z \notin \{z_j\}_1^\infty$ gehörigen Kreisscheiben K_n für die möglichen Werte von $w_n(z)$ sind ineinander geschachtelt, $K_1 \supset K_2 \supset \ldots$, und haben als Durchschnitt entweder einen Punkt (Grenzpunktfall, wo das Interpolationsproblem genau eine Lösung besitzt) oder eine Kreisscheibe (Grenzkreisfall, wo es unendlich viele Lösungen gibt). Diese Situation erinnert an die bekannte Alternative in H. Weyl's Habilitationsschrift [18] im Bereich der singulären Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Weyl ist denn auch in seiner späteren Arbeit [19] auf dieses Interpolationsproblem zurückgekommen mit dem Zweck, jenes Problem im Bereich der Differentialgleichungen anzugeben, das mit dem Nevanlinna—Pick'schen Problem im Bereich der Differenzengleichung (5) korrespondiert und auf den Fall zu erweitern, wo der Spektralparameter z wie bei Nevanlinna gebrochen linear in die Gleichung eingeht.

In [5] hat Nevanlinna die in seiner Dissertaion noch offengelassenen Fragen erledigt und seiner Interpolationstheorie die endgültige Fassung gegeben. Einer wichtigen Bemerkung von Denjoy folgend gewinnt er dort das notwendige und hinreichende Kriterium für Bestimmtheit (Grenzpunktfall):

$$\text{Die Reihe} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-|z_n|}{1-|\omega_n|} \quad \text{divergiert.}$$

Das Interpolationsproblem hat zahlreiche Grenzfälle. Einzelne Gruppen der Interpolationsstellen können je zu einem Punkt zusammenrücken, wodurch dann neben dem Funktionswert auch die Werte einiger Derivierten vorzuschreiben sind, bzw. sich notwendige und hinreichende Bedingungen für diese ergeben, und als Spezialfall z. B. der Koeffizientensatz von Carathéodory und der Algorithmus von Schur [20] herauskommt. Oder einzelne Interpolationsstellen können an den Rand rücken, wobei anstelle des Schwarz'schen Lemma's nun das Julia'sche Lemma ins Spiel kommt. Handelt es sich um Funktionen von der oberen Halbebene in die abgeschlossene untere Halbebene, anstelle von $\mathbf{D}$ und $\overline{\mathbf{D}}$, also um die sogenannte Nevanlinnaklasse N, und ist in ∞ eine asymptotische Entwicklung für die Funktion gegeben, so entsteht der berühmte, schon in [4] behandelte Zusammenhang der Nevanlinna'schen Interpolationstheorie mit dem Stieltjes'schen Momentenproblem. Dieser Grenzfall hat denn auch in einer Reihe von Arbeiten von Markus Krein und seiner Schule eine bedeutende Rolle gespielt.

Neuerdings, etwa seit Ende der sechziger Jahre, erlebt die Theorie von Nevanlinna—Pick eine Renaissance als ein Interpolationsproblem für Matrix-wertige analytische Funktionen, wo die Matrizen hermite'sch und positive-definit sind. Solche Probleme, die von mathematischen Modellen der Elektronik herkommen, gewinnen wachsende Bedeutung (cf. [21]).

Literatur

[1] NEVANLINNA, R.: Über die schlichten Abbildungen des Einheitskreises. - Översikt av Finska vetenskaps-societetens förhandlingar 62. A. 7, Helsingfors, 1919—1920, 1—14.

[2] NEVANLINNA, R.: Über die konforme Abbildung von Sterngebieten. - Ibid. 63. A. 6, Helsingfors, 1920—1921, 1—21.

[3] NEVANLINNA, R.: Über beschränkte Funktionen die in gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 13:1, 1919, 1—72.

[4] NEVANLINNA, R.: Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem. - Ibid. 18:5, 1922, 1—53.

[5] NEVANLINNA, R.: Über beschränkte analytische Funktionen. - Ibid. 32:7, 1929, 1—75.

[6] KOEBE, P.: Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. - Nachr. Königl. Ges. Wiss. Göttingen. Math.-Phys. Kl. 1907, 191—210.

[7] KOEBE, P.: Über die Uniformisierung der algebr. Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe. - Ibid. 1909, 68—76.

[8] PLEMELJ, J.: Über den Verzerrungssatz von Koebe. - Verh. Ges. deutscher Naturforscher u. Aerzte, erste Hälfte 1913, 163.

[9] PICK, G.: Über den Koebe'schen Verzerrungssatz. - Ber. Königl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig. Math.-Phys. Kl. 68, 1916, 58—64.

[10] PICK, G.: Über die Beschrankungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt sind. - Math. Ann. 77, 1916, 7—23.

[11] PICK, G.: Über beschränkte Funktionen mit vorgeschriebenen Wertzuordnungen. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. 15:3, 1920, 1—17.

[12] BIEBERBACH, L.: Über die Koeffizienten derjenigen Potenzreihen, welche eine schlichte Abbildung des Einheitskreises vermitteln. - S.-B. Preuss. Akad. Wiss. 1916, 940—955.

[13] BIEBERBACH, L.: Aufstellung und Beweis des Drehungssatzes für schlichte konforme Abbildungen. - Math. Z. 4, 1919. 295—305.

[14] CARATHÉODORY, D.: Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen. - Math. Ann. 64, 1907, 95—115.

[15] CARATHÉODORY, C.: Über den Variabilitätsbereich der Fourierkonstanten von positiven harmonischen Funktionen. - Rend. Circ. Mat. Palermo 32, 1911, 193—217.

[16] CARATHÉODORY, C.: Sur la représentation conforme de polygones convexes. - Ann. Soc. Sci. Bruxelles. Sér. I 37, 1—10.

[17] GRUNSKY, H.: Neue Abschätzungen zur konformen Abbildung ein- und mehrfach zusammenhängender Bereiche. - Schr. Math. Seminar Univ. Berlin 1, 1932, 93—140.

[18] WEYL, H.: Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. - Math. Ann. 68, 1910, 220—269.

[19] WEYL, H.: Über das Pick—Nevanlinna'sche Interpolationsproblem und sein infinitesimales Analogon. - Ann. of Math. 36, 1935, 230—254.

[20] SCHUR, I.: Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. - Journal für Mathematik 147, 1918, 205—232 und 148, 1918, 122—145.

[21] DELSARTE, PH., Y. GENIN, and Y. KAMP: The Nevanlinna—Pick problem for matrix-valued functions. - SIAM J. Appl. Math. 36, 1979, 47—61.

ETH-Zentrum
Mathematisches Seminar
CH-8092 Zürich
Schweiz

Eingegangen am 16. März 1981