ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

597

MINIMALE SEPARIERTE VEKTORRAUMLIMITIERUNGEN UND DER GRAPHENSATZ

VON

STEN BJON

HELSINKI 1975
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1975.597

ISSN 0066-1953
ISBN 951-41-0213-4

Vorgelegt am 18. Juni 1974

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1975

1. Einleitung

Wir nennen ein Objekt (E, Λ) in einer Kategorie $\mathcal{K}$ separierter Limesvektorräume (m)-Objekt in $\mathcal{K}$, falls jeder Bimorphismus $(E, \Lambda) \to (F, \Lambda')$ nach einem Objekt (F, Λ') in $\mathcal{K}$ ein Isomorphismus ist. Die Existenz nicht-trivialer (m)-Objekte wird in verschiedenen Kategorien von Limesvektorräumen mit Hilfe des Zorn'schen Lemmas nachgewiesen. Für lineare Abbildungen von einem Objekt in $\mathcal{K}$ nach einem (m)-Objekt in $\mathcal{K}$ wird einen Graphensatz bewiesen. Unter den betrachteten Kategorien ist die Kategorie $\mathcal{V}\overline{\mathcal{E}}^{\dagger}$ der sog. »stark ausgeglichenen» Limesvektorräume, die auch einer Abzählbarkeitsbedingung $(\dagger)$ genügen, die wichtigste. Die Kategorie der metrisierbaren, topologischen Vektorräume ist eine Unterkategorie von $\mathcal{V}\overline{\mathcal{E}}^{\dagger}$ und die vollständigen, metrisierbaren, topologischen Vektorräume sind sogar (m)-Objekte in der vollen Unterkategorie der vollständigen, regulären Objekte in $\mathcal{V}\overline{\mathcal{E}}^{\dagger}$. Die Limesstruktur auf einem Objekt in $\mathcal{V}\overline{\mathcal{E}}^{\dagger}$ kann durch eine Menge translationsinvarianter Metriken definiert werden, und umgekehrt definiert eine Menge Δ translationsinvarianter Metriken auf einem Vektorraum E eine Limitierung Λ auf E derart, dass (E, Λ) Objekt in $\mathcal{V}\overline{\mathcal{E}}^{\dagger}$ ist, falls Δ und die Elemente in Δ gewisse Eigenschaften haben. Im letzten Abschnitt wird die Vollständigkeit gewisser absolutkonvexer Räume durch ihre Einbettungseigenschaften charakterisiert.

Begriffe und Bezeichnungen. Mit $|\mathcal{K}|$ bezeichnen wir die Objektklasse einer Kategorie $\mathcal{K}$. Unter Vektorraum verstehen wir einen Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen. $\boldsymbol{V}$ sei der Nullumgebungsfilter bezüglich der Betragtopologie auf $\mathbf{K}$. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einem Vektorraum E heisst nach [6] *ausgeglichen* (equable), falls gilt $\boldsymbol{V} \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}$. Wir sagen, dass $\mathcal{F}$ *stark ausgeglichen* ist, falls diesüber gilt $\mathcal{F} + \mathcal{F} = \mathcal{F}$. Eine Vektorraumlimitierung Λ auf E und der Limesvektorraum (E, Λ) heissen (stark) ausgeglichen, falls es für jedes $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ ein (stark) ausgeglichenes $\mathcal{G} \in \Lambda 0$ mit $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$ gibt. Die Vektorraumlimitierung Λ und der Raum (E, Λ) heissen *absolutkonvex*, falls es zu jedem Filter $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ einen Filter $\mathcal{G} \in \Lambda 0$ gröber als $\mathcal{F}$ mit einer Basis aus absolutkonvexen Mengen gibt.

Diese arbeit wurde von Svenska Kulturfonden unterstützt.

Es sei E ein Vektorraum und $\mathbf{R}^+$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Abbildungen $q : E \rightarrow \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$ mit den Eigenschaften: (a) $q(0) = 0$, (b) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$, $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{K}$, $x \in E$, (c) $q(x + y) \leq q(x) + q(y)$, $x \in E$, $y \in E$, nennen wir *Pseudonormen*. Auf der Menge $Q(E)$ der Pseudonormen auf E sei $\leq$ die punktweise Ordnung. Eine Teilmenge M von $Q(E)$ heisst *saturiert*, falls die Pseudonormen q_1 und q_2 genau dann in M sind, wenn $\sup(q_1, q_2)$ in M ist. Ein Filter auf $Q(E)$ heisst saturiert, falls er eine Basis aus saturierten Mengen besitzt.

Jede Pseudonorm $q \in Q(E)$ definiert eine absolutkonvexe Teilmenge $U_q = \{x | q(x) \leq 1\}$ von E und jede Teilmenge $M \subset Q(E)$ definiert einen Filter $\mathcal{F}_M = [\{U_q | q \in M\}]$ auf E. Nach [2] definiert ein Filter ψ auf $Q(E)$ durch $\Lambda 0 = [\{\mathcal{F}_M | M \in \psi\}]$, $\Lambda x = x + \Lambda 0$ eine absolutkonvexe Limitierung Λ auf E, falls

(I) $\lambda \psi \leq \psi$ für jedes $\lambda > 0$

(II) für jedes $x \in E$ gibt es ein $M \in \psi$, so dass $q(x) < \infty$ für jedes $q \in M$ ist

erfüllt sind. Jede absolutkonvexe Limitierung kann in dieser Weise durch einen saturierten Filter auf $Q(E)$ mit den Eigenschaften (I) und (II) definiert werden. Falls Λ ausgeglichen ist, können wir sogar voraussetzen, dass ψ eine Basis aus saturierten Mengen M mit $\lambda M = M$ für jedes $\lambda > 0$ besitzt.

Für weitere Bezeichnungen wird auf [5] und [2] verwiesen.

2. (m)-Objekte

Es sei $\mathcal{VL}$ die Kategorie der separierten Limesvektorräume. Die Morphismen von $\mathcal{VL}$ seien die stetigen, linearen Abbildungen zwischen Limesvektorräumen. Neben $\mathcal{VL}$ betrachten wir folgende volle Unterkategorien von $\mathcal{VL}$:

$\mathcal{VE}$ = Kategorie der ausgeglichenen Limesvektorräume (vgl. [6]).

$\mathcal{V\overline{E}}$ = » » stark ausgeglichenen Limesvektorräume.

$\mathcal{VC}$ = » » absolutkonvexen Limesvektorräume (vgl. [2]).

$\mathcal{VEC}$ = » » ausgeglichenen, absolutkonvexen Limesvektorräume.

$\mathcal{VM}$ = Kategorie der Marinescu-Räume (vgl. [8]).

Wir bemerken, dass jede ausgeglichene, absolutkonvexe Limitierung stark ausgeglichen ist. Für einen ausgeglichenen Filter $\mathcal{F}$ mit absolutkonvexer Basis gilt nämlich: $\mathcal{F} + \mathcal{F} = \mathcal{F}$.

Ist $\mathcal{K}$ eine Unterkategorie von $\mathcal{VL}$, so bezeichnet $\mathcal{K}^*$, $\mathcal{K}^\dagger$ bzw. $\mathcal{K}^{lc}$ die volle Unterkategorie von $\mathcal{VL}$, die genau alle Objekte $(E, \Lambda) \in |\mathcal{K}|$ mit der Eigenschaft (*), (†) bzw. (*lc*) enthält.

(*) (E, Λ) ist vollständig.
(†) Für jeden Filter $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ gibt es einen Filter $\mathcal{G} \in \Lambda 0$ mit $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$, der eine abzählbare Filterbasis besitzt.
(*lc*) Der Raum (E, Λ) ist lokalkompakt, d.h. jeder Filter $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ enthält eine kompakte Menge (vgl. [11]).

Definition. Eine Limitierung Λ auf einem Vektorraum E heisse $\mathcal{K}$-Limitierung auf E, wenn $(E, \Lambda) \in |\mathcal{K}|$ ist.

Definition. Ein Objekt $(E, \Lambda) \in |\mathcal{K}|$ heisse (m)-Objekt in $\mathcal{K}$, wenn jeder Bimorphismus $f: (E, \Lambda) \to (F, \Lambda')$ von (E, Λ) nach einem Objekt $(F, \Lambda') \in |\mathcal{K}|$ ein Isomorphismus ist.

Offensichtlich ist (E, Λ) genau dann ein (m)-Objekt in $\mathcal{K}$, wenn Λ minimales Element in der geordneten Menge der $\mathcal{K}$-Limitierungen auf E ist.

Beispiel 1. Jeder endlichdimensionale Raum in einer Unterkategorie $\mathcal{K}$ von $\mathcal{VL}$ ist (m)-Objekt in $\mathcal{K}$. Nach [10] ist nämlich die natürliche Topologie die einzige separierte Vektorraumlimitierung auf einem endlichdimensionalen Raum.

Beispiel 2. In der Kategorie der Banach-Räume ist jedes Objekt (m)-Objekt.

Satz 1. *Es sei* $\mathcal{K}$ *gleich einer der Kategorien* $\mathcal{VL}$, $\mathcal{VE}$, $\mathcal{V\overline{E}}$, $\mathcal{VC}$, $\mathcal{VEC}$ *oder* $\mathcal{VM}$. *Für jedes Objekt* $(E, \Lambda) \in |\mathcal{K}|$ $(|\mathcal{K}^*|, |\mathcal{K}^\dagger|, |\mathcal{K}^{lc}|, |\mathcal{K}^{\dagger *}|$ *bzw.* $|\mathcal{K}^{\dagger lc}|)$ *gibt es einen Bimorphismus* $(E, \Lambda) \to (F, \Lambda')$ *nach einem* (m)*-Objekt* (F, Λ') *in* $\mathcal{K}$ $(\mathcal{K}^*, \mathcal{K}^\dagger, \mathcal{K}^{lc}, \mathcal{K}^{\dagger *}$ *bzw.* $\mathcal{K}^{\dagger lc})$.

K. Kutzler hat in [11] gezeigt, dass die feinste Vektorraumlimitierung auf einem Vektorraum eine lokalkompakte Marinescu-Limitierung ist. Da sie sich als induktiver Limes der natürlichen Topologien auf endlichdimensionalen Unterräumen darstellen lässt, erfüllt sie auch die Abzählbarkeitsbedingung (†). Die Kategorie $\mathcal{VM}^{\dagger lc}$ enthält also auch Räume, die algebraisch unendlichdimensional sind.

Beweis von Satz 1: Es sei $\{\Lambda_\iota | \iota \in I\}$ eine total geordnete Menge von $\mathcal{K}$-($\mathcal{K}^*$-, $\mathcal{K}^\dagger$-, $\mathcal{K}^{lc}$-, $\mathcal{K}^{\dagger *}$- bzw. $\mathcal{K}^{\dagger lc}$-)Limitierungen auf E, die gröber als Λ sind. Der Raum (E, Λ_1) sei der induktive Limes (in der Kategorie der Limesräume) der Räume (E, Λ_ι), $\iota \in I$, nach den Identitäten $i_{\varkappa\iota}: (E, \Lambda_\iota) \to (E, \Lambda_\varkappa)$ $(\Lambda_\iota \geq \Lambda_\varkappa)$ auf E. Die Limitierung Λ_1 ist eine separierte Vektorraumlimitierung und es gilt: $\Lambda_1 0 = \bigcup_{\iota \in I} \Lambda_\iota 0$. Aus dieser Gleichung folgt, dass die Limitierung Λ_1 mit den Limitierungen Λ_ι, $\iota \in I$, ausgeglichen, stark ausgeglichen oder absolutkonvex ist und dass sie (*)

oder (†) genügt, falls irgendeine oder beide dieser Beziehungen für alle Λ_ι gelten. Induktive Limites von Marinescu-Räumen bzw. lokalkompakten Limesräumen sind wieder Marinescu-Räume bzw. lokalkompakte Limesräume (siehe [8] bzw. [11]). Sind alle Λ_ι Marinescu- bzw. lokalkompakte Limitierungen, so gilt also dieses auch für Λ_1. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es eine minimale $\mathcal{K}$-($\mathcal{K}^*$-, $\mathcal{K}^\dagger$-, $\mathcal{K}^{lc}$-, $\mathcal{K}^{\dagger *}$- bzw. $\mathcal{K}^{\dagger lc}$-) Limitierung Λ' auf E, die gröber als Λ ist. Die Identität $(E, \Lambda) \to (E, \Lambda')$ auf E ist ein Bimorphismus nach dem (m)-Objekt (E, Λ').

In Satz 1 brauchen wir die Kategorien $\mathcal{K}^{lc*}$, wo $\mathcal{K}$ die in Satz 1 genannten Kategorien durchläuft, nicht in Betracht ziehen, denn nach Satz 2 ist $\mathcal{K}^{lc*} = \mathcal{K}^{lc}$.

Satz 2. *Jeder lokalkompakte Limesvektorraum ist vollständig.*

Beweis. Es sei (E, Λ) ein lokalkompakter Limesvektorraum und $\mathcal{G}$ ein Cauchy-Filter in (E, Λ). Weiter sei der Filter $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ so gewählt, dass $\mathcal{G} - \mathcal{G} \geq \mathcal{F}$ ist. Es gibt dann ein kompaktes $K \in \mathcal{F}$ und eine Menge $G \in \mathcal{G}$ derart, dass $G - G \subset K$ ist. Für beliebiges $x \in G$ gilt $G \subset x + K$, d.h. $\mathcal{G}$ enthält eine kompakte Menge und besitzt damit einen Adhärenzpunkt. Nach [5, § III.4], konvergiert jeder Cauchy-Filter, der einen Adhärenzpunkt besitzt. Der Raum (E, Λ) ist also vollständig.

Satz 3. *Der Quotientenraum* $(E/H, \Lambda/H)$ (in der Kategorie der Limesräume) *eines lokalkompakten Limesvektorraumes* (E, Λ) *nach einem Unterraum* H *ist lokalkompakt.*

Beweis. Das $\wedge$-Ideal $(\Lambda/H)0$ wird von den Filtern $\varphi(\mathcal{F})$, $\mathcal{F} \in \Lambda 0$, erzeugt ($\varphi : E \to E/H$ ist die natürliche Abbildung). Weil das stetige Bild einer kompakten Menge kompakt ist [5], ist der Quotientenraum lokalkompakt.

Wir wissen nicht, ob es unendlichdimensionale, topologische Vektorräume gibt, die (m)-Objekte in irgendeiner der Kategorien $\mathcal{VC}$, $\mathcal{VEC}$, $\mathcal{VM}$ sind. Es gilt aber den

Satz 4. *Eine minimale* $\mathcal{VC}$- ($\mathcal{VEC}$- *bzw.* $\mathcal{VM}$-) *Limitierung* Λ *auf einem Vektorraum* E *ist genau dann eine Topologie, wenn der Dualraum* E' *Punkte von* E *separiert und* Λ *ist dabei gleich der schwachen Topologie* $\sigma(E, E')$ *auf* E.

Beweis. Nach [5, § III], ist eine Linearform auf E genau dann Λ-stetig, wenn sie bezüglich der zu Λ assoziierten, lokalkonvexen Topologie $\omega(\Lambda) \leq \Lambda$ stetig ist. Es ist folglich $\omega(\Lambda)$ separiert, falls E' Punkte von E separiert. Die Limitierung Λ ist somit gleich der gröbsten lokalkonvexen Topologie, die den Dualraum E' hat, d.h. $\Lambda = \sigma(E, E')$. Die Umkehrung ist trivial.

3. $\mathcal{V}\overline{\mathcal{E}}^{\dagger}$- und $\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{C}^{\dagger}$-Limitierungen

Nach einem Lemma in [6] ist (mit einer kleinen Verallgemeinerung) ein Filter $\mathcal{F}$ auf einem Vektorraum E genau dann ausgeglichen, wenn er eine Basis aus kreisförmigen Mengen besitzt und $\lambda\mathcal{F} \leq \mathcal{F}$ für jedes $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{K}$ ist. Diese Charakterisierung benutzen wir im nächsten Beweis.

Lemma 5. *Es sei* $(E, \Lambda) \in |\mathcal{V}\overline{\mathcal{E}}^{\dagger}|$. *Für jedes* $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ *gibt es einen stark ausgeglichenen Filter* $\mathcal{G} \in \Lambda 0$ *mit* $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$, *der eine abzählbare Basis besitzt.*

Beweis. Für jedes $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ gibt es einen stark ausgeglichenen Filter $\mathcal{G}'$ und ferner einen Filter $\mathcal{H} \in \Lambda 0$ mit abzählbarer Basis $\{H_n | n \in \mathbf{N}\}$ derart, dass $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}' \leq \mathcal{F}$ ist. Da $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}' = \mathcal{G}' + \mathcal{G}'$ ist, kann eine Familie $(G_n^{(m)})_{(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ aus kreisförmigen Mengen $G_n^{(m)} \in \mathcal{G}'$ durch Induktion so konstruiert werden, dass die Beziehungen $H_n \supset G_n^{(1)}$, $G_n^{(m)} \supset G_n^{(m+1)} + G_n^{(m+1)}$ und $G_n^{(m)} \supset G_{n+1}^{(m)}$ für alle m und n gelten. Sei $\mathcal{G}$ der von der Filterbasis $\{(1/k)G_n^{(m)} | (k, m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}\}$ erzeugte Filter. Dieser ist ausgeglichen, weil für jedes $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{K}$, und jedes $(k, m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$ ein $l \in \mathbf{N}$ so gewählt werden kann, dass $\lambda(1/k)G_n^{(m)} = |\lambda|(1/k)G_n^{(m)} \supset (1/kl)G_n^{(m)}$ gilt. Weiter ist nach der Konstruktion $\mathcal{G} = \mathcal{G} + \mathcal{G}$ und $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{G}'$, d.h. $\mathcal{G}$ hat die in Lemma 5 geforderten Eigenschaften.

Es sei Λ eine $\mathcal{V}\overline{\mathcal{E}}^{\dagger}$-Limitierung auf E und $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ ein stark ausgeglichener Filter mit einer abzählbaren Basis $\{F_n | n \in \mathbf{N}\}$ aus kreisförmigen Mengen. Durch Induktion konstruiert man eine neue Basis $\{W_n | n \in \mathbf{N}\}$ aus kreisförmigen Mengen derart, dass $W_{n+1} + W_{n+1} + W_{n+1} \subset F_n \cap W_n$ für jedes $n \in \mathbf{N}$ ist. Durch

$$\begin{aligned} \gamma(0) &= 0\,, \quad \gamma(x) = 1 \quad \text{falls} \quad x \notin W_1 \\ \gamma(x) &= 1/2^k \quad \text{falls} \quad x \in W_k \quad \text{und} \quad x \notin W_{k+1} \\ \delta_{\mathcal{F}}(x, y) &= \inf \sum_{i=1}^{p} \gamma(t_i - t_{i-1})\,, \end{aligned}$$

wo das Infimum über alle endlichen Folgen $(t_i)_{0 \leq i \leq p}$ mit $t_0 = x$ und $t_p = y$ genommen wird, wird eine Abbildung $\delta_{\mathcal{F}} : E \times E \to \mathbf{R}$ definiert. Genau wie für topologische Vektorräume (siehe [7] und [9]) zeigt man, dass $\delta_{\mathcal{F}}$ eine translationsinvariante Metrik ist, dass die Abbildung $\varrho_{\mathcal{F}} : E \to \mathbf{R}$, $\varrho_{\mathcal{F}}(x) = \delta_{\mathcal{F}}(x, 0)$, die Bedingung

(iv) aus $|\lambda| \leq 1$ folgt $\varrho(\lambda x) \leq \varrho(x)$

erfüllt und dass die Filterbasis $\{B_\varepsilon(\delta_{\mathcal{F}}) | \varepsilon > 0\}$ den Filter $\mathcal{F}$ wieder erzeugt. Dabei bezeichnet $B_\varepsilon(\delta_{\mathcal{F}})$ die Menge $\{x \in E | \delta_{\mathcal{F}}(x, 0) \leq \varepsilon\}$. Wenn

$\mathcal{F}$ die Menge der stark ausgeglichenen Filter in $\Lambda 0$ durchläuft, erhalten wir eine Familie $(\delta_{\mathcal{F}})$ von translationsinvarianten Metriken, die die Limitierung Λ wieder definieren. Da alle $\delta_{\mathcal{F}}$ translationsinvariant sind, hat jedes $\varrho_{\mathcal{F}}$ die Eigenschaften:

(i) $\varrho(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist

(ii) $\varrho(x) = \varrho(-x)$

(iii) $\varrho(x + y) \leq \varrho(x) + \varrho(y)$.

Sei $x \in E$ beliebig. Da $Vx \in \Lambda 0$ ist, gibt es ein stark ausgeglichenes $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ mit $Vx \geq \mathcal{F}$. Der Filter $\varrho_{\mathcal{F}}(Vx)$ ist gegen Null konvergent.

Die Menge der translationsinvarianten Metriken auf E ist durch die Relation »δ_1 definiert einen gröberen Filter als δ_2», die wir mit $\delta_1 \leq \delta_2$ bezeichnen, vorgeordnet. Es ist $\delta_1 \leq \delta_2$ genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ existiert, so dass für jedes $x \in E$ aus $\delta_2(x, 0) \leq \eta$ folgt $\delta_1(x, 0) \leq \varepsilon$. Für je zwei stark ausgeglichene $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ in $\Lambda 0$ gibt es ein stark ausgeglichenes $\mathcal{H}$ in $\Lambda 0$, so dass $\delta_{\mathcal{F}} \geq \delta_{\mathcal{H}}$ und $\delta_{\mathcal{G}} \geq \delta_{\mathcal{H}}$ ist.

Wir fassen zusammen:

Satz 6. *Jede* $\mathcal{V}\mathcal{E}^{\dagger}$*-Limitierung* Λ *auf einem Vektorraum* E *kann mit Hilfe einer durch die Relation* $\geq$ *gerichteten Menge* Δ *translationsinvarianter Metriken derart definiert werden, dass die Abbildungen* $\varrho : x \mapsto \delta(x, 0)$, $\delta \in \Delta$, (iv) *genügen und die Bedingung*

(v) *für jedes* $x \in E$ *gibt es ein* $\delta \in \Delta$, *so dass der Filter* $\delta(Vx, 0)$ *gegen Null konvergiert*

erfüllt ist. Jede durch $\geq$ *gerichtete Menge* Δ *translationsinvarianter Metriken, die* (v) *genügt und für die für jedes* $\delta \in \Delta$ *die assoziierte Abbildung* ϱ (iv) *erfüllt, definiert eine* $\mathcal{V}\mathcal{E}^{\dagger}$*-Limitierung auf* E.

Beweis für die letzte Behauptung: Wir setzen $\Lambda 0 = \{\mathcal{G} \in \mathbf{F}(E) | \mathcal{G} \geq \mathcal{F}_{\delta}, \delta \in \Delta\}$ und $\Lambda x = x + \Lambda 0$, wobei $\mathcal{F}_{\delta}$ den von der Filterbasis $\{B_{\varepsilon}(\delta) | \varepsilon > 0\}$ erzeugten Filter bezeichnet. Da Δ durch $\geq$ gerichtet ist, ist Λ eine Limitierung. Es ist $\lambda \mathcal{F}_{\delta} = \mathcal{F}_{\delta}$ $(\delta \in \Delta)$ für jedes $\lambda \neq 0$ und wegen (iv) besitzt $\mathcal{F}_{\delta}$ eine Basis aus kreisförmigen Mengen. Nach dem im Anfang dieser Nummer erwähnten Lemma in [6] ist der Filter $\mathcal{F}_{\delta}$ ausgeglichen. Er ist sogar stark ausgeglichen, denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist $B_{(1/2)\varepsilon}(\delta) \subset B_{(1/2)\varepsilon}(\delta) + B_{(1/2)\varepsilon}(\delta) \subset B_{\varepsilon}(\delta)$, d.h. $\mathcal{F}_{\delta} = \mathcal{F}_{\delta} + \mathcal{F}_{\delta}$. Da $\Lambda 0$ von stark ausgeglichenen Filtern erzeugt wird und Vx für jedes $x \in E$ wegen (v) in $\Lambda 0$ ist, ist Λ eine Vektorraumlimitierung (vgl. [5, § III.5]).

Kor. 6. *Jede* $\mathcal{V}\mathcal{E}^{\dagger}$*-Limitierung auf* E *ist induktiver Limes* (in der Kategorie der Limesräume) *metrisierbarer Topologien auf* E.

Bemerkung. Jede $\mathcal{V}\mathcal{E}$-Limitierung Λ auf E ist induktiver Limes einer Familie von Topologien auf E, denn für jedes stark ausgeglichenes $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ ist, wie man leicht nachprüft, für jedes $x \in E$ der Filter $x + \mathcal{F}$ Umgebungsfilter von x in bezug auf eine Topologie auf E.

Es sei jetzt Λ eine $\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{C}^{\dagger}$-Limitierung auf dem Vektorraum E und ψ der von Λ definierte, saturierte Filter auf der Menge $Q(E)$ der Pseudonormen auf E (siehe [2]). Für beliebiges $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ gibt es ein ausgeglichenes $\mathcal{G}'$ mit einer Basis aus absolutkonvexen Mengen und ein $\mathcal{H} \in \Lambda 0$ mit einer abzählbaren Basis $\{H_n | n \in \mathbf{N}\}$, so dass $\mathcal{H} \leq \mathcal{G}' \leq \mathcal{F}$ ist. Für jedes $n \in \mathbf{N}$ gibt es ein $G_n \in \mathcal{G}'$ mit $H_n \supset G_n$. Für den von der Filterbasis $\{(1/k)G_n | (k, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}\}$ erzeugten Filter $\mathcal{G}$ gilt: $\mathcal{H} \leq \mathcal{G} \leq \mathcal{G}'$. Es gibt somit eine Menge Φ aus ausgeglichenen Filtern mit abzählbaren Basen aus absolutkonvexen Mengen, so dass $\mathcal{F}$ genau dann in $\Lambda 0$ ist, wenn ein $\mathcal{G} \in \Phi$ mit $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$ existiert. Die Mengen $\{g_G | G \in \mathcal{G}, G \text{ absolutkonvex}\}$, $\mathcal{G}$ durchläuft Φ, bilden eine Basis χ von ψ (vgl. [2]). In jedem $M \in \chi$ gibt es eine aufsteigende unendliche Folge $q_1^{(M)} \leq q_2^{(M)} \leq \ldots$ von Pseudonormen derart, dass für jedes $q \in M$ ein $\lambda > 0$ und ein $n \in \mathbf{N}$ mit $q \leq \lambda q_n^{(M)}$ existieren. Durch

$$\varrho_M(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{q_n^{(M)}(x)}{1 + q_n^{(M)}(x)}$$

wird eine Abbildung $\varrho_M : E \to \mathbf{R}$ definiert (wir setzen $\xi/(1+\xi) = 1$ für $\xi = \infty$). Genau wie in der Theorie der lokalkonvexen Räume zeigt man (für die Einzelheiten verweisen wir auf [7] und [9]), dass ϱ_M die Eigenschaften (i) bis (iv) hat und dass die Mengen $\{x \in E | \varrho_M(x) \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, den von M definierten Filter erzeugen. In dieser Weise erhalten wir eine Menge $\Delta = \{\delta_M | M \in \chi\}$ translationsinvarianter Metriken $\delta_M : (x, y) \mapsto \varrho_M(x - y)$, die die Limitierung Λ definieren.

Satz 7. *Es sei* Λ *eine* $\mathcal{V}\mathcal{E}^{\dagger}$*-Limitierung auf* E, Δ *eine Menge translationsinvarianter Metriken, die die Limitierung* Λ *definieren und* P *die Menge der Abbildungen* $\varrho : x \mapsto \delta(x, 0)$, $\delta \in \Delta$. *Dann wird die Quotientenlimitierung* (in der Kategorie der Limesräume) *auf einem Quotientenraum* E/H *nach einem abgeschlossenen Unterraum* H *von* E *von den translationsinvarianten Metriken* $\hat{\delta} : (x, y) \to \hat{\varrho}(\hat{x} - \hat{y})$, $\varrho \in P$, *definiert. Dabei ist* $\hat{\varrho}$ *durch*

$$\hat{\varrho}(\hat{x}) = \inf_{y \in \hat{x}} \varrho(y), \quad \hat{x} = \varphi(x)$$

($\varphi : E \to E/H$ ist die natürliche Abbildung) *definiert, und für jedes* $\varrho \in P$ *hat* $\hat{\varrho}$ *die Eigenschaften* (i) *bis* (iv) *und die Menge der Metriken* $\hat{\delta}$ *die Eigenschaft* (v).

Beweis. Man verifiziert wie in der Theorie der metrisierbaren, topologischen Vektorräume, dass die Abbildung $\hat{\varrho}$ die Eigenschaften (i) bis (iv) hat. Die Abbildungen $\hat{\delta} : (\hat{x} , \hat{y}) \mapsto \hat{\varrho}(\hat{x} - \hat{y})$, $\varrho \in P$, sind also translationsinvariante Metriken. Sie definieren die Quotientenlimitierung Λ/H auf E/H, denn für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\varphi(B_\varepsilon(\delta)) \subset B_\varepsilon(\hat{\delta}) \subset \varphi(B_{2\varepsilon}(\delta))$. Das Λ-Ideal $(\Lambda/H)0$ wird ja gerade von den Filtern $\varphi([\{B_\varepsilon(\delta) | \varepsilon > 0\}])$, $\delta \in \Delta$, erzeugt. Die Bedingung (v) ist automatisch erfüllt.

Satz 8. *Der Quotientenraum* $(E/H , \Lambda/H)$ *nach einem abgeschlossenen Unterraum* H *eines vollständigen Raumes* $(E , \Lambda) \in |\overline{\mathcal{VE}}^{\dagger}|$ *ist vollständig.*

Beweis. Sei $\mathcal{G}$ ein Cauchy-Filter in dem Quotientenraum. Da Λ/H der Abzählbarkeitsbedingung (†) genügt, gibt es eine Cauchy-Folge $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in $(E/H , \Lambda/H)$, deren assoziierter Elementarfilter feiner als $\mathcal{G}$ ist. Sei Δ eine Menge translationsinvarianter Metriken, die Λ definieren. Dann gibt es ein $\delta \in \Delta$ derart, dass die Folge $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ im metrischen Raum $(E/H , \hat{\delta})$ ($\hat{\delta}$ ist wie in Satz 7 definiert) eine Cauchy-Folge ist. Genau wie für Banach-Räume zeigt man, dass $(\hat{x}_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine bezüglich $\hat{\delta}$ und damit auch bezüglich Λ/H konvergente Teilfolge besitzt (wir verweisen auf [9]). Der Cauchy-Filter $\mathcal{G}$ hat einen Adhärenzpunkt und ist somit konvergent [5, § III].

Ein Limesraum (E , λ) heisst *regulär* [5], wenn mit einem Filter $\mathcal{F}$ auch der von den Hüllen $\bar{F}$ $(F \in \mathcal{F})$ erzeugte Filter $\bar{\mathcal{F}}$ gegen $x \in E$ konvergiert. Wir bezeichnen mit $\overline{\mathcal{VER}}$ (bzw. $\mathcal{VECR}$) die volle Unterkategorie von $\mathcal{VL}$, die genau alle reguläre Objekte in $\overline{\mathcal{VE}}$ (bzw. $\mathcal{VEC}$) enthält.

Satz 9. *Jeder vollständige, metrisierbare, topologische Vektorraum ist* (m)*-Objekt in* $\overline{\mathcal{VER}}^{\dagger *}$.

Beweis. Es sei (E , τ_0) ein vollständiger, metrisierbarer, topologischer Vektorraum, Λ eine Limitierung auf E mit $\Lambda \leq \tau_0$ und $(E , \Lambda) \in |\overline{\mathcal{VER}}^{\dagger *}|$ und schliesslich sei Δ eine Menge translationsinvarianter Metriken, die Λ definieren. Jedes $\delta \in \Delta$, das einen gröberen Filter als der Nullumgebungsfilter in (E , τ_0) definiert, definiert eine Vektorraumtopologie auf E. Der Filter $\delta(Vx , 0)$ ist ja für jedes $x \in E$ gegen Null konvergent. Die Limitierung Λ ist also induktiver Limes der durch $\geq$ gerichteten Menge $\mathcal{T}$ aller metrisierbaren Vektorraumtopologien τ auf E mit $\tau_0 \geq \tau \geq \Lambda$. Für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ sei $(\tilde{E}_\tau , \tilde{\tau})$ die vollständige Hülle von (E , τ) und für je zwei τ und τ' in $\mathcal{T}$ mit $\tau \geq \tau'$ sei $h_{\tau'\tau} : (\tilde{E}_\tau , \tilde{\tau}) \to (\tilde{E}_{\tau'} , \tilde{\tau}')$ die stetige Fortsetzung der Inklusion $(E , \tau) \to (\tilde{E}_{\tau'} , \tilde{\tau}')$. Es ist $h_{\tau''\tau'} \circ h_{\tau'\tau} = h_{\tau''\tau}$ für $\tau \geq \tau' \geq \tau''$.

Weil (E , Λ) regulär ist, besitzt die Identität $(E , \tau) \to (E , \Lambda)$ für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ eine stetige lineare Fortsetzung $h_\tau : (\tilde{E}_\tau , \tilde{\tau}) \to (E , \Lambda)$ (vgl. [12]). Für jedes $z \in E$ sei $h_\tau(z)$ der Konvergenzpunkt bezüglich Λ eines Cauchy-Filters $\mathcal{F}$ in (E , τ), der in $(\tilde{E}_\tau , \tilde{\tau})$ einen gegen z konvergierenden Filter erzeugt. Um die Stetigkeit der linearen Abbildung h_τ nachzuweisen, betrachten wir den Nullumgebungsfilter $\mathcal{V}_\tau$ in (E, τ) und den von den abgeschlossenen Hüllen $\bar{V}^{\tilde{\tau}}$ $(V \in \mathcal{V}_\tau)$ in $(\tilde{E}_\tau, \tilde{\tau})$ erzeugten Nullumgebungsfilter $\mathcal{V}_{\tilde{\tau}}$ in $(\tilde{E}_\tau, \tilde{\tau})$ (vgl. [9]). Aus $z \in \bar{V}^{\tilde{\tau}}$ und $V \in \mathcal{G} \geq z + \mathcal{V}_{\tilde{\tau}}$ folgt $h_\tau(z) = \lim_\Lambda \mathcal{G}_E \in \bar{V}^\Lambda$, wo $\bar{V}^\Lambda$ die Hülle von V bezüglich Λ und $\mathcal{G}_E$ der Spur von $\mathcal{G}$ auf E bezeichnen. Es ist also $h_\tau(\bar{V}^{\tilde{\tau}}) \subset \bar{V}^\Lambda$ für jedes $V \in \mathcal{V}_\tau$, d.h. $h_\tau(\mathcal{V}_{\tilde{\tau}}) \geq \overline{\mathcal{V}}_\tau^\Lambda$. Da Λ regulär ist, ist $\overline{\mathcal{V}}_\tau^\Lambda \in \Lambda 0$ und h_τ ist somit stetig. Offensichtlich ist $h_{\tau'} = h_{\tau'\tau} \circ h_\tau$ für je zwei τ und τ' in $\mathcal{T}$ mit $\tau \geq \tau'$.

Für jedes $\tau \in \mathcal{T}$ sei $k_\tau : (E, \tau) \to (\tilde{E}_\tau, \tilde{\tau})$ die Inklusion. Wir betrachten den induktiven Limes $(E, \operatorname{ind} \tilde{\tau})$ (in der Kategorie der Limesvektorräume) der Räume $(\tilde{E}_\tau, \tilde{\tau})$, $\tau \in \mathcal{T}$, bezüglich der Abbildungen $h_{\tau'\tau}$, $\tau \geq \tau'$. Für jeden Filter $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ gibt es ein $\tau \in \mathcal{T}$, so dass $k_\tau(\mathcal{F})$ bezüglich $\tilde{\tau}$ gegen Null konvergiert. Da das $\wedge$-Ideal $(\operatorname{ind} \tilde{\tau})0$ von den Filtern $h_\tau(\mathcal{V}_{\tilde{\tau}})$, $\tau \in \mathcal{T}$, erzeugt wird, ist folglich $\operatorname{ind} \tilde{\tau} \leq \Lambda$. Die Limitierung $\operatorname{ind} \tilde{\tau}$ ist aber die feinste Vektorraumlimitierung auf E, für die alle h_τ stetig sind. Sie ist also mit Λ identisch. Im kommutativen Diagramm $(\tau \in \mathcal{T})$

$$\begin{tikzcd} & (\tilde{E}, \tilde{\tau}) \arrow[dd, "h_\tau"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ (E, \tau_0) \arrow[ur, "k'_\tau"] \arrow[dr, "id_E"'] & & (\tilde{E}_\tau/K_\tau, \tilde{\tau}/K_\tau) \arrow[dl, "h'_\tau"] \\ & (E, \Lambda) & \end{tikzcd}$$

ist das rechte Dreieck die kanonische Zerlegung von h_τ in einen Epimorphismus φ und einen anschliessenden Monomorphismus h'_τ, und k'_τ ist die natürliche Abbildung. Die Limitierung $\Lambda = \operatorname{ind} \tilde{\tau}$ ist offensichtlich die feinste Vektorraumlimitierung auf E, für welche alle h'_τ stetig sind. Da der Quotientenraum $(\tilde{E}_\tau/K_\tau, \tilde{\tau}/K_\tau)$ ein vollständiger, metrisierbarer, topologischer Vektorraum und $\varphi \circ k'_\tau$ ein Bimorphismus ist, ist diese Abbildung ein Isomorphismus. Es folgt, dass die Limitierung Λ mit τ_0 identisch sein muss. Satz 9 ist damit bewiesen.

Kor. 9.1. *Jeder Bimorphismus $f : (E, \tau) \to (F, \Lambda')$ von einem vollständigen, metrisierbaren, topologischen Vektorraum (E, τ) auf einen Raum $(F, \Lambda') \in |\mathcal{V}\overline{\mathcal{E}}\mathcal{R}^{\dagger *}|$ ist ein Isomorphismus.*

Kor. 9.2. *Jeder (F)-Raum ist (m)-Objekt in $\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{C}\mathcal{R}^{\dagger *}$.*

4. Der Graphensatz

Es sei $\mathcal{K}$ gleich einer der Kategorien $\mathcal{V}\mathcal{L}$, $\mathcal{V}\mathcal{E}$, $\mathcal{V}\overline{\mathcal{E}}$, $\mathcal{V}\mathcal{C}$, $\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{C}$, $\mathcal{V}\mathcal{M}$.

Satz 10. *Eine lineare Abbildung $f : (E, \Lambda) \to (F, \Lambda')$ von einem Raum*

$(E, \Lambda) \in |\mathcal{K}|$ ($|\mathcal{K}^\dagger|$, $|\mathcal{K}^{lc}|$, $|\mathcal{K}^{\dagger lc}|$, $|\mathcal{V}\mathcal{E}^{\dagger *}|$, $|\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{C}^{\dagger *}|$ *bzw.* $|\mathcal{V}\mathcal{M}^{\dagger *}|$) *nach einem* (m)*-Objekt* (F, Λ') *in derselben Kategorie ist genau dann stetig, wenn der Graph* G_f *von* f *im Produktraum* $E \times F$ *abgeschlossen ist.*

Beweis. Ist f stetig, so ist G_f abgeschlossen (siehe [1]). Ist umgekehrt G_f abgeschlossen, so ist auch der Graph G_{-f} der Abbildung $x \mapsto -f(x)$ abgeschlossen. Die Abbildungen $k: E \to (E \times F)/G_{-f}$ und $l: F \to (E \times F)/G_{-f}$ seien die Kompositionen der natürlichen Abbildungen $E \to E \times F \to (E \times F)/G_{-f}$ bzw. $F \to E \times F \to (E \times F)/G_{-f}$. Diese sind $(\Lambda, (\Lambda \times \Lambda')/G_{-f})$- bzw. $(\Lambda', (\Lambda \times \Lambda')/G_{-f})$-stetig. Die Limitierung $(\Lambda \times \Lambda')/G_{-f}$ ist separiert, weil G_{-f} abgeschlossen ist [14]. Ferner ist sie eine Marinescu-, (stark) ausgeglichene oder absolutkonvexe Limitierung oder sie erfüllt (†) oder (lc), falls dies für Λ und Λ' gilt ([6], [8], [13], [2], Satz 3). Der Quotientenraum eines (stark) ausgeglichenen Raumes ist (stark) ausgeglichen, weil das lineare Bild eines (stark) ausgeglichenen Filters (stark) ausgeglichen ist. Schliesslich ist nach [4] und Satz 8 der Raum $((E \times F)/G_{-f}, (\Lambda \times \Lambda')/G_{-f})$ vollständig, falls Λ und Λ' $\mathcal{V}\mathcal{E}^{\dagger *}$-, $\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{C}^{\dagger *}$- oder $\mathcal{V}\mathcal{M}^{\dagger *}$-Limitierungen sind. Da (F, Λ') ein (m)-Objekt und — wie man leicht nachprüft — die Abbildung l bijektiv ist, ist l^{-1} und damit auch $f = l^{-1} \circ k$ stetig.

5. Vollständigkeit und $\mathcal{K}$-Einbettungsvollständigkeit

Es sei $\mathcal{K}$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{V}\mathcal{L}$.

Definition. Ein Raum $(E, \Lambda) \in |\mathcal{K}|$ heisse $\mathcal{K}$*-einbettungsvollständig,* wenn für jede Einbettung $i: (E, \Lambda) \to (F, \Lambda')$ von (E, Λ) in einen Raum $(F, \Lambda') \in |\mathcal{K}|$ das Bild $i(E)$ von E ein abgeschlossener Unterraum von (F, Λ') ist.

Satz 11. *Jeder vollständige Raum* $(E, \Lambda) \in |\mathcal{K}|$ *ist* $\mathcal{K}$*-einbettungsvollständig.*

Beweis. Sei $i: (E, \Lambda) \to (F, \Lambda')$ ($(F, \Lambda') \in |\mathcal{K}|$) eine Einbettung und $y \in F$ ein beliebiger an $i(E)$ adhärenter Punkt. Sei ferner $\mathcal{G} \in \Lambda' y$ ein Filter der $i(E)$ als Element enthält. Das Urbild $i^{-1}(\mathcal{G}_{i(E)})$ der Spur von $\mathcal{G}$ auf $i(E)$ ist ein Cauchy-Filter in (E, Λ), weil $\mathcal{G}_{i(E)}$ im Unterraum $i(E)$ ein Cauchy-Filter ist. Sei x der Konvergenzpunkt von $i^{-1}(\mathcal{G}_{i(E)})$. Dann ist $y = i(x) \in i(E)$. Der Unterraum $i(E)$ ist somit abgeschlossen für jede Einbettung i, d.h. (E, Λ) ist $\mathcal{K}$-einbettungsvollständig.

Sei $\mathcal{F}$ ein Filter auf einem Vektorraum E. Mit $\mathbf{K} \cdot \mathcal{F}$ bezeichnen wir den von den Mengen $\mathbf{K} \cdot F = \{\lambda x | \lambda \in \mathbf{K}, \ x \in F\}$, $F \in \mathcal{F}$, erzeugten Filter auf E. Mit *Ultra-Cauchy-Filter* verstehen wir einen Cauchy-Filter, der ein Ultrafilter ist.

Satz 12. *Es sei* $\mathcal{K}$ *gleich einer der Kategorien* $\mathcal{V}\mathcal{C}$, $\mathcal{V}\mathcal{E}\mathcal{C}$ *oder* $\mathcal{V}\mathcal{M}$. *Ein* $\mathcal{K}$- *(bzw.* $\mathcal{K}^\dagger$-*) einbettungsvollständiger Raum* $(E, \Lambda) \in |\mathcal{K}|$

(bzw. $|\mathcal{K}^\dagger|$*) ist genau dann vollständig, wenn es für jeden Ultra-Cauchy-Filter* $\mathcal{U}$ *in* (E, Λ) *ein* $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ *gibt, so dass* $\mathcal{U} \geq \mathbf{K} \cdot \mathcal{F}$ *ist.*

Beweis. a) Falls der Raum (E, Λ) vollständig ist, so ist er auch einbettungsvollständig nach Satz 11. Sei $\mathcal{U}$ ein Ultra-Cauchy-Filter in (E, Λ). Dann gibt es wegen der Vollständigkeit ein $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ mit absolutkonvexer Basis und ein $x \in E$, so dass $\mathcal{U} \geq x + \mathcal{F} \geq \mathbf{K} \cdot (Vx + \mathcal{F})$ ist.

b) Sei jetzt (E, Λ) ein $\mathcal{K}$- (bzw. $\mathcal{K}^\dagger$-) einbettungsvollständiger Raum mit der in Satz 9 erwähnten Eigenschaft. Wir nehmen an, dass es einen nicht-konvergenten Ultra-Cauchy-Filter $\mathcal{U}$ in (E, Λ) gibt und zeigen, dass diese Annahme zu einem Widerspruch führt. Es sei Ω ein Vektorraum, der E als echten Unterraum enthält. Ferner seien $z \in \Omega \setminus E$ ein beliebiger Punkt, E_1 die lineare Hülle von $E \cup \{z\}$ in Ω und ψ der von Λ definierte, saturierte Filter auf $Q(E)$. Für jede Pseudonorm q auf E ist die Abbildung $q_1 : E_1 \to \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$,

$$q_1(x + \lambda z) = \lim q(x + \lambda \mathcal{U}), \quad x \in E, \quad \lambda \in \mathbf{K},$$

eine Pseudonorm auf E_1 und eine Fortsetzung von q (wir betrachten $\mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$ als Ein-Punkt-Kompaktifikation von $\mathbf{R}^+$). Sei für jedes $M \subset Q(E)$ die Menge M_1 durch $M_1 = \{p \in Q(E_1) | \exists\, q \in M \text{ mit } p \leq q_1\}$ definiert. Ist dabei M saturiert, so ist es auch M_1.

Wir zeigen, dass der Filter $\psi_1 = [\{M_1 | M \in \psi\}]$ auf $Q(E_1)$ eine absolutkonvexe Limitierung auf E_1 definiert. Offensichtlich ist $\lambda \psi_1 = \psi_1$ für jedes $\lambda > 0$. Sei nun $x + \lambda z \in E_1$ $(x \in E, \ \lambda \in \mathbf{K})$ beliebig. Weil $\mathcal{U}' = x + \lambda \mathcal{U}$ ein Ultra-Cauchy-Filter ist, gibt es eine Menge $M \in \psi$ derart, dass $\mathcal{U}' - \mathcal{U}' \geq \mathcal{F}_M$ und $\mathcal{U}' \geq \mathbf{K} \cdot \mathcal{F}_M$ ist. Für jedes $q \in M$ existiert dann eine Menge $U \in \mathcal{U}'$, so dass $q(v) < \infty$ und $q(u - v) \leq 1$ für jedes Paar $(u, v) \in U \times U$ ist. Man folgert hieraus, dass $q(U) \subset [0, 1 + q(v)]$ für beliebiges festes $v \in U$ und ferner, dass $q_1(x + \lambda z) = \lim q(\mathcal{U}') < \infty$ für jedes $q \in M$ ist. Der Filter ψ_1 definiert somit eine absolutkonvexe Limitierung Λ_1 auf E_1. Es ist klar, dass die Inklusion $i : (E, \Lambda) \to (E_1, \Lambda_1)$ eine Einbettung ist ([2]).

Offensichtlich ist (E_1, Λ_1) ausgeglichen (bzw. erfüllt (E_1, Λ_1) die Bedingung (†)), wenn dies für (E, Λ) gilt. Ist Λ eine Marinescu-Limitierung, so besitzt ψ eine Basis χ aus saturierten, ausgeglichenen Mengen derart, dass $q_M \in M$ für alle $M \in \chi$ ist [3, Satz 12]. Dabei ist die Pseudonorm q_M durch

$$q_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } q(x) < \infty \text{ für jedes } q \in M \text{ ist} \\ \infty & \text{falls es ein } q \in M \text{ mit } q(x) = \infty \text{ gibt} \end{cases}$$

definiert. Ist nun $q_1(x + \lambda z) = \lim q(x + \lambda \mathcal{U}) < \infty$ für jedes $q \in M$, so gibt es für jedes solche q ein $U \in \mathcal{U}$, so dass die Menge $q(x + \lambda U)$ beschränkt ist. Es ist also $(q_M)_1(x + \lambda z) = \lim q_M(x + \lambda \mathcal{U}) = 0$. Man erhält: $(q_M)_1 = q_{M_1}$. Die Limitierung Λ_1 ist eine Marinescu-Limitierung nach [3].

Die Limitierung Λ_1 ist auch separiert. Seien $x + \lambda z \neq 0$ $(x \in E, \lambda \neq 0)$ und $M \in \psi$ beliebig gewählt. Wir setzen wieder $\mathcal{U}' = x + \lambda \mathcal{U}$. Wäre nun $\lim q(\mathcal{U}') \leq 1$ für alle $q \in M$, so gälte $[0, 1] \in q(\mathcal{U}')$ für jedes $q \in M$, und $\mathcal{U}'$ wäre dann feiner als $\mathcal{F}_M$ und somit gegen Null konvergent. Dies widerspricht aber unserer Annahme, dass $\mathcal{U}$ nicht konvergiert. Es gibt folglich ein q in jedem $M \in \psi$, so dass $q_1(x + \lambda z) > 1$ ist. Die Limitierung Λ_1 genügt T_1 und damit auch T_2 (siehe [13]).

Sei wieder $M \in \psi$ so gewählt, dass $\mathcal{U} - \mathcal{U} \geq \mathcal{F}_M$ ist. Für jedes $q \in M$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$, so dass $[0, 1] \cap q(x - U') \neq \phi$ für jedes $x \in U$ und jedes $U' \in \mathcal{U}$ ist, oder anders ausgedrückt: so dass $q_1(x - z) = \lim q(x - \mathcal{U}) \leq 1$ für jedes $x \in U$ ist. Es ist also $i(\mathcal{U}) \geq z + \mathcal{F}_{M_1}$. Der Unterraum E ist somit dicht im Raum (E_1, Λ_1), was der $\mathcal{K}$- (bzw. $\mathcal{K}^\dagger$-) Einbettungsvollständigkeit von (E, Λ) widerspricht. Satz 12 ist damit bewiesen.

Kor. 12. *Falls die Limitierung Λ in Satz 12 gröber als eine Vektorraumtopologie ist, so ist sie genau dann vollständig, wenn sie $\mathcal{K}$- (bzw. $\mathcal{K}^\dagger$-) einbettungsvollständig ist.*

Beweis. In diesem Fall gibt es einen Filter $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ aus absorbierenden Mengen. Die Bedingung in Satz 12 ist somit erfüllt.

Åbo Akademi
Mathematisches Institut
SF-20500 Åbo 50
Finnland

Literatur

[1] BJON, S.: Beiträge zur Theorie der Limesräume. - Acta Acad. Aboensis, Ser. B 29, nr 5 (1969).

[2] —»— Über absolutkonvexe Limesvektorräume. - Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math. 43, 181—188 (1973).

[3] —»— Die projektive, absolutkonvexe Tensorproduktlimitierung. - Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I 593 (1975).

[4] COOK, C. H., und FISCHER, H. R.: Uniform Convergence Struktures. - Math. Ann. 173, 290—306 (1967).

[5] FISCHER, H. R.: Limesräume. - Math. Ann. 137, 269—303 (1959).

[6] FRÖLICHER, A., und BUCHER, W.: Calculus in Vector Spaces without Norm. - Lecture Notes in Math. 30 (1966).

[7] HORVÁTH, J.: Topological Vector Spaces and Distributions. - Addison-Wesley Publ. Comp. 1966.

[8] JARCHOW, H.: Marinescu-Räume. - Comment. Math. Helv. 44, 138—163(1969).

[9] KÖTHE, G.: Topologische lineare Räume I. - Springer-Verlag 1960.

[10] KUTZLER, K.: Eine Bemerkung über endlichdimensionale, separierte, limitierte Vektorräume. - Arch. der Math. 20, 165—168 (1969).

[11] —»— Bemerkungen über unendlichdimensionale, separierte Limesvektorräume und Limesgruppen. - J. reine angew. Math. 253, 98—116 (1972).

[12] REED, E. E.: Completions of Uniform Convergence Spaces. - Math. Ann. 194, 83—108 (1971).

[13] WINGREN, C.-E.: Locally convex limit spaces. - Acta Acad. Aboensis, Ser. B 33, nr 5 (1973).

[14] WLOKA, J.: Limesräume und Distributionen. - Math. Ann. 152, 351—409 (1963).

Gedruckt im Januar 1975