ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

594

PONTRJAGINRÄUME MIT EINEM REPRODUZIERENDEN KERN

VON

PEKKA SORJONEN

HELSINKI 1975
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1975.594

ISSN 0066-1953
ISBN 951-41-0210-X

Vorgelegt am 13. Mai 1974

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1975

Einleitung

0.1. In dieser Note wird die von N. Aronszajn, S. Bergman und M. G. Kreĭn entwickelte Theorie der Hilberträume mit einem reproduzierenden Kern (siehe [1], [2], [6] und weitere in [11] zitierte Arbeiten) in zwei Richtungen verallgemeinert: Anstatt komplexwertiger Funktionen, die einen Hilbertraum bilden, werden hier *vektorwertige* Abbildungen betrachtet, die einen *Pontrjaginraum* bilden. Diese Verallgemeinerung ist von L. de Branges [3] in einem Spezialfall durchgeführt; er betrachtet analytische Vektorfunktionen, die einen Hilbertraum bilden.

0.2. Im ersten Kapitel sind Grundbegriffe der Theorie der Pontrjaginräume gesammelt. Für weitere Resultate sei auf [4], [5] und [7] verwiesen.

Die Kapitel 2 und 3 enthalten die Theorie der Pontrjaginräume mit einem reproduzierenden Kern. Dabei sind nur die wichtigsten und in den Anwendungen vorkommenden Resultate aus [1] und [11] für den verallgemeinerten Fall übertragen.

Als erste Anwendung betrachten wir in Kapitel 4 *-Halbgrupppen und Gruppen sowie ihre Darstellungen in einem Pontrjaginraum.

Als zweite Anwendung werden in Kapitel 5 verschiedene verallgemeinerte Resolventen von π-selbstadjungierten und π-hermiteschen Operatoren charakterisiert.

1. Pontrjaginräume

1.1. Geometrie und Topologie. Es sei $\mathfrak{L}$ ein komplexer linearer Raum, in dem eine hermitesche Form $[\cdot\mid\cdot]:\mathfrak{L}\times\mathfrak{L}\to \boldsymbol{C}$ gegeben ist.

Ein Element f von $\mathfrak{L}$ wird *nichtnegativ* (bzw. *positiv, neutral,* usw.) genannt, wenn $[f\mid f]\geq 0$ (bzw. $[f\mid f]>0$, $[f\mid f]=0$, usw.) gilt. Entsprechende Definitionen gelten auch für Teilräume von $\mathfrak{L}$.

Ein Paar von Vektoren f, g (von Teilmengen $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$) des Raumes $\mathfrak{L}$ heißt *π-orthogonal* (bezüglich $[\cdot\mid\cdot]$), in Zeichen $f\perp g$ ($\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$), wenn $[f\mid g]=0$ ($[f\mid g]=0$ für alle $f\in\mathfrak{M}$, $g\in\mathfrak{N}$) ist. Für jede Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{L}$ ist die Menge derjenigen Vektoren f, die zu $\mathfrak{M}$ π-orthogonal sind, ein Teilraum von $\mathfrak{L}$; man nennt ihn das *π-orthogonale Komplement* $\mathfrak{M}^{\perp}$ von $\mathfrak{M}$. Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ heißt *total*, wenn $\mathfrak{M}^{\perp} = \{0\}$.

Falls in einem Teilraum $\mathfrak{M}$ ein Vektor $f \neq 0$ existiert, der auch zu $\mathfrak{M}^{\perp}$ gehört, heißt $\mathfrak{M}$ (oder die Form $[\cdot \mid \cdot]$ auf $\mathfrak{M}$) *entartet*.

Der Raum $\mathfrak{L}$ heißt ein *$\pi_\varkappa$-Lineal* (wobei $\varkappa$ eine natürliche Zahl ist), falls die Form $[\cdot \mid \cdot]$ auf $\mathfrak{L}$ genau $\varkappa$ *negative Quadrate* hat; dies bedeutet, daß alle negativen Teilräume von $\mathfrak{L}$ die Dimension $\leq \varkappa$ haben und mindestens ein solcher Teilraum der Dimension $\varkappa$ existiert. In diesem Fall nennt man die Form $[\cdot \mid \cdot]$ ein *π-Skalarprodukt*. Ist das $\pi_\varkappa$-Lineal $\mathfrak{L}$ nicht entartet, so heißt $\mathfrak{L}$ ein *Praepontrjaginraum (mit $\varkappa$ negativen Quadraten)*.

In dem Praepontrjaginraum $\mathfrak{L}$ erklären wir zwei Konvergenzbegriffe folgendermaßen: Eine Folge (f_n) in $\mathfrak{L}$ *konvergiert* gegen $f \in \mathfrak{L}$, $f_n \to f$, falls die Relationen 1) $[f_n \mid f_n] \to [f \mid f]$, 2) $[f_n \mid g] \to [f \mid g]$ für alle g aus $\mathfrak{L}$, gelten. Wenn nur die zweite Bedingung erfüllt ist, sagen wir, daß (f_n) *schwach* gegen f *konvergiert*, $f_n \rightharpoonup f$.

Der Praepontrjaginraum $\mathfrak{L}$ gestattet eine (i. allg. nicht eindeutige) Zerlegung als direkte Summe zweier π-orthogonaler Teilräume:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_+ \dotplus \mathfrak{L}_- ; \tag{1.1}$$

wobei $\mathfrak{L}_+$ (bzw. $\mathfrak{L}_-$) positiv (bzw. negativ) ist und $\dim \mathfrak{L}_- = \varkappa$ gilt.

Die Zerlegung (1.1) erzeugt in $\mathfrak{L}$ eine nichtentartete positive hermitesche Form, d. h. ein gewöhnliches Skalarprodukt, $(\cdot \mid \cdot)$:

$$(f \mid g) := [f_+ \mid g_+] - [f_- \mid g_-] ; \tag{1.2}$$

dabei sind f_+, g_+ (bzw. f_-, g_-) die Komponenten der Elemente f, g von $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{L}_+$ (bzw. $\mathfrak{L}_-$) bezüglich der Zerlegung (1.1). Der Raum $\mathfrak{L}$ versehen mit der Form (1.2) ist ein Praehilbertraum und

$$|[f \mid g]| \leq \|f\| \|g\| \qquad \text{für alle } f, g \in \mathfrak{L}, \tag{1.3}$$

wobei $\|f\| := (f \mid f)^{1/2}$ ist.

Wenn in einer Zerlegung (1.1) des Praepontrjaginraumes $\mathfrak{L}$ der Teilraum $\mathfrak{L}_+$ vollständig (d. h. ein Hilbertraum) bezüglich des π-Skalarproduktes $[\cdot \mid \cdot]$ ist, so gilt dasselbe für jede solche Zerlegung; in diesem Fall heißt $\mathfrak{L}$ *Pontrjaginraum (mit $\varkappa$ negativen Quadraten)* oder *$\pi_\varkappa$-Raum*, den wir im folgenden häufig mit $\Pi_\varkappa$ bezeichnen. Dann ist $\Pi_\varkappa := \mathfrak{L}$ ein Hilbertraum bezüglich des Skalarproduktes $(\cdot \mid \cdot)$ aus (1.2).

Bekanntlich läßt sich jeder Praepontrjaginraum $\mathfrak{L}$ zu einem Pontrjaginraum $\hat{\mathfrak{L}}$ vervollständigen.[1])

[1]) Man beachte, daß aus $f_n \rightharpoonup f$ in $\mathfrak{L}$ i. allg. *nicht* $f_n \rightharpoonup f$ in $\hat{\mathfrak{L}}$ folgt.

Wir bemerken, daß in $\Pi_\varkappa$ die Relation $f_n \to f$ (bzw. $f_n \rightharpoonup f$) genau dann gilt, wenn f_n gegen f im Sinne der oben eingeführten Norm $\|\cdot\|$ konvergiert (bzw. schwach konvergiert). Im folgenden beziehen sich die topologischen Begriffe auf diese Normtopologie.

1.2. Operatoren in $\Pi_\varkappa$. [2]) Es sei jetzt $\Pi_\varkappa$ ein Pontrjaginraum und T ein dicht definierter Operator in $\Pi_\varkappa$. Wir erklären den *π-adjungierten Operator* T^+ von T folgendermaßen: $\mathfrak{D}(T^+)$ ist die Menge aller Elemente $g \in \Pi_\varkappa$, zu denen ein Element $h \in \Pi_\varkappa$ existiert mit $[Tf \mid g] = [f \mid h]$ für alle $f \in \mathfrak{D}(T)$; und es sei $T^+ g := h$.

Wir bemerken, daß diese Definition für einen in $\Pi_\varkappa$ dicht definierten Operator mit Werten in einem anderen Pontrjaginraum $\Pi'_{\varkappa'}$ verallgemeinert werden kann. Insbesondere gilt für $T \in \mathcal{B}(\Pi_\varkappa;\Pi'_{\varkappa'})$ auch $T^+ \in \mathcal{B}(\Pi'_{\varkappa'};\Pi_\varkappa)$.

Einen in $\Pi_\varkappa$ dicht definierten Operator T nennen wir *π-hermitesch*, wenn $T \subset T^+$, d. h. $[Tf \mid g] = [f \mid Tg]$ für alle $f, g \in \mathfrak{D}(T)$, und *π-selbstadjungiert*, wenn $T = T^+$ gilt. Jeder π-hermitesche Operator T gestattet eine Abschließung, die mit $T^{++} := (T^+)^+$ zusammenfällt.

Ein Operator $P \in \mathcal{B}(\Pi_\varkappa)$ mit $P^+ = P^2 = I$ ($:=$ der identische Operator auf $\Pi_\varkappa$) heißt *π-orthogonaler Projektor.*

Sei jetzt T ein Operator in $\Pi_\varkappa$, der nicht notwendig dicht definiert ist. Wir nennen T *π-kontrahierend,* falls $[Tf \mid Tf] \leq [f \mid f]$ für alle f aus $\mathfrak{D}(T)$ gilt; steht in dieser Beziehung stets das Gleichheitszeichen, so ist T *π-isometrisch.* Ein π-isometrischer Operator T heißt *π-unitär,* wenn $\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{R}(T) = \Pi_\varkappa$ ist. Ein Operator T ist genau dann π-unitär, wenn $T\,T^+ = T^+\,T = I$ gilt.

Jeder dicht definierte π-isometrische Operator T mit einer dichten Wertemenge ist stetig und also durch Stetigkeit zu einem π-unitären Operator auf $\Pi_\varkappa$ fortsetzbar.

1.3. $\mathfrak{G}$-Kern. Ist $\mathfrak{G}$ ein $\pi_\varkappa$-Raum und $\mathfrak{X}$ eine nichtleere Menge, so nennen wir eine Abbildung $K : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathcal{B}(\mathfrak{G})$ einen *$\mathfrak{G}$-Kern (auf $\mathfrak{X}$).*

Definition 1.1. *Der $\mathfrak{G}$-Kern K hat auf $\mathfrak{X}$ genau $\varkappa$ negative Quadrate, wenn folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

---

[2]) Wir benutzen die folgenden Bezeichnungen: $\mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y}) :=$ die Menge aller Abbildungen von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$; $\mathcal{B}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y}) :=$ die Menge aller Operatoren (d. h. lineare Abbildungen) aus $\mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{Y})$, die stetig sind; $\mathcal{B}(\mathfrak{X}) := \mathcal{B}(\mathfrak{X};\mathfrak{X})$. Zu einem Operator T wird mit $\mathfrak{D}(T)$, $\mathfrak{R}(T)$ bzw. $\mathfrak{N}(T)$ die Definitions-, Werte- bzw. Nullmenge von T bezeichnet.

1) $K(x,y) = K(y,x)^+$ *für alle* $x, y \in \mathfrak{X}$.

2) *Für jede natürliche Zahl* $n \geq 1$ *und für beliebige endliche Folgen* $(u_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ *in* $\mathfrak{G}$ *und* $(x_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ *in* $\mathfrak{X}$ *hat die (nach 1) hermitesche) Matrix*

$$\big([K(x_i,x_j)\, u_j \mid u_i]\big)_{1 \leqq i,j \leqq n}$$

höchstens $\varkappa$ *negative Eigenwerte und für mindestens eine solche Wahl von* n *und* (u_i), (x_i) *genau* $\varkappa$ *negative Eigenwerte.*

Ist insbesondere $\varkappa = 0$, *so heißt der* $\mathfrak{G}$*-Kern* K *positiv definit.*

Wenn wir zum Beispiel einen $\pi_\varkappa$-Raum $\Pi_\varkappa$ mit dem π-Skalarprodukt $[\cdot \mid \cdot]_\varkappa$ betrachten sowie als $\mathfrak{G}$ die komplexe Ebene $\boldsymbol{C}$ und als $\mathfrak{X}$ den Raum $\Pi_\varkappa$ wählen, so hat der $\boldsymbol{C}$-Kern $[\cdot \mid \cdot]_\varkappa : \Pi_\varkappa \times \Pi_\varkappa \to \boldsymbol{C}$ auf $\Pi_\varkappa$ genau $\varkappa$ negative Quadrate. Dabei ist also $\boldsymbol{C}$ ein π_0-Raum, d. h. ein Hilbertraum, mit dem Skalarprodukt $[\lambda \mid \mu] := \lambda \overline{\mu}$, und die Menge $\mathfrak{B}(\boldsymbol{C})$ ist natürlicherweise mit $\boldsymbol{C}$ identifiziert.

2. Reproduzierende Kerne

2.1. Definition und Eindeutigkeit. In diesem Kapitel sei $\mathfrak{G}$ ein $\pi_\varkappa$-Raum mit dem π-Skalarprodukt $[\cdot \mid \cdot]$ und $\mathfrak{X}$ eine nichtleere Menge.

Definition 2.1. *Es sei* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ *ein* $\pi_\varkappa$*-Raum. Ein* $\mathfrak{G}$*-Kern* K *wird einen reproduzierender Kern für* $\mathfrak{E}$ *genannt, falls folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1) *Für alle* $y \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$ *gehört die durch* $x \mapsto K(x,y)\, u$ *erklärte Abbildung* $K(\cdot,y)\, u : \mathfrak{X} \to \mathfrak{G}$ *zu* $\mathfrak{E}$.

2) *Für alle* $y \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$, $f \in \mathfrak{E}$ *hat* K *die reproduzierende Eigenschaft:*

$$[f(y) \mid u] = [f \mid K(\cdot,y)\, u]\,. \tag{2.1}$$

Wir bemerken, daß diese Definition z. B. auch dann sinnvoll bleibt, wenn $\mathfrak{E}$ nur ein Praepontrjaginraum ist.

Falls man als $\mathfrak{G}$ die komplexe Ebene $\boldsymbol{C}$ und als $\mathfrak{E}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $(\cdot \mid \cdot)$ wählt sowie $\mathfrak{B}(\boldsymbol{C})$ mit $\boldsymbol{C}$ identifiziert, erhält man die klassische Definition des Hilbertraumes mit einem reproduzierenden Kern. In diesem Fall hat die reproduzierende Eigenschaft (2.1) die Form

$$f(y) = (f \mid K(\cdot,y))\,.$$

Um die Eindeutigkeit von K und $\mathfrak{E}$ zu zeigen beweisen wir zuerst

Lemma 2.2. *Sei* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ *ein Pontrjaginraum mit einem reproduzierenden Kern* K. *Dann ist die Menge*

$$\mathfrak{F} := \{\, K(\cdot,y)\, u \mid y \in \mathfrak{X},\ u \in \mathfrak{G} \,\} \tag{2.2}$$

total in $\mathfrak{E}$, *d. h.*[3] a. l. H. $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}$.

[3]) Wir schreiben: l. H. := lineare Hülle; a. l. H. := abgeschlossene lineare Hülle.

Beweis. Gehört f zu $\mathfrak{F}^{\perp}$, so ergibt sich aus (2.1)

$$0 = [f \mid K(\cdot,y)\, u] = [f(y) \mid u]$$

für alle $y \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$. Demzufolge ist $f = 0$, d. h. $\mathfrak{F}$ ist total.

Satz 2.3. *Ein Praepontrjaginraum* $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ *hat höchstens einen reproduzierenden Kern.*

Falls umgekehrt K *ein reproduzierender Kern für zwei Pontrjaginräume ist, fallen diese Räume zusammen.*

Beweis. A. Falls $\mathfrak{E}$ die reproduzierenden Kerne K und K' hat, folgt aus (2.1)

$$[f \mid K(\cdot,y)\, u - K'(\cdot,y)\, u] = [f(y) \mid u] - [f(y) \mid u] = 0$$

für alle $f \in \mathfrak{E}$, $y \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$. Somit ist $K(\cdot,y)\, u = K'(\cdot,y)\, u$, also $K = K'$.

B. Sei nun K ein gemeinsamer reproduzierender Kern für Pontrjaginräume $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}'$. Dann ist aber nach Lemma 2.2 $\mathfrak{E} =$ a. l. H. $\mathfrak{F} = \mathfrak{E}'$, denn $\mathfrak{F}$ hängt nur von K ab.

Der reproduzierende Kern hat die folgende charakteristische Eigenschaft:

Satz 2.4. *Ist* $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ *ein* $\pi_{\varkappa}$*-Raum mit reproduzierendem Kern* K, *so ist* K *ein* $\mathfrak{G}$*-Kern mit höchstens* $\varkappa$ *negativen Quadraten.*

Später werden wir zeigen, daß dieser Satz sich umkehren läßt.

Beweis. Sind $x, y \in \mathfrak{X}$ und $u, v \in \mathfrak{G}$ beliebig, so erhalten wir aus (2.1)

$$\begin{aligned}[K(x,y)\, u \mid v] &= [K(\cdot,y)\, u \mid K(\cdot,x)\, v] = \overline{[K(\cdot,x)\, v \mid K(\cdot,y)\, u]} \\ &= \overline{[K(y,x)\, v \mid u]} = [u \mid K(y,x)\, v] = [K(y,x)^{+} u \mid v]\,.\end{aligned}$$

Somit ist $K(x,y) = K(y,x)^{+}$.

Sei nun $n \geq 1$ beliebig sowie $(u_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ und $(x_i)_{1 \leqq i \leqq n}$ beliebige endliche Folgen aus $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{X}$. Dann gilt

$$[K(x_i,x_j)\, u_j \mid u_i] = [K(\cdot,x_j)\, u_j \mid K(\cdot,x_i)\, u_i]\,.$$

Da die Elemente $K(\cdot,x_j)\, u_j$ in $\mathfrak{E}$ liegen und das π-Skalarprodukt $[\cdot \mid \cdot]$ von $\mathfrak{E}$ genau $\varkappa$ negative Quadrate hat, folgt daraus, daß K höchstens $\varkappa$ negative Quadrate hat.

2.2. Existenz eines reproduzierenden Kerns. Jetzt wird untersucht, wann ein Pontrjaginraum $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ einen reproduzierenden Kern hat.

Satz 2.5. *Es sei* $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ *ein Praepontrjaginraum. Für die Existenz eines reproduzierenden Kerns für* $\mathfrak{E}$ *ist notwendig, daß der durch*

$$\varphi_y(f) := f(y) \qquad (f \in \mathfrak{E}) \tag{2.3}$$

für beliebige $y \in \mathfrak{X}$ *definierte Operator* $\varphi : \mathfrak{E} \to \mathfrak{G}$ *schwach stetig ist.*

Falls insbesondere $\mathfrak{E}$ ein Pontrjaginraum ist, ist diese Bedingung auch hinreichend für die Existenz eines reproduzierenden Kerns.

Beweis. A. Sei zuerst $\mathfrak{E}$ ein Praepontrjaginraum mit reproduzierendem Kern K. Dann ist φ_y schwach stetig, weil aus (2.1) und (1.3)

$$|[\varphi_y(f) \mid u]| = |[f(y) \mid u]| = |[f \mid K(\cdot,y)\, u]| \leq \|f\|\, \|K(\cdot,y)\, u\| .$$

folgt.

B. Sei nun $\mathfrak{E}$ ein Pontrjaginraum. Da der Darstellungssatz von F. Riesz auch für das π-Skalarprodukt gültig ist (siehe [4], Lemma 2.1) und nach Voraussetzung $[\varphi_y(\cdot) \mid u]$ in $\mathcal{B}(\mathfrak{E};C)$ liegt, existiert für jedes $y \in \mathfrak{X}$ und $u \in \mathfrak{G}$ ein eindeutiges Element $K_y(u) \in \mathfrak{E}$, so daß die Beziehung

$$[\varphi_y(f) \mid u] = [f \mid K_y(u)] \tag{2.4}$$

für alle $f \in \mathfrak{E}$ besteht. Man verifiziert leicht, daß dann K_y in $\mathcal{B}(\mathfrak{G};\mathfrak{E})$ liegt. Demzufolge gibt es zu K_y einen π-adjungierten Operator $K_y^+ \in \mathcal{B}(\mathfrak{E};\mathfrak{G})$ derart, daß

$$[K_y^+ f \mid u] = [f \mid K_y\, u] \tag{2.5}$$

für alle $f \in \mathfrak{E}$, $u \in \mathfrak{G}$ gilt.

Wir definieren eine Abbildung $K : \mathfrak{X} \times \mathfrak{X} \to \mathcal{B}(\mathfrak{G})$ durch

$$K(x,y) := K_x^+ K_y$$

für alle x, $y \in \mathfrak{X}$ und zeigen, daß K ein reproduzierender Kern für $\mathfrak{E}$ ist.

Zuerst folgt aus (2.5), (2.4) und (2.3) für alle $x \in \mathfrak{X}$, $f \in \mathfrak{E}$, $u \in \mathfrak{G}$ die Relation

$$[K_x^+ f \mid u] = [f \mid K_x\, u] = [\varphi_x(f) \mid u] = [f(x) \mid u] , \tag{2.6}$$

also ist $K_x^+ f = f(x)$. Damit erhalten wir

$$K(x,y)\, u = K_x^+ (K_y\, u) = (K_y\, u)(x) . \tag{2.7}$$

Demzufolge liegt $K(\cdot,y)\, u = K_y\, u$ in $\mathfrak{E}$ für alle $y \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$.

Der $\mathfrak{G}$-Kern K hat auch die reproduzierende Eigenschaft (2.1), denn nach (2.6) und (2.7) gilt

$$[f(y) \mid u] = [K_y^+ f \mid u] = [f \mid K(\cdot,y)\, u] .$$

Somit ist der Satz bewiesen.

Folgerung 2.6. *Jeder abgeschlossene nichtentartete Teilraum eines Pontrjaginraumes $\mathfrak{E}$ mit dem reproduzierenden Kern hat auch einen reproduzierenden Kern.*

Sei nämlich $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}$ ein solcher Teilraum. Nach Satz 2.5 ist der in (2.3) erklärte Operator $\varphi_y : \mathfrak{E} \to \mathfrak{G}$ schwach stetig und deshalb ist auch die Einschränkung $\varphi_y|_{\mathfrak{E}_1}$ schwach stetig. Da $\mathfrak{E}_1$ ein Pontrjaginraum ist, folgt aus Satz 2.5 die Behauptung.

In diesem Fall können wir den π-orthogonalen Projektor auf $\mathfrak{E}_1$ ausrechnen:

Satz 2.7. *Sei* $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};G)$ *ein Pontrjaginraum und* $\mathfrak{E}_1 \subset \mathfrak{E}$ *ein nichtentarteter, abgeschlossener Teilraum mit reproduzierendem Kern* K_1. *Dann ist der durch*

$$[(P_1 f)(y) \mid u] = [f \mid K_1(\cdot,y)\, u] \tag{2.8}$$

für alle $f \in \mathfrak{E}$, $y \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$ *gegebene Operator* P_1 *der* π*-orthogonale Projektor von* $\mathfrak{E}$ *auf* $\mathfrak{E}_1$.

Beweis. Zuerst bemerken wir, daß Relation (2.8) den Operator P_1 eindeutig bestimmt.

Nach Vorraussetzung ist $\mathfrak{E}$ in der Form $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 \dotplus \mathfrak{E}_1^{\perp}$ darstellbar. Sei $f = f_1 + f_1^{\perp}$ die entsprechende Zerlegung von f aus $\mathfrak{E}$. Dann gilt für alle $y \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$

$$[(P_1 f)(y) \mid u] = [f \mid K_1(\cdot,y)\, u] = [f_1 \mid K_1(\cdot,y)\, u] = [f_1(y) \mid u],$$

denn $f_1^{\perp} \perp K_1(\cdot,y)\, u$. Also ist $P_1 f = f_1$.

Folgerung 2.8. *Seien* $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(X;\mathfrak{G})$ *ein Pontrjaginraum und* $\mathfrak{E}_i$, $i = 1, 2$, *zwei abgeschlossene nichtentartete Teilräume mit den reproduzierenden Kern* K_i, *so daß* $\mathfrak{E}$ *als die direkte und* π*-orthogonale Summe von* $\mathfrak{E}_1$ *und* $\mathfrak{E}_2$ *darstellbar ist. Dann hat* $\mathfrak{E}$ *den reproduzierenden Kern* $K := K_1 + K_2$.

Beweis. Es ist klar, daß $K(\cdot,y)\, u$ für alle $y \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$ zu $\mathfrak{E}$ gehört. Der Kern K hat aber auch die reproduzierende Eigenschaft, denn aus Satz 2.7 folgt

$$\begin{aligned} [f(y) \mid u] &= [((P_1 + P_2) f)(y) \mid u] \\ &= [f \mid K_1(\cdot,y)\, u] + [f \mid K_2(\cdot,y)\, u] = [f \mid K(\cdot,y)\, u] \end{aligned}$$

für alle $f \in \mathfrak{E}$, $y \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$; dabei bezeichnet P_i den π-orthogonalen Projektor von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{E}_i$, $i = 1, 2$.

2.3. Konvergenz und Separabilität.

Zuerst werden wir untersuchen, wie die Konvergenzen in $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{G}$ voneinander abhängen.

Satz 2.9. *Es sei* $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ *ein Praepontrjaginraum mit dem reproduzierenden Kern* K. *Wenn eine Folge* (f_n) *in* $\mathfrak{E}$ *schwach gegen* $f \in \mathfrak{E}$ *konvergiert, so konvergiert die Folge* $(f_n(x))$ *für jedes* $x \in \mathfrak{X}$ *schwach gegen* $f(x)$.

Aus der reproduzierenden Eigenschaft folgt nämlich für alle $x \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$

$$[f_n(x) \mid u] = [f_n \mid K(\cdot,x)\, u] \rightharpoonup [f \mid K(\cdot,x)\, u] = [f(x) \mid u]\,,$$

d. h. $f_n(x) \rightharpoonup f(x)$ für jedes $x \in \mathfrak{X}$.

Dieser Satz läßt sich partiell umkehren:

Satz 2.10. *Es sei $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ ein Pontrjaginraum mit reproduzierendem Kern. Wenn eine beschränkte Folge (f_n) in $\mathfrak{E}$ so gegeben ist, daß $f_n(x) \rightharpoonup f(x)$ für alle $x \in \mathfrak{X}$ mit $f \in \mathfrak{E}$ gilt, so konvergiert die Folge (f_n) in $\mathfrak{E}$ schwach gegen f.*

In der Tat, für alle $x \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$ gilt

$$[f_n \mid K(\cdot,x)\, u] = [f_n(x) \mid u] \rightharpoonup [f(x) \mid u] = [f \mid K(\cdot,x)\, u]\,.$$

Nach Lemma 2.2. ist aber die Menge $\{ K(\cdot,x)\, u \mid x \in \mathfrak{X}\,,\ u \in \mathfrak{G} \}$ total in $\mathfrak{E}$. Da die Folge (f_n) beschränkt ist, folgt daraus die Behauptung.

Um die Separabilität von $\mathfrak{E}$ zu untersuchen setzen wir jetzt voraus, daß $\mathfrak{X}$ ein *separabler topologischer Raum* ist.

Satz 2.11. *Es sei $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ ein Pontrjaginraum mit reproduzierendem Kern K, und seien die Elemente von $\mathfrak{E}$ schwach stetig. Ist $\mathfrak{G}$ separabel, so ist auch $\mathfrak{E}$ separabel.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es abzählbare Mengen $\mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{G}$ so, daß $\mathfrak{Y}$ bzw. $\mathfrak{H}$ dicht in $\mathfrak{X}$ bzw. in $\mathfrak{G}$ liegt.

Wir beweisen, daß die abzählbare Menge

$$\mathfrak{F}_{\mathfrak{Y},\mathfrak{H}} := \{K(\cdot,y)\, u \mid y \in \mathfrak{Y}\,,\ u \in \mathfrak{H}\}$$

total in $\mathfrak{E}$ ist. Gehört nämlich $f \in \mathfrak{E}$ zu $\mathfrak{F}_{\mathfrak{Y},\mathfrak{H}}$, so folgt aus der reproduzierenden Eigenschaft

$$0 = [f \mid K(\cdot,y)\, u] = [f(y) \mid u]$$

für alle $y \in \mathfrak{Y}$, $u \in \mathfrak{H}$. Somit ist $f|_{\mathfrak{Y}} = 0$. Andererseits ist f stetig und $\mathfrak{G}$ ein Hausdorffscher Raum bezüglich der schwachen Topologie. Demzufolge gilt notwendig $f = 0$.

Also ist $\mathfrak{E}$ separabel.

3. Vervollständigung der Pontrjaginräume und induzierte Räume

3.1. Vervollständigung. Es sei wieder $\mathfrak{X}$ eine nichtleere Menge und $\mathfrak{G}$ ein Pontrjaginraum.

Wir wollen jetzt untersuchen, wann ein Praepontrjaginraum $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ sich zu einem Pontrjaginraum $\hat{\mathfrak{E}}$ in der Weise vervollständigen läßt, daß auch $\hat{\mathfrak{E}}$ eine Teilmenge von $\mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ ist.

Satz 3.1. *Es sei $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ ein Praepontrjaginraum. Für die Existenz eines den Raum $\mathfrak{E}$ als eine dichte Untermenge enthaltenden*

Pontrjaginraumes $\hat{\mathfrak{E}} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ *mit reproduzierendem Kern ist notwendig und hinreichend, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

1) *Für jedes* $y \in \mathfrak{X}$ *ist der Operator* $f \mapsto f(y)$ *von* $\mathfrak{E}$ *in* $\mathfrak{G}$ *schwach stetig.*

2) *Für jede Cauchyfolge* (f_n) *in* $\mathfrak{E}$ *mit det Eigenschaft* $f_n(y) \rightharpoondown 0$ *für alle* $y \in \mathfrak{X}$ *gilt* $[f_n \mid f_n] \to 0$.

Die Vervollständigung $\hat{\mathfrak{E}}$ *ist eindeutig.*

Beweis. A. Wir zeigen zuerst die Notwendigkeit. Aus Satz 2.5 folgt, daß 1) erfüllt ist. Sei nun (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathfrak{E}$ mit $f_n(y) \rightharpoonup 0$ für jedes $y \in \mathfrak{X}$. Dann hat diese Folge einen Grenzwert f in $\hat{\mathfrak{E}}$. Nach Voraussetzung und Satz 2.9 gelten für alle $y \in \mathfrak{X}$ die Beziehungen $f_n(y) \rightharpoondown 0$ und $f_n(y) \rightharpoonup f(y)$, also ist $f = 0$. Daraus folgt 2).

B. Um die Hinlänglichkeit zu zeigen stellen wir $\mathfrak{E}$ in der Form

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_+ \dotplus \mathfrak{E}_- \qquad (\dim \mathfrak{E}_- < \infty)$$

dar und vervollständigen den Praehilbertraum $\mathfrak{E}_+$ zu einem Hilbertraum, der von Abbildungen gebildet ist.

Zu diesem Zweck definieren wir $\hat{\mathfrak{E}}_+$ als den linearen Raum aller Abbildungen $f \in \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$, für die je eine Cauchyfolge (f_n) in $\mathfrak{E}_+$ mit $f_n(x) \rightharpoonup f(x)$ für jedes $x \in \mathfrak{X}$ existiert.

Man kann eine Norm auf $\hat{\mathfrak{E}}_+$ durch

$$\|f\|^\wedge := \lim_{n\to\infty} \|f_n\|$$

erklären, wobei (f_n) eine zu $f \in \hat{\mathfrak{E}}_+$ gehörige Cauchyfolge in $\mathfrak{E}_+$ ist.

Wir zeigen, daß diese Definition sinnvoll ist. Weil (f_n) eine Cauchyfolge ist, existiert der Grenzwert in $\boldsymbol{R}$. Ferner sei (f_n') eine andere Cauchyfolge in $\mathfrak{E}_+$ mit $f_n(x) \rightharpoonup f(x)$. Dann ist $(f_n - f_n')$ eine Cauchyfolge in $\mathfrak{E}_+$ mit $(f_n - f_n')(x) \rightharpoonup 0$. Aus 2) folgt, daß $[f_n - f_n' \mid f_n - f_n'] \to 0$ also $f_n - f_n' \to 0$ gilt. Demnach erhalten wir

$$\left| \lim_{n\to\infty} \|f_n\| - \lim_{n\to\infty} \|f_n'\| \right| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_n'\| = 0 ,$$

d. h. $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n'\|$.

Von den Normeigenschaften von $\|\cdot\|^\wedge$ wird hier nur die positive Definitheit verifiziert; die anderen sind offensichtlich. Sei zuerst $f = 0$ in $\hat{\mathfrak{E}}_+$. Dann gibt es eine Cauchyfolge (f_n) in $\mathfrak{E}_+$ mit $f_n(x) \rightharpoonup 0$. Aus 2) folgt

$$\|f\|^{\wedge 2} = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} [f_n \mid f_n] = 0 ,$$

also $\|f\|^\wedge = 0$. Sei umgekehrt $\|f\|' = 0$ für $f \in \hat{\mathfrak{E}}_+$ und (f_n) eine entsprechende Cauchyfolge in $\mathfrak{E}_+$ mit $f_n(x) \rightharpoonup 0$. Nach 1) gibt es eine Konstante $M_{x,u} > 0$ mit der Eigenschaft

$$|[f_n(x) \mid u]| \leq M_{x,u} \|f_n\| \tag{3.1}$$

für alle $x \in \mathfrak{X}$, $u \in \mathfrak{G}$. Demnach gilt

$$|[f(x) \mid u]| = \lim_{n\to\infty} |[f_n(x) \mid u]| \leq M_{x,u} \lim_{n\to\infty} \|f_n\| = M_{x,u} \|f\|^{\wedge} = 0 .$$

Somit ist $f = 0$.

Der Raum $\mathfrak{E}_+$ ist in $\hat{\mathfrak{E}}_+$ enthalten, denn für $f \in \mathfrak{E}_+$ ist die Folge (f_n) mit $f_n := f$ eine Cauchyfolge, die die Eigenschaft $f_n(x) \rightharpoonup f(x)$ hat. Außerdem gilt $\|f\|^{\wedge} = \|f\|$. Der Raum $\mathfrak{E}_+$ liegt sogar dicht in $\hat{\mathfrak{E}}_+$. Ist nämlich f in $\hat{\mathfrak{E}}_+$, so gibt es eine Cauchyfolge (f_n) in $\mathfrak{E}_+$ mit $\|f\|^{\wedge} = \lim\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$. Dann hat man

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|^{\wedge} = \lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} \|f_m - f_n\|) = 0 .$$

Wir beweisen nun, daß $\hat{\mathfrak{E}}_+$ vollständig ist. Dazu sei (f_n) eine beliebige Cauchyfolge in $\hat{\mathfrak{E}}_+$. Dann kann man eine Cauchyfolge (f_n') in $\mathfrak{E}_+$ so finden, daß

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f_n'\|^{\wedge} = 0 \tag{3.2}$$

gilt, denn $\mathfrak{E}_+$ liegt dicht in $\hat{\mathfrak{E}}_+$. Nach (3.1) ist $(f_n(x))$ für jedes $x \in \mathfrak{X}$ eine schwache Cauchyfolge in $\mathfrak{G}$. Da $\mathfrak{G}$ auch schwach vollständig ist, existiert für jedes $x \in \mathfrak{X}$ ein Element $f(x) \in \mathfrak{G}$ mit $f_n(x) \rightharpoonup f(x)$. Man sieht unmittelbar, daß die Abbildung f zu $\hat{\mathfrak{E}}_+$ gehört und $f_n \to f$ gilt. In der Tat, aus (3.2) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|^{\wedge} \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_n'\|^{\wedge} + \lim_{n\to\infty} \|f_n' - f\|^{\wedge} = \lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} \|f_n' - f_m\|) = 0 .$$

Für $f , g \in \hat{\mathfrak{E}}_+$ definieren wir

$$[f \mid g]_+^{\wedge} := \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} [f_n \mid g_m] ,$$

wobei (f_n) (bzw. (g_n)) eine zu f (bzw. g) gehörende Cauchyfolge in $\mathfrak{E}_+$ ist. Es ist leicht zu verifizieren, daß die Abbildung $(f,g) \mapsto [f \mid g]_+^{\wedge}$ von $\hat{\mathfrak{E}}_+ \times \hat{\mathfrak{E}}_+$ in $\boldsymbol{C}$ eine wohl definierte hermitesche Form ist, für die

$$[f \mid f]_+^{\wedge} = \|f\|^{\wedge 2}$$

gilt. Also ist $\hat{\mathfrak{E}}_+$ ein Hilbertraum.

Wir bilden die direkte Summe $\hat{\mathfrak{E}} := \hat{\mathfrak{E}}_+ \dotplus \mathfrak{E}_-$ und setzen

$$[f \mid g]^\wedge := [f_+ \mid g_+]^\wedge_+ + [f_- \mid g_-]$$

für $f, g \in \hat{\mathfrak{E}}$, wobei f_+, g_+ (bzw. f_-, g_-) die Komponenten der Elemente f, g in $\hat{\mathfrak{E}}_+$ (bzw. $\mathfrak{E}_-$) sind. Dann bildet $\hat{\mathfrak{E}} \supset \mathfrak{E}$ den gewünschten Pontrjaginraum, in dem $\mathfrak{E}$ dicht liegt. Aus (3.1) und Satz 2.5 schließt man weiter, daß der Raum $\hat{\mathfrak{E}}$ einen reproduzierenden Kern hat.

C. Um die Eindeutigkeit der Vervollständigung von $\mathfrak{E}$ zu beweisen, nehmen wir die Existenz einer anderen solchen Vervollständigung $\tilde{\mathfrak{E}}$ von $\mathfrak{E}$ an. Gehört ein Element f zu $\tilde{\mathfrak{E}}$, so ist f der Grenzwert einer Cauchyfolge (f_n) in $\mathfrak{E}$. Nach Satz 2.9 gilt dann $f_n(x) \rightharpoonup f(x)$, also liegt f in $\hat{\mathfrak{E}}$. Falls umgekehrt f in $\hat{\mathfrak{E}}$ ist, gibt es eine Cauchyfolge (f_n) in $\mathfrak{E}$ mit $f_n(x) \rightharpoonup f(x)$. Dann hat diese Folge einen Grenzwert f' in $\tilde{\mathfrak{E}}$. Aus Satz 2.9 folgt, daß $f' = f$ ist. Somit gilt $\hat{\mathfrak{E}} = \tilde{\mathfrak{E}}$ und die π-Skalarprodukte von $\hat{\mathfrak{E}}$ und $\tilde{\mathfrak{E}}$ müssen auch übereinstimmen, da $\mathfrak{E}$ dicht sowohl in $\hat{\mathfrak{E}}$ als auch in $\tilde{\mathfrak{E}}$ liegt.

Folgerung 3.2. *Es sei $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ ein Praepontrjaginraum mit reproduzierendem Kern K. Ein $\mathfrak{E}$ umfassender Pontrjaginraum $\hat{\mathfrak{E}}$ mit reproduzierendem Kern K existiert genau dann, wenn Bedingung 2) aus Satz 3.1 erfüllt ist.*

Der Beweis der Notwendigkeit von 2) verläuft genau so wie Teil A des Beweises von Satz 3.1.

Umgekehrt folgt aus Satz 2.5, daß Bedingung 1) von Satz 3.1 erfüllt ist. Demnach existiert ein $\mathfrak{E}$ umfassender Pontrjaginraum $\hat{\mathfrak{E}}$ mit reproduzierendem Kern K'. Da $\mathfrak{E}$ dicht in $\hat{\mathfrak{E}}$ liegt, müssen die Kerne K und K' übereinstimmen.

Es sei noch vermerkt, daß die Räume $\mathfrak{E}$ und $\hat{\mathfrak{E}}$ in Satz 3.1 und Folgerung 3.2 die *gleiche* Anzahl negativer Quadrate haben.

3.2. Induzierte Räume. Es sei wieder $\mathfrak{X}$ eine nichtleere Menge und $\mathfrak{G}$ ein Pontrjaginraum. Wir zeigen nun, daß Satz 2.4 sich folgendermaßen umkehren läßt:

Satz 3.3. *Ist K ein $\mathfrak{G}$-Kern auf $\mathfrak{X}$, der $\varkappa$ negative Quadrate hat, dann existiert ein $\pi_\varkappa$-Raum $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ mit reproduzierendem Kern K. Genauer, der Raum $\mathfrak{E}$ ist die Vervollständigung der Praepontrjaginraumes $\mathfrak{L}$, der alle Abbildungen $f: \mathfrak{X} \to \mathfrak{G}$ der Form*

$$f = \sum_{i=1}^{m} K(\cdot, y_i)\, u_i \tag{3.3}$$

mit $y_i \in \mathfrak{X}$ und $u_i \in \mathfrak{G}$ enthält; das π-Skalarprodukt von $\mathfrak{L}$ ist durch

(3.4) $$[f \mid g] := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [K(z_j,y_i)\, u_i \mid v_j]$$

gegeben für f *und*

(3.5) $$g := \sum_{j=1}^{n} K(\cdot,z_j)\, v_j \, .$$

Beweis. Es ist klar, daß die oben definierte Menge $\mathfrak{L}$ einen komplexen linearen Raum bildet. Die für $f, g \in \mathfrak{L}$ gültigen Beziehungen

(3.6) $$[f \mid g] = \sum_{j=1}^{n} [f(z_j) \mid v_j] = \sum_{i=1}^{m} [u_i \mid g(y_i)]$$

zeigen, daß $[f \mid g]$ unabhängig von der Darstellung von f bzw. g ist. Die Abbildung $[\cdot \mid \cdot] : \mathfrak{L} \times \mathfrak{L} \to \boldsymbol{C}$, die offensichtlich eine hermitesche Form ist, hat nach Voraussetzung genau $\varkappa$ negative Quadrate auf $\mathfrak{L}$. Sie ist auch nichtentartet, denn aus $[f \mid g] = 0$ für alle $g \in \mathfrak{L}$ folgt nach (3.6)

$$0 = [f \mid K(\cdot,y)\, u] = [f(y) \mid u]$$

für alle $y \in \mathfrak{X}$ und $u \in \mathfrak{G}$, also $f = 0$.

Somit bildet $\mathfrak{L}$ einen Praepontrjaginraum, der nach (3.6) den reproduzierenden Kern K hat. Wir zeigen noch, daß Bedingung 2) von Satz 3.1 erfüllt ist. Dazu sei (f_k) eine Cauchyfolge in $\mathfrak{L}$ mit der Eigenschaft $f_k(y) \to 0$ für alle $y \in \mathfrak{X}$. Mit Hilfe von (3.6) erhalten wir

(3.7) $$[f_k \mid g] = \sum_{j=1}^{n} [f_k(z_j) \mid v_j] \to 0$$

für alle $g \in \mathfrak{L}$. Als Cauchyfolge ist (f_k) beschränkt, d.h. $\|f_k\| \leq M$, und somit ergibt sich weiter

$$|[f_k \mid f_k]| \leq |[f_l \mid f_k]| + |[f_k - f_l \mid f_k]| \leq |[f_l \mid f_k]| + M \|f_k - f_l\| \, .$$

Aus (3.7) und dieser Beziehung folgt die Relation $[f_k \mid f_k] \to 0$.

Nach Folgerung 3.2 ist Satz 3.3 damit bewiesen.

Wir bemerken noch, daß Satz 3.3 in [7] — [10] für verschiedene spezielle Kerne sogar im Pontrjaginraum bewiesen ist.

4. π-unitäre Darstellungen von Gruppen

4.1. Definitionen. Als erste Anwendung der obigen Resultate untersuchen wir Darstellungen von Gruppen in einem Pontrjaginraum. Zuerst geben wir einige Definitionen.

Eine Menge $\mathfrak{X}$ heißt eine **-Halbgruppe*, wenn in $\mathfrak{X}$ eine assoziative Komposition $(x,y) \mapsto x\,y$ und ein Einselement e sowie eine Involution $x \mapsto x^*$ gegeben sind, d. h. für alle $x\,,y\,,z \in \mathfrak{X}$ gelten die folgenden Relationen

1) $x\,(y\,z) = (x\,y)\,z =: x\,y\,z\,;$
2) $x\,e = e\,x = x\,;$
3) $e^* = e\,,\ x^{**} = x$ und $(x\,y)^* = y^*\,x^*\,.$

Offenbar ist jede Gruppe eine *-Halbgruppe, wenn man nur $x^* := x^{-1}$ setzt.

Unter einer *Darstellung der *-Halbgruppe $\mathfrak{X}$ in einem Pontrjaginraum $\mathfrak{G}$* versteht man eine Abbildung $U : \mathfrak{X} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ mit den Eigenschaften

$$(4.1)\qquad U(e) = I\,,\quad U(x\,y) = U(x)\,U(y)\,,\quad U(x^*) = U(x)^+$$

für alle $x\,,y \in \mathfrak{X}$.

Die Darstellung U einer *-Halbgruppe $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{G}$ heißt *bis auf eine Isomorphie eindeutig bestimmt*, falls für jede andere Darstellung U' von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{G}'$ ein π-isometrischer Operator $V \in \mathfrak{B}(\mathfrak{G}';\mathfrak{G})$ mit $U'(y) = V^{-1}\,U(y)\,V$ für alle $y \in \mathfrak{X}$ existiert.

Ist insbesondere $\mathfrak{X}$ eine Gruppe (mit $x^* = x^{-1}$), so besteht die Darstellung U aus π-unitären Operatoren. In diesem Fall spricht man von einer *π-unitären Darstellung*.

4.2. Darstellungen von *-Halbgruppen. In diesem Abschnitt sei $\mathfrak{X}$ stets eine *-Halbgruppe und $\mathfrak{G}$ ein $\pi_\varkappa$-Raum. Die folgenden zwei Sätze verallgemeinern einige Resultate von B. Sz.-Nagy aus [16].

Satz 4.1. *Sei U eine Darstellung der *-Halbgruppe $\mathfrak{X}$ in einem $\mathfrak{G}$ umfassenden $\pi_\varkappa$-Raum $\mathfrak{E}$ und T die durch*

$$T(x) := P_{\mathfrak{G}}\,U(x)|_{\mathfrak{G}}$$

für alle $x \in \mathfrak{X}$ definierte Abbildung, wobei $P_{\mathfrak{E}}$ der π-orthogonale Projektor von $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{G}$ ist. Dann gilt:

1) *$T(e) = I$ und $T(x^*) = T(x)^+$ für alle $x \in \mathfrak{X}$.*
2) *Der durch*

$$(4.2)\qquad K(x,y) := T(x^*\,y) \qquad (\,x\,,y \in \mathfrak{X}\,)$$

definierte $\mathfrak{G}$-Kern auf $\mathfrak{X}$ hat höchstens $\varkappa$ negative Quadrate.

3) *Für alle z und $(x_i)_{1\leqq i\leqq n}$ in $\mathfrak{X}$ sowie alle $(u_i)_{1\leqq i\leqq n}$ in $\mathfrak{G}$ gilt*

$$(4.3)\qquad \left|\sum_{i,j=1}^{n}[K(z\,x_i\,,z\,x_j)\,u_j\mid u_i]\right| \leq \|U(z)\|^2\left\|\sum_{i=1}^{n}U(x_i)\,u_i\right\|^2.$$

In der Tat, aus den Definitionen folgen unmittelbar die Eigenschaften

1) und 2). Relation (4.3) erhält man aus (4.2), (4.1) und (1.3) folgendermaßen:

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}[K(z\,x_i\,,z\,x_j)\,u_j\mid u_i]\right| = \left|\sum_{i,j=1}^{n}[U(x_i)^{+}\,U(z)^{+}\,U(z)\,U(x_j)\,u_j\mid u_i]\right|$$

$$= |[U(z)f\mid U(z)f]| \leq \|U(z)\|^2\,\|f\|^2$$

mit

$$f := \sum_{i=1}^{n} U(x_i)\,u_i \in \mathfrak{G}\,.$$

Satz 4.1 läßt sich umkehren:

Satz 4.2. *Es sei* $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ *eine Abbildung mit den Eigenschaften:*

1) $T(e) = I$ *und* $T(x^*) = T(x)^+$ *für alle* $x \in \mathfrak{X}$.

2) *Der* $\mathfrak{G}$*-Kern* $(x,y) \mapsto K(x,y) := T(x^*\,y)$ *auf* $\mathfrak{X}$ *hat genau* $\varkappa$ *negative Quadrate.*

3) *Für alle* z *und* $(x_i)_{1\leqq i\leqq n}$ *in* $\mathfrak{X}$ *sowie alle* $(u_i)_{1\leqq i\leqq n}$ in $\mathfrak{G}$ *gilt*

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n}[K(z\,x_i\,,z\,x_j)\,u_j\mid u_i]\right| \leq M_z\cdot\left|\sum_{i,j=1}^{n}[K(x_i,x_j)\,u_j\mid u_i]\right| \tag{4.4}$$

mit einer Konstante $M_z > 0$.

Dann existiert ein $\mathfrak{G}$ *umfassender* $\pi_\varkappa$*-Raum* $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ *mit dem reproduzierenden Kern* K *und eine Darstellung* U *von* $\mathfrak{X}$ *in* $\mathfrak{E}$ *derart, daß für alle* $x \in \mathfrak{X}$ *gilt*

$$T(x) = P_{\mathfrak{G}}\,U(x)|_{\mathfrak{G}}\,, \tag{4.5}$$

wobei $P_{\mathfrak{G}}$ *den* π*-orthogonalen Projektor von* $\mathfrak{E}$ *auf* $\mathfrak{G}$ *bezeichnet. Für* $\mathfrak{E}$ *gilt weiter*

$$\mathfrak{E} = \text{a. l. H.}\,\{\,U(y)\,u \mid y \in \mathfrak{X}\,,\ u \in \mathfrak{G}\,\}\,. \tag{4.6}$$

Wenn $\mathfrak{E}$ *und* U *diese Bedingungen erfüllen, ist die Darstellung bis auf eine Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Nach Satz 3.3 existiert ein $\pi_\varkappa$-Raum $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ mit reproduzierendem Kern K. Wir können $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{E}$ durch $u \mapsto K(\cdot,e)\,u$ einbetten, den es gilt $[K(\cdot,e)\,u \mid K(\cdot,e)\,v] = [u \mid v]$ für alle $u\,,v \in \mathfrak{G}$.

Bei beliebiger Wahl von $f = \sum_{i=1}^{m} K(\cdot,y_i)\,u_i$ aus der in Satz 3.3 definierten Menge $\mathfrak{L}$ und von $y \in \mathfrak{X}$ setzen wir

$$(U(y)\,f\,)\,(x) := \sum_{i=1}^{m} K(y^*\,x\,,y_i)\,u_i = f(y^*\,x)$$

für alle $x \in \mathfrak{X}$. Dann sieht man leicht, daß $U(y)$ ein Operator auf $\mathfrak{L}$ ist und

$$U(y) f = \sum_{i=1}^{m} K(\cdot\,, y\, y_i)\, u_i \tag{4.7}$$

gilt.

Für alle $y\,, z \in \mathfrak{X}$ sowie f und g aus $\mathfrak{L}$ (mit den Darstellungen (3.3) bzw. (3.5)) gelten

$$U(e) f = \sum_{i=1}^{m} K(\cdot\,, e\, y_i)\, u_i = f\,, \tag{4.8}$$

$$U(y)\, U(z) f = \sum_{i=1}^{m} U(y)\, (K(\cdot\,, z\, y_i)\, u_i) = \sum_{i=1}^{m} K(\cdot\,, y\, z\, y_i)\, u_i = U(y\, z) f \tag{4.9}$$

und

$$\begin{aligned}[U(y) f \mid g] &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [K(z_j\,, y\, y_i)\, u_i \mid v_j] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} [K(y^*\, z_j\,, y_i)\, u_i \mid v_j] \\ &= \left[f \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} K(\cdot\,, y^*\, z_j)\, v_j \right] = [f \mid U(y^*)\, g]\,.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Wir zeigen, daß der Operator $U(y)$ in $\mathfrak{E}$ stetig ist. Für $f\,, g \in \mathfrak{L}$ mit $f \to 0$ erhalten wir nach (4.10)

$$[U(y) f \mid g] = [f \mid U(y^*)\, g] \to 0$$

und auf Grund von (4.10), (4.9), (4.4)

$$\begin{aligned}|[U(y) f \mid U(y) f]| &= |[U(y^*\, y) f \mid f]| = \left| \sum_{i,j=1}^{m} [K(y^*\, y\, y_i\,, y_j)\, u_j \mid u_i] \right| \\ &= \left| \sum_{i,j=1}^{m} [K(y\, y_i\,, y\, y_j)\, u_j \mid u_i] \right| \le M_y \left| \sum_{i,j=1}^{m} [K(y_i\,, y_j)\, u_j \mid u_i] \right| \\ &= M_y\, |[f \mid f]| \to 0\,.\end{aligned}$$

Somit ist $U(y)$ stetig und läßt sich also stetig auf $\mathfrak{E}$ fortsetzen, denn $\mathfrak{L}$ liegt dicht in $\mathfrak{E}$. Diese Fortsetzung, die wir auch mit $U(y)$ bezeichnen, besitzt offensichtlich die Eigenschaften (4.8)—(4.10) für alle $f\,, g$ aus $\mathfrak{E}$, d. h. $U : \mathfrak{X} \to \mathcal{B}(\mathfrak{E})$ ist eine Darstellung von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{E}$.

Betrachten wir zwei Elemente $u\,, v$ von $\mathfrak{G}$ und die zugehörigen Elemente $K(\cdot,e)\, u$, $K(\cdot,e)\, v$ von $\mathfrak{L}$, so gilt

$$\begin{aligned}[U(y)\, u \mid v] &= [U(y)\, (K(\cdot,e)\, u) \mid K(\cdot,e)\, v] = [K(\cdot,y)\, u \mid K(\cdot,e)\, v] \\ &= [K(e^*\,, y)\, u \mid v] = [T(y)\, u \mid v]\,,\end{aligned}$$

also (4.5).

Gehört f zu $\mathfrak{L}$, so hat man nach (4.7)

$$f = \sum_{i=1}^{m} K(\cdot,y_i)\, u_i = \sum_{i=1}^{m} U(y_i)\, (K(\cdot,e)\, u_i) = \sum_{i=1}^{m} U(y_i)\, u_i\,.$$

Da $\mathfrak{L}$ dicht in $\mathfrak{E}$ liegt, folgt hieraus Relation (4.6).

Um die Eindeutigkeit der Darstellung zu beweisen, nehmen wir an, daß U' eine andere Darstellung von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{E}'$ mit den in Satz 4.2 genannten Eigenschaften ist. Zwischen den Mengen $\mathfrak{L}' := \text{l. H.}\ \{\, U'(y)\, u \mid y \in \mathfrak{X}\,,\ u \in \mathfrak{G}' \,\}$ und $\mathfrak{L} = \text{l. H.}\ \{\, U(y)\, u \mid y \in \mathfrak{X}\,,\ u \in \mathfrak{G} \,\}$ definieren wir eine Abbildung V durch

$$V f' := V\Big(\sum_{i=1}^{m} U'(y_i)\, u_i\Big) := f := \sum_{i=1}^{m} U(y_i)\, u_i\,.$$

Dann ist V π-isometrisch:

$$\begin{aligned}[V f' \mid V f'] &= \sum_{i,j=1}^{m} [U(y_i)\,(K(\cdot,e)\, u_i) \mid U(y_j)\,(K(\cdot,e)\, u_j)] \\ &= \sum_{i,j=1}^{m} [K(y_j,y_i)\, u_i \mid u_j] = [f \mid f]\,.\end{aligned}$$

Mann sieht leicht, daß $V : \mathfrak{L}' \to \mathfrak{L}$ bijektiv ist. Demzufolge läßt V sich stetig und π-isometrisch auf $\mathfrak{E}'$ fortsetzen, denn $\mathfrak{L}'$ (bzw. $\mathfrak{L}$) liegt dicht in $\mathfrak{E}'$ (bzw. $\mathfrak{E}$). Für $f' \in \mathfrak{L}'$ gilt weiter

$$\begin{aligned}V^{-1}\, U(y)\, V f' &= V^{-1}\, U(y) f = V^{-1}\Big(\sum_{i=1}^{m} U(y\, y_i)\, u_i\Big) \\ &= \sum_{i=1}^{m} U'(y\, y_i)\, u_i = U'(y) f'\,,\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

4.3. Darstellungen von Gruppen. Wie in 4.2 sei $\mathfrak{G}$ ein $\pi_\varkappa$-Raum. Weiter setzen wir voraus, daß $\mathfrak{X}$ eine *Gruppe* ist. Das folgende Resultat ist eine Verallgemeinerung von Theorem 1 aus [12], S. 401.

Satz 4.3. *Jeder π-unitären Darstellung U der Gruppe $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{G}$ entspricht ein $\mathfrak{G}$-Kern K auf $\mathfrak{X}$ mit den Eigenschaften*

1) *K hat genau $\varkappa$ negative Quadrate;*

2) *K ist linksinvariant, d. h. für alle $x\,, y\,, z \in \mathfrak{X}$ gilt*

$$K(z\, x\,, z\, y) = K(x,y) \tag{4.11}$$

und

3) $K(e,e) = I$.

Umgekehrt entspricht jedem $\mathfrak{G}$-Kern K auf $\mathfrak{X}$ mit den Eigenschaften 1)—3) eine π-unitäre Darstellung U von $\mathfrak{X}$ in einem $\mathfrak{G}$ umfassenden $\pi_\varkappa$-Raum $\mathfrak{E}$.

Diese Zuordnung ist durch

$$(4.12) \qquad K(x,y) = U(x^{-1}y)$$

für alle $x, y \in \mathfrak{X}$ *gegeben.*

Beweis. A. Wenn $\mathfrak{X}$ eine π-unitäre Darstellung U in $\mathfrak{G}$ hat, so besitzt offensichtlich der durch (4.12) definierte $\mathfrak{G}$-Kern K die Eigenschaften 1)—3).

B. Es sei nun ein $\mathfrak{G}$-Kern K mit den Eigenschaften 1)—3) gegeben. Nach Satz 3.3 existiert dann ein $\pi_\varkappa$-Raum $\mathfrak{E} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{X};\mathfrak{G})$ mit reproduzierendem Kern K. Wie im Beweis von Satz 4.2 betten wir $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{E}$ durch $u \mapsto K(\cdot,e)\,u$ ein und definieren auf dem Teilraum $\mathfrak{L}$ aller Abbildungen $f : \mathfrak{X} \to \mathfrak{G}$ der Form

$$f = \sum_{i=1}^{m} K(\cdot,y_i)\,u_i$$

einen Operator $U(y)$ durch (4.7). Für $U(y)$ gelten dann die Beziehungen (4.8)—(4.10).

Wir zeigen noch, daß $U(y)$ π-isometrisch ist. Aus (4.11) folgt für $f, g \in \mathfrak{L}$

$$[U(y)f \mid U(y)\,g] = \left[\sum_{i=1}^{m} K(\cdot\,, y\,y_i)\,u_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} K(\cdot\,, y\,z_j)\,u_j\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} [K(y\,z_j\,, y\,y_i)\,u_i \mid v_j] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} [K(z_j,y_i)\,u_i \mid v_j] = [f \mid g]\,.$$

Wir können also $U(y)$ zu einem π-unitären Operator in $\mathcal{B}(\mathfrak{E})$ fortsetzen, denn $\mathfrak{L}$ liegt dicht in $\mathfrak{E}$. Demzufolge ist $U : \mathfrak{X} \to \mathcal{B}(\mathfrak{E})$ eine π-unitäre Darstellung.

Aus (4.11) folgt für alle $x, y \in \mathfrak{X}$ und $u, v \in \mathfrak{G}$

$$[U(x^{-1}y)\,u \mid v] = [K(\cdot\,, x^{-1}y)\,u \mid K(\cdot,e)\,v]$$

$$= [K(x^{-1}x\,, x^{-1}y)\,u \mid v] = [K(x,y)\,u \mid v]\,,$$

also gilt (4.12).

Folgerung 4.4. *Es sei* $T : \mathfrak{X} \to \mathcal{B}(\mathfrak{G})$ *eine Abbildung mit* $T(e) = I$ *und* $T(x^{-1}) = T(x)^+$ *für alle* $x \in \mathfrak{X}$.

Hat der durch

$$K(x,y) := T(x^{-1}y)$$

für alle $x, y \in \mathfrak{X}$ *definierte* $\mathfrak{G}$*-Kern* K *auf* $\mathfrak{X}$ *genau* $\varkappa$ *negative Quadrate, so existieren ein* $\mathfrak{G}$ *umfassender* $\pi_\varkappa$*-Raum* $\mathfrak{E}$ *mit dem reproduzierenden Kern* K *und eine* π*-unitäre Darstellung* U *von* $\mathfrak{X}$ *in* $\mathfrak{E}$ *mit*

$$(4.13) \qquad T(x) = P_{\mathfrak{G}}\,U(x)\,|_{\mathfrak{G}} \qquad (x \in X)$$

und

$$(4.14) \qquad \mathfrak{E} = \text{a. l. H.}\,\{\,U(x)\,u \mid x \in \mathfrak{X}\,,\ u \in \mathfrak{G}\,\}\,.$$

Diese Darstellung ist bis auf eine Isomorphie eindeutig bestimmt.

In der Tat, der $\mathfrak{G}$-Kern K erfüllt offensichtlich die Bedingungen 1)—3) von Satz 4.3 und demzufolge auch die Voraussetzungen von Satz 4.2.

Im Falle eines Hilbertraumes ist diese Folgerung in [17] (Theorem 7.1, S. 25) dargestellt.

Aus Folgerung 4.4 erhalten wir die folgende Erweiterung eines Satzes von B. Sz.-Nagy [16] (siehe auch [17], S. 28—29): [4])

Satz 4.5. *Ist $V \in \mathfrak{B}(\Pi_\varkappa)$ ein π-kontrahierender Operator im Pontrjaginraum $\Pi_\varkappa$, so besitzt V eine minimale π-unitäre Dilatation; d. h. es existieren ein $\pi_\varkappa$-Raum $\tilde{\Pi}_\varkappa \supset \Pi_\varkappa$ und ein π-unitärer Operator $U \in \mathfrak{B}(\tilde{\Pi}_\varkappa)$ so, daß gilt:*

$$V^n = \tilde{P}\, U^n|_{\Pi_\varkappa} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$\tilde{\Pi}_\varkappa = \text{a. l. H. } \{ U^n u \mid u \in \Pi_\varkappa,\ n = 0, \pm 1, \ldots \} .$$

Dabei ist $\tilde{P}$ der π-orthogonale Projektor von $\tilde{\Pi}_\varkappa$ auf $\Pi_\varkappa$.

In Folgerung 4.4 wird für $\mathfrak{X}$ die (additive) Gruppe $\boldsymbol{Z}$ aller ganzen Zahlen und für T die durch

$$T(n) := \begin{cases} V^n & \text{für } n \geq 1 , \\ 0 & \text{für } n = 0 , \\ (V^+)^{-n} & \text{für } n \leq 1 \end{cases}$$

definierte Abbildung $T : \mathfrak{X} \to \mathfrak{B}(\Pi_\varkappa)$ gewählt. Dann kann man wie in [17], S. 28—29, zeigen, daß für den zu T gehörenden Kern K gilt

$$\sum_{i,j=1}^{n} [K(n_i, n_j)\, u_j \mid u_i] = [v_0 \mid v_0] + \sum_{m=1}^{\infty} [(I - V^+ V)\, v_m \mid v_m] ;$$

dabei ist (v_m) eine beliebige Folge in $\Pi_\varkappa$ derart, daß $v_m = 0$ nur für endlich viele Indizes. Da V π-kontrahierend ist, folgt daraus, daß K genau $\varkappa$ negative Quadrate hat. Aus Folgerung 4.4 folgt nun die Behauptung, wenn man nur $U := U(1)$ setzt.

5. Verallgemeinerte Resolventen eines π-hermiteschen Operators

5.1. Grundbegriffe. Als zweite Anwendung der Theorie betrachten wir jetzt verschiedene verallgemeinerte Resolventen eines π-hermiteschen Operators. Zuerst seien einige Definitionen und Resultate gegeben. (Siehe insbesondere [7].)

[4]) Herr Heinz Langer hat dem Verfasser freundlicherweise mitgeteilt, daß D. Z. Arov einen anderen (unveröffentlichten) Beweis für dieses Resultat gegeben hat.

In diesem Kapitel ist $\Pi_\varkappa$ immer ein $\pi_\varkappa$-Raum und A ein in $\Pi_\varkappa$ dicht definierter abgeschlossener π-hermitescher Operator.

Der Operator A besitzt π-selbstadjungierte Erweiterungen, die möglicherweise in einem Oberraum $\tilde{\Pi}_\varkappa$ von $\Pi_\varkappa$ wirken. Das Spektrum jeder π-selbstadjungierten Erweiterung $\tilde{A}$ von A liegt im Streifen

$$\Sigma_A := \{ z \in \boldsymbol{C} \mid |\operatorname{Im} z| \leq h_A \} ,$$

wobei $h_A > 0$ nur von A abhängt. Außerhalb von Σ_A gilt die Absetzung

$$\|(\tilde{A} - z\, I)^{-1}\| \leq 1/(|\operatorname{Im} z| - h_A) . \tag{5.1}$$

Es sei $\tilde{\Pi}_\varkappa$ ein Oberraum von $\Pi_\varkappa$ und $\tilde{A}$ ein π-selbstadjungierter Operator in $\tilde{\Pi}_\varkappa$. Ist $\tilde{R}$ die Resolvente von $\tilde{A}$, d. h. $\tilde{R}(z) := (\tilde{A} - z\,\tilde{I})^{-1} \in \mathfrak{B}(\tilde{\Pi}_\varkappa)$ für $z \in \varrho(\tilde{A})$, und $\tilde{P}$ der π-orthogonale Projektor von $\tilde{\Pi}_\varkappa$ auf $\Pi_\varkappa$, so heißt die durch

$$R(z) := \tilde{P}\, \tilde{R}(z)|_{\Pi_\varkappa} \qquad (z \in \varrho(\tilde{A})) \tag{5.2}$$

definierte Funktion R eine *verallgemeinerte Resolvente des π-selbstadjungierten Operators* $\tilde{A}$. Wenn $\tilde{A}$ speziell eine Erweiterung von A ist, so nennen wir R eine *verallgemeinerte Resolvente des π-hermiteschen Operators* A.

Wir wählen ein $\alpha > h_A$ und setzen $\Pi_\varkappa^+ := \mathfrak{D}(A^+)$, versehen mit dem π-Skalarprodukt

$$[u \mid v]_+ := \alpha^2 [u \mid v] + [A^+ u \mid A^+ v] \qquad (u , v \in \mathfrak{D}(A^+)) .$$

Dann ist nach [14] $\Pi_\varkappa^+$ ein Pontrjaginraum von Grundelementen bezüglich $\Pi_\varkappa$. Sei $\Pi_\varkappa^-$ der zugehörige Pontrjaginraum verallgemeinerter Elemente.

Ist R eine verallgemeinerte Resolvente von A, so liegt $R(z)$ in $\mathfrak{B}(\Pi_\varkappa; \Pi_\varkappa^+)$; demzufolge können wir die zugehörige *erweiterte verallgemeinerte Resolvente* $\hat{R}$ durch die Gleichung

$$\hat{R}(z) := R(\bar{z})^\oplus \qquad (z \in \varrho(\tilde{A}))$$

definieren, d. h. es gilt $\hat{R}(z) \in \mathfrak{B}(\Pi_\varkappa^-; \Pi_\varkappa)$ und

$$[\hat{R}(z)\, x \mid f] = [x \mid R(\bar{z})\, f] \tag{5.3}$$

für alle $x \in \Pi_\varkappa^-$, $f \in \Pi_\varkappa$. Dann ist $\hat{R}(z)$ die Erweiterung des zunächst auf $\Pi_\varkappa$ definierten Operators $R(z)$ auf $\Pi_\varkappa^-$ durch Stetigkeit.

Wir wollen nun die oben eingeführten verschiedenen verallgemeinerten Resolventen charakterisieren.

5.2. Verallgemeinerte Resolventen eines π-selbstadjungierten Operators. Im Folgenden sei $M > 0$ eine Konstante und

$$\mathfrak{U}(i\,\infty) := \{\, i\,t \mid t > M \,\}\,.$$

Der folgende Satz verallgemeinert ein entsprechendes Resultat von R. Shonkwiler [13]; man vergleiche auch [9] und [18].

Satz 5.1. *Ist R eine verallgemeinerte Resolvente eines π-selbstadjungierten Operators $\tilde{A}$ in $\tilde{\Pi}_\varkappa \supset \Pi_\varkappa$, so gilt:*

1) *Der durch*

$$K(z,\zeta) := \frac{\bar{z}\,\zeta}{\bar{z} - \zeta}\,(R(z)^+ - R(\zeta)) \tag{5.4}$$

definierte $\Pi_\varkappa$-Kern K auf $\mathfrak{U}(i\,\infty)$ (mit $M := 2\,h_{\tilde{A}}$) hat $\varkappa'$ negative Quadrate für ein gewisses $\varkappa'$ mit $0 \leq \varkappa' \leq \varkappa$.

2) *Für jedes $f \in \Pi_\varkappa$ konvergiert $(-\,i\,t)\,R(i\,t)\,f$ schwach gegen f, wenn $t \to \infty$.*

Umgekehrt, hat eine Funktion $R : \mathfrak{U}(i\,\infty) \to \mathfrak{B}(\Pi_\varkappa)$ die Eigenschaften 1)—2), so existiert eine verallgemeinerte Resolvente eines π-selbstadjungierten Operators, die mit R in $\mathfrak{U}(i\,\infty)$ zusammenfällt.

Beweis. A. Sei zuerst R eine verallgemeinerte Resolvente eines π-selbstadjungierten Operators $\tilde{A}$, d.h. (5.2) gilt.

Um die Eigenschaft 1) zu zeigen bemerken wir zuerst, daß aus der Hilbertschen Relation unmittelbar die Beziehung

$$R(\bar{z}) - R(\zeta) = (\bar{z} - \zeta)\,\tilde{P}\,\tilde{R}\,(\bar{z})\,\tilde{R}(\zeta)|_{\Pi_\varkappa} \tag{5.5}$$

folgt. Dies ergibt

$$[K(z_i,z_j)\,f_j \mid f_i] = \bar{z}_i\,z_j\,[\tilde{P}\,\tilde{R}(\bar{z}_i)\,\tilde{R}(z_j)\,f_j \mid f_i] = [z_j\,\tilde{R}(z_j)\,f_j \mid z_i\,\tilde{R}(z_i)\,f_i]$$

für alle $(z_i)_{1\leq i\leq n}$ in $\mathfrak{U}(i\,\infty)$ und $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ in $\Pi_\varkappa$. (Dabei setzen wir $M := 2\,h_{\tilde{A}}$.) Somit hat der $\Pi_\varkappa$-Kern K höchstens $\varkappa$ negative Quadrate.

Seien nun $\tilde{f} \in \tilde{\Pi}_\varkappa$ und $\tilde{g} \in \mathfrak{D}(\tilde{A})$ beliebig. Aus (1.3) und (5.1) erhält man

$$\begin{aligned}|[((-\,i\,t)\,\tilde{R}(i\,t) - I)\,\tilde{f} \mid \tilde{g}]| &= |[-\,\tilde{A}\,\tilde{R}(i\,t)\,\tilde{f} \mid \tilde{g}]| \leq \|\tilde{R}(i\,t)\|\,\|\tilde{f}\|\,\|\tilde{A}\,\tilde{g}\| \\ &\leq (t - h_{\tilde{A}})^{-1}\,\|\tilde{f}\|\,\|\tilde{A}\,\tilde{g}\| \to 0\,,\end{aligned}$$

wenn $t \to \infty$. Für jedes $\tilde{f} \in \tilde{\Pi}_\varkappa$ ist die Menge $\{-\,i\,t\,\tilde{R}(i\,t)\,\tilde{f} \mid t > M\}$ auch beschränkt:

$$\|-\,i\,t\,\tilde{R}(i\,t)\,\tilde{f}\| \leq t\,(t - h_{\tilde{A}})^{-1}\,\|\tilde{f}\| < 2\,\|\tilde{f}\|\,.$$

Da $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ dicht in $\tilde{\Pi}_\varkappa$ liegt, folgt $-\,i\,t\,\tilde{R}(i\,t)\,\tilde{f} \to \tilde{f}$ und auf Grund von (5.2) auch $-\,i\,t\,R(i\,t)\,f \to f$ für alle $f \in \Pi_\varkappa$.

B. Wir beweisen jetzt die Umkehrung. Dazu konstruieren wir einen Pontrjaginraum $\tilde{\Pi}_\varkappa \supset \Pi_\varkappa$ und einen π-selbstadjungierten Operator $\tilde{A}$ in $\tilde{\Pi}_\varkappa$ derart, daß (5.2) gilt in $\mathfrak{U}(i\,\infty)$.

Nach Satz 3.3 existiert ein $\pi_{\varkappa'}$-Raum $\Pi^0_{\varkappa'} \subset \mathcal{F}(\mathfrak{U}(i\,\infty);\Pi_\varkappa)$ mit reproduzierendem Kern K. Der Teilraum $\mathfrak{L}$ von $\Pi^0_{\varkappa'}$ habe dieselbe Bedeutung wie in Satz 3.3.

Wir zeigen, daß für jedes $f \in \Pi_\varkappa$ die Folge $(K(\cdot\,,i\,n)f)$, $n > M$, in $\mathfrak{L}$ eine Cauchyfolge ist. In der Tat, für jedes $K(\cdot,\zeta)\,g$ in $\mathfrak{L}$ gilt nach Voraussetzungen

$$
\begin{aligned}
(5.6)\quad & [K(\cdot\,,i\,n)f - K(\cdot\,,i\,m)f \mid K(\cdot,\zeta)\,g] \\
&= \left[\left\{\frac{\bar\zeta\,i\,n}{\bar\zeta - i\,n}\,(R(\zeta)^+ - R(i\,n)) - \frac{\bar\zeta\,i\,m}{\bar\zeta - i\,m}\,(R(\zeta)^+ - R(i\,m))\right\} f \,\middle|\, g\right] \\
&= \bar\zeta\left\{\left(\frac{\bar\zeta}{i\,n} - 1\right)^{-1} - \left(\frac{\bar\zeta}{i\,m} - 1\right)^{-1}\right\}[f \mid R(\zeta)\,g] \\
&\quad + \bar\zeta\,(\bar\zeta - i\,n)^{-1}\,[(-\,i\,n)\,R(i\,n)f \mid g] \\
&\quad - \bar\zeta\,(\bar\zeta - i\,m)^{-1}\,[(-\,i\,m)\,R(i\,m)f \mid g] \to 0\,,
\end{aligned}
$$

wenn $m\,,n \to \infty$. Analog erhält man

$$[K(i\,n\,,i\,n)f \mid f] = \tfrac{1}{2}\,[(i\,n\,R(i\,n)^+ + (-\,i\,n)\,R(i\,n))f \mid g] \to 0$$

und

$$
\begin{aligned}
&[K(i\,m\,,i\,n)f \mid f] \\
&= (m+n)^{-1}\,\{n\,[i\,m\,R(i\,m)^+ f \mid f] + m\,[(-\,i\,n)\,R(i\,n)f \mid f]\} \to 0\,,
\end{aligned}
$$

wenn $m\,,n \to \infty$. Daraus folgt für $m\,,n \to \infty$

$$
\begin{aligned}
&[(K(\cdot\,,i\,n) - K(\cdot\,,i\,m))f \mid (K(\cdot\,,i\,n) - K(\cdot\,,i\,m))f] \\
&= [K(i\,n\,,i\,n)f \mid f] + [K(i\,m\,,i\,m)f \mid f] - 2\,\mathrm{Re}\,[K(i\,m\,,i\,n)f \mid f] \to 0\,.
\end{aligned}
$$

Nach dieser Beziehung und (5.6) ist $(K(\cdot\,,i\,n)f)$ eine Cauchyfolge, die in $\Pi^0_{\varkappa'}$ konverigiert. Der Grenzwert wird mit $K(\cdot\,,i\,\infty)f$ bezeichnet.

Für $K(\cdot\,,i\,\infty)f \in \Pi^0_{\varkappa'}$ und $K(\cdot\,,z)\,g \in \mathfrak{L}$ gilt

$$(5.7)\quad [K(\cdot\,,z)\,g \mid K(\cdot\,,i\,\infty)f] = \lim_{n\to\infty}\,[K(i\,n\,,z)\,g \mid f] = -\,z\,[R(z)\,g \mid f]$$

und

$$
\begin{aligned}
[K(\cdot\,,i\,\infty)\,g \mid K(\cdot\,,i\,\infty)f] &= \lim_{n\to\infty}\,[K(\cdot\,,i\,n)\,g \mid K(\cdot\,,i\,\infty)f] \\
&= \lim_{n\to\infty}\,(-\,i\,n)\,[R(i\,n)\,g \mid f] = [g \mid f]\,.
\end{aligned}
$$

Deshalb können wir den Raum $\Pi_\varkappa$ in $\Pi^0_{\varkappa'}$ einbetten durch die Identifizierung $f \mapsto K(\cdot, i\,\infty) f$. Dann ist notwendig $\varkappa \leq \varkappa'$ und somit weil in 1) $\varkappa' \leq \varkappa$ vorausgesetzt wurde, schließlich $\varkappa' = \varkappa$.

Man kann weiter wie in [13] einen π-hermiteschen Operator in $\Pi^0_\varkappa$ bilden: Für $\varphi := \sum_{j=1}^{n} K(\cdot, z_j) f_j \in \mathfrak{L}$ setzt man

$$A\,\varphi := \sum_{j=1}^{n} z_j \{ K(\cdot, z_j) - K(\cdot, i\,\infty)\} f_j \ .$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß A ein in $\Pi^0_\varkappa$ dicht definierter π-hermitescher Operator ist, den wir o. B. d. A. als abgeschlossen voraussetzen können.

Wir wollen jetzt (5.2) zeigen. Dazu bilden wir für $z \in \mathfrak{U}(i\,\infty)$ den Operator $A - z\,I$:

$$(A - z\,I)\,(K(\cdot, \zeta) f) = (z - \zeta)\,K(\cdot, \zeta) f - \zeta\,K(\cdot, i\,\infty) f$$

für $K(\cdot,\zeta) f \in \mathfrak{L}$. Insbesondere gilt

$$(A - z\,I)\,(K(\cdot,z) f) = -\,z\,K(\cdot, i\,\infty) f.$$

Wählt man $M > 0$ so groß, daß $M > h_A$ ist, so erhält man daher

$$(A - z\,I)^{-1}\,(K(\cdot, i\,\infty) f) = -\,z^{-1}\,K(\cdot, z) f\,. \tag{5.8}$$

Wir erweitern A zu einem π-selbstadjungierten Operator $\tilde{A}$, der in einem Oberraum $\tilde{\Pi}_\varkappa$ von $\Pi^0_\varkappa$ wirkt. Dann folgt aus (5.7) und (5.8)

$$\begin{aligned} [R(z) f \mid g] &= -\,z^{-1}\,[-\,z\,R(z) f \mid g] = -\,z^{-1}\,[K(\cdot, z) f \mid K(\cdot, i\,\infty)\,g] \\ &= [(A - z\,I)^{-1}\,(K(\cdot, i\,\infty) f) \mid K(\cdot, i\,\infty)\,g] \\ &= [\tilde{P}\,(\tilde{A} - z\,\tilde{I}\,)^{-1}\,(K(\cdot, i\,\infty) f) \mid K(\cdot, i\,\infty)\,g]\,, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{P}$ den π-orthogonalen Projektor von $\tilde{\Pi}_\varkappa$ auf $\Pi_\varkappa$ bezeichnet. Dies bedeutet, daß R mit der verallgemeinerten Resolvente $\tilde{P}\,(\tilde{A} - z\,\tilde{I}\,)^{-1}|_{\Pi_\varkappa}$ von A in $\mathfrak{U}(i\,\infty)$ übereinstimmt.

5.3. Verallgemeinerte Resolventen eines π-hermiteschen Operators. Al Spezialfall erhalten wir aus Satz 5.1

Satz 5.2. *Ist R eine verallgemeinerte Resolvente eines π-hermiteschen abgeschlossenen Operators A in $\Pi_\varkappa$, so hat sie Eigenschaften 1) und 2) aus Satz 5.1 (mit $M := 2\,h_A$) und*

3) *es existieren ein Punkt $w \in \mathfrak{U}(i\,\infty)$ und ein Teilraum $\mathfrak{M} \subset \Pi_\varkappa$ derart, daß $\mathfrak{R}(w)$ auf $\mathfrak{M}$ injektiv ist, $\mathfrak{R}(w)\,\mathfrak{M}$ dicht in $\Pi_\varkappa$ liegt und Beziehung*

$$(5.9) \qquad R(w)^+ f - R(w) f = (\bar{w} - w)\, R(w)^+ R(w) f$$

für alle $f \in \mathfrak{M}$ *besteht.*

Umgekehrt, hat eine Funktion $R : \mathfrak{U}(i\,\infty) \to \mathfrak{B}(\Pi_\varkappa)$ *die Eigenschaften 1)—3), so existiert eine verallgemeinerte Resolvente eines* π*-hermiteschen abgeschlossenen Operators in* $\Pi_\varkappa$, *die mit* R *in* $\mathfrak{U}(i\,\infty)$ *zusammenfällt.*

Beweis. A. Ist R eine verallgemeinerte Resolvente eines π-hermiteschen abgeschlossenen Operators, so ist R insbesondere eine verallgemeinerte Resolvente einer π-selbstadjungierten Erweiterung $\tilde{A}$ von A. Also hat R nach Satz 5.1 Eigenschaften 1) und 2).

Um 3) zu beweisen wählen wir ein beliebiges w aus $\mathfrak{U}(i\,\infty)$. Setzt man $\mathfrak{M} := \mathfrak{R}(A - w\,I)$, so sieht man leicht, daß $\mathfrak{R}(w)|_{\mathfrak{M}} = (A - w\,I)^{-1}$ gilt. Aus dieser Relation folgt unmittelbar Eigenschaft 3).

B. Wir zeigen nun die Umkehrung. Dazu setzen wir $\mathfrak{D}(A) := \mathfrak{R}(w)\,\mathfrak{M}$ und

$$(5.10) \qquad A f := R(w)^{-1} f + w f \qquad (f \in \mathfrak{D}(A))\,.$$

Dann ist A ein dicht definierter, abgeschlossener Operator in $\Pi_\varkappa$.

Der Operator A ist sogar π-hermitesch. In der Tat, für alle Elemente $f = R(w) f_1$ und $g = R(w)\, g_1$ von $\mathfrak{D}(A)$ mit $f_1, g_1 \in \mathfrak{M}$ gilt nach (5.10) und (5.9)

$$\begin{aligned}
[A f \mid g] &= [f_1 \mid g] + w\,[f \mid g] \\
&= [(R(w)^+ - R(w) + R(w))\, f_1 \mid g_1] + w\,[f \mid g] \\
&= (\bar{w} - w)\,[R(w) f_1 \mid R(w)\, g_1] + [f \mid g_1] + w\,[f \mid g] \\
&= \bar{w}\,[f \mid g] + [f \mid g_1] = [f \mid A\, g]\,.
\end{aligned}$$

Andererseits wissen wir aus Satz 5.1, daß R eine verallgemeinerte Resolvente eines π-selbstadjungierten Operators $\tilde{A}$ in $\tilde{\Pi}_\varkappa$ ist, d. h. (5.2) gilt. Es bleibt deshalb nur noch zu zeigen, daß $\tilde{A}$ eine Erweiterung von A ist.

Zu diesem Zweck beweisen wir

$$(5.11) \qquad \tilde{R}(w)|_{\mathfrak{M}} := (\tilde{A} - w\,\tilde{I})^{-1}|_{\mathfrak{M}} = R(w)|_{\mathfrak{M}}\,.$$

Sei also $f_1 = R(w)^{-1} f \in \mathfrak{M}$ mit $f \in \mathfrak{D}(A)$ beliebig und $\tilde{f}_1 := \tilde{R}(w) f_1$. Da A π-hermitesch ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{Im}[A f \mid f] = \operatorname{Im}\{[f_1 \mid R(w) f_1] + w\,[f \mid f]\} \\
&= \operatorname{Im}\{[(\tilde{A} - w\,\tilde{I})\, \tilde{f}_1 \mid \tilde{f}_1] + w\,[f \mid f]\} = (\operatorname{Im} w)\,\{[f \mid f] - [\tilde{f}_1 \mid \tilde{f}_1]\}\,.
\end{aligned}$$

Somit gilt für alle $f_1 \in \mathfrak{M}$

$$(5.12) \qquad [R(w) f_1 \mid R(w) f_1] = [\tilde{R}(w) f_1 \mid \tilde{R}(w) f_1]\,.$$

Schreiben wir $\tilde{R}(w)$ in der Form

$$\tilde{R}(w) f_1 = (\tilde{I} - \tilde{P}) \tilde{R}(w) f_1 + R(w) f_1$$

für $f_1 \in \mathfrak{M}$, so folgt aus (5.12)

$$[(\tilde{I} - \tilde{P}) \tilde{R}(w) f_1 \mid (\tilde{I} - \tilde{P}) \tilde{R}(w) f_1] = 0$$

für alle $f_1 \in \mathfrak{M}$. Auf dem Teilraum $\Pi_\varkappa^\perp := \{\tilde{f} \in \tilde{\Pi}_\varkappa \mid \tilde{f} \perp \Pi_\varkappa\}$ ist aber das π-Skalarprodukt $[\cdot \mid \cdot]$ positiv definit und daher gilt

$$(\tilde{I} - \tilde{P}) \tilde{R}(w)|_{\mathfrak{M}} = O ,$$

woraus (5.11) folgt.

Aus (5.11) und (5.10) ergibt sich unmittelbar, daß $\tilde{A}$ eine π-selbstadjungierte Erweiterung von A ist. Somit ist Satz 5.2 bewiesen.

5.4. Verallgemeinerte Resolventen für vorgegebenen Operator. Wenn wir noch spezieller fragen, wann eine Funktion R eine verallgemeinerte Resolvente eines *vorgegebenen* abgeschlossenen π-hermiteschen Operators A ist, liefert Satz 5.2 die folgende Antwort:

Satz 5.3. *Sei A ein abgeschlossener π-hermitescher Operator in $\Pi_\varkappa$. Dann hat jede verallgemeinerte Resolvente R von A die Eigenschaften 1)—2) aus Satz* 5.1 *und*

3′) $R(w)(A - w I) f = R(w)^+ (A - \bar{w} I) f = f$ *für ein* $w \in \mathfrak{U}(i\,\infty)$ *und alle* $f \in \mathfrak{D}(A)$.

Umgekehrt, hat eine Funktion $R : \mathfrak{U}(i\,\infty) \to \mathfrak{B}(\Pi_\varkappa)$ diese Eigenschaften, so existiert eine verallgemeinerte Resolvente von A, die mit R in $\mathfrak{U}(i\,\infty)$ zusammenfällt.

Beweis. A. Die Notwendigkeit aller Bedingungen folgt unmittelbar aus der Relation $R(w) f = (A - w I)^{-1} f$, $f \in \mathfrak{R}(A - w I)$, und aus Satz 5.2.

B. Wir zeigen daher die Hinlänglichkeit der Bedingungen 1)—2) und 3′). Zuerst wählen wir die Konstante $M > h_A$. Sei $w \in \mathfrak{U}(i\,\infty)$ fixiert und $\mathfrak{M} := \mathfrak{R}(A - w I)$. Dann folgt aus 3′) für alle $f \in \mathfrak{M}$

$$(5.13) \qquad R(w) f = R(w)(A - w I)(A - w I)^{-1} f = (A - w I)^{-1} f .$$

Der Operator $R(w)|_{\mathfrak{M}}$ ist also injektiv und $R(w)\,\mathfrak{M} = \mathfrak{D}(A)$ liegt dicht in $\Pi_\varkappa$. Auf Grund von (5.13) und 3′) gilt weiter

$$R(w)^+ f = R(w)^+ (A - w I) R(w) f ,$$
$$R(w) f = R(w)^+ (A - \bar{w} I) R(w) f$$

für alle $f \in \mathfrak{M}$. Substrahieren wir diese Gleichungen voneinander, so ergibt sich Relation (5.9).

Nach Satz 5.2 ist R also eine verallgemeinerte Resolvente eines π-hermiteschen Operators A_1 in $\Pi_\varkappa$. Dieser Operator ist durch

$$A_1 f := R(w)^{-1} f + w f\,, \quad f \in \mathfrak{D}(A_1) := R(w)\,\mathfrak{M}\,,$$

gegeben. Weiter stimmt A_1 mit A überein. In der Tat, $\mathfrak{D}(A_1) = R(w)\,\mathfrak{M} = \mathfrak{D}(A)$ und nach (5.13) gilt

$$A_1 f = R(w)^{-1} f + w f = (A - w\,I) f + w f = A f$$

für alle $f \in \mathfrak{D}(A_1) = \mathfrak{D}(A)$. Satz 5.3 ist damit bewiesen.

Die Sätze 5.2 und 5.3 verallgemeinern einige Resultate von A. V. Štraus [15]; er betrachtet aber auch nicht dicht definierte Operatoren.

5.5. Erweiterte verallgemeinerte Resolventen. Wir charakterisieren noch die erweiterten varallgemeinerten Resolventen eines π-hermiteschen Operators.

Satz 5.4. *Seien A ein abgeschlossener π-hermitescher Operator im Pontrjaginraum $\Pi_\varkappa$, $\Pi_\varkappa^+$ der aus $\mathfrak{D}(A^+)$ gebildete Pontrjaginraum von Grundelementen und $\Pi_\varkappa^-$ der zugehörige Pontrjaginraum verallgemeinerter Elemente.*

Jede erweiterte verallgemeinerte Resolvente $\hat{R}$ von A hat die folgenden Eigenschaften:

1) *Die Abbildung $\lambda \mapsto \hat{R}(\lambda)|_{\Pi_\varkappa}$ ist eine verallgemeinerte Resolvente eines abgeschlossenen π-hermiteschen Operators in $\Pi_\varkappa$.*

2) *Es gibt ein $w \in \mathfrak{U}(i\,\infty)$ derart, daß*

$$\hat{R}(w)\,(A - w\,I)\,u = u \tag{5.14}$$

für alle $u \in \mathfrak{D}(A)$ gilt.

Umgekehrt, hat eine Abbildung $\hat{R} : \mathfrak{U}(i\,\infty) \to \mathfrak{B}(\Pi_\varkappa^-;\Pi_\varkappa)$ die Eigenschaften 1)—2), so existiert eine erweiterte verallgemeinerte Resolvente von A, die mit $\hat{R}$ in $\mathfrak{U}(i\,\infty)$ übereinstimmt.

Beweis. A. Die Notwendigkeit ist klar, denn $\lambda \mapsto \hat{R}(\lambda)|_{\Pi_\varkappa}$ ist eine verallgemeinerte Resolvente des Operators A.

B. Umgekehrt, sei $\lambda \mapsto \hat{R}(\lambda)|_{\Pi_\varkappa}$ eine verallgemeinerte Resolvente eines abgeschlossenen π-hermiteschen Operators A_1 in $\Pi_\varkappa$ derart, daß (5.14) gilt. Dann existiert eine π-selbstadjungierte Erweiterung $\tilde{A}_1$ von A in $\tilde{\Pi}_\varkappa$ mit der Eigenschaft

$$\hat{R}(\lambda) f = \tilde{P}\,(\tilde{A}_1 - \lambda\,\tilde{I})^{-1} f \tag{5.15}$$

für alle $f \in \Pi_\varkappa$. Diese Gleichung besteht zuerst nur in $\mathfrak{U}(i\,\infty)$, aber wir können $\lambda \mapsto \hat{R}(\lambda)|_{\Pi_\varkappa}$ durch diese Relation für alle $\lambda \in \varrho(\tilde{A}_1)$ definieren.

Aus (5.14) und (5.15) folgt für alle $u \in \mathfrak{D}(A)$

$$\begin{aligned} u &= \hat{R}(w)\,(A - w\,I)\,u \\ &= \tilde{P}\,(\tilde{A}_1 - w\,\tilde{I})^{-1}\,(A_1 - w\,I)\,(A_1 - w\,I)^{-1}\,(A - w\,I)\,u \\ &= (A_1 - w\,I)^{-1}\,(A - w\,I)\,u\,. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir $A_1 = A$ und somit ist $\lambda \mapsto \hat{R}(\lambda)|_{\Pi_\varkappa}$ eine verallgemeinerte Resolvente R des Operators A.

Wir müssen noch Relation (5.3) zeigen. Dazu seien $x \in \Pi_\varkappa^-$, $f \in \Pi_\varkappa$ beliebig. Da $\Pi_\varkappa$ dicht in $\Pi_\varkappa^-$ liegt, gibt es eine Folge (f_n) in $\Pi_\varkappa$ derart, daß $f_n \to x$ gilt. Demzufolge erhalten wir

$$[\hat{R}(\lambda)\,x \mid f] = \lim_{n\to\infty}\,[R(\lambda)\,f_n \mid f] = \lim_{n\to\infty}\,[f_n \mid R(\bar{\lambda})\,f] = [x \mid R(\bar{\lambda})\,f]\,.$$

Somit ist $\hat{R}$ eine erweiterte verallgemeinerte Resolvente von A.

Universität Jyväskylä
Mathematisches Institut
SF-40100 Jyväskylä 10
Finnland

Literatur

[1] ARONSZAJN, N.: Theory of reproducing kernels. - Trans. Amer. Math. Soc. 68, 1950, S. 337–404.

[2] BERGMAN, S.: The kernel function and conformal mapping. - Mathematical surveys V, American mathematical society, New York, 1950.

[3] DE BRANGES, L.: Some Hilbert spaces of analytic functions. II. - J. Math. Anal. Appl. 11, 1965, S. 44–72.

[4] IOHVIDOV, I. S., und M. G. KREĬN: Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. I. - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 13, 1960, S. 105–175.

[5] —»— —»— Spectral theory of operators in spaces with an indefinite metric. II. - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 34, 1963, S. 283–373.

[6] KREĬN, M. G.: Hermitian-positive kernels on homogeneous spaces. I.–II. - Amer. Math. Soc. Transl. (2) 34, 1963, S. 69–164.

[7] KREĬN, M. G., und H. LANGER: Defect subspaces and generalized resolvents of an Hermitian operator in the space $\Pi_\varkappa$. - Functional Anal. Appl. 5, 1971/1972, S. 136–146 und 217–228.

[8] —»— —»— Über die verallgemeinerten Resolventen und die charakteristische Funktion eines isometrischen Operators im Raume $\Pi_\varkappa$. - Colloquia mathematica Societatis János Bolyai 5: Hilbert space operators and operator algebras [Tihany 1970] (Edited by B. Sz.-Nagy), (Distributed by) North-Holland Publishing Company, Amsterdam / London, 1972, S. 353–399.

[9] —»— —»— Über die Q-Funktion eines π-hermiteschen Operators im Raume $\Pi_\varkappa$. - Acta Sci. Math. (Szeged) 34, 1973, S. 191–230.

[10] LANGER, H., und P. SORJONEN: Verallgemeinerte Resolventen hermitescher und isometrischer Operatoren im Pontrjaginraum. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 561, 1974.

[11] MESCHKOWSKI, H.: Hilbertsche Räume mit Kernfunktion. — Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 113, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1962.

[12] NEUMARK, M. A.: Normierte Algebren. - Hochschulbücher für Mathematik 45, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1959.

[13] SHONKWILER, R.: On generalized resolvents and an integral representation of Nevanlinna. - J. Math. Anal. Appl. 40, 1972, S. 723–734.

[14] SORJONEN, P.: Über gewisse Tripel von Pontrjaginräumen. - Math. Nachr. 63, 1974, S. 213–221.

[15] ŠTRAUS, A. V. [А. В. ШТРАУС]: Обобщенные резольвенты симметрических операторов. - Изв. Акад. Наук СССР Сер. Мат. 18, 1954, S. 51–86.

[16] SZ.-NAGY, B.: Fortsetzung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes mit Austritt aus dem Raum. - Anhang zu: F. Riesz und B. Sz.-Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis. [Zweite, berichtigte Auflage.]

Hochschulbücher für Mathematik 27, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968, S. 427—461.

[17] SZ.-NAGY, B., und C. FOIAS: Harmonic analysis of operators on Hilbert spaces. - Akadémiai Kiadó, Budapest / North-Holland Publishing Company, Amsterdam/London, 1970.

[18] SZ.-NAGY, B., und A. KORÁNYI: Operatortheoretische Behandlung und Verallgemeinerung eines Problemkreises in der komplexen Funktionentheorie. - Acta Math. 100, 1958, S. 171—202.

Gedruckt im Februar 1975