ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

593

DIE PROJEKTIVE, ABSOLUTKONVEXE TENSORPRODUKTLIMITIERUNG

VON

STEN BJON

HELSINKI 1974
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1975.593

ISSN 0066-1953
ISBN 951-41-0209-6

Vorgelegt am 13. Mai 1974

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1974

Einleitung

Die projektive, absolutkonvexe Tensorproduktlimitierung $\Lambda \otimes_k \Lambda'$ auf dem Tensorprodukt $E \otimes F$ zweier absolutkonvexen Limesvektorräume (E, Λ) und (F, Λ') (vgl. [3]) wird definiert als die feinste absolutkonvexe Limitierung auf $E \otimes F$ für die die kanonische Abbildung $E \times F \to E \otimes F$ an der Stelle $(0, 0)$ stetig ist. Die grundlegenden Eigenschaften dieser Tensorproduktlimitierung werden hergeleitet. In allen Untersuchungen verwenden wir die Charakterisierung der absolutkonvexen Limesvektorräume durch »Pseudonormen», die in [3] eingeführt wurde. Falls (E, Λ) und (F, Λ') ausgeglichene ([6]), absolutkonvexe Räume sind, so ist $\Lambda \otimes_k \Lambda'$ ausgeglichen und gleich der feinsten absolutkonvexen Limitierung auf $E \otimes F$, für die t global stetig ist. Mit Hilfe einer internen Charakterisierung der Marinescu-Räume, die mit einer in [11] gegebenen Charakterisierung eng zusammenhängt, wird gezeigt, dass $\Lambda \otimes_k \Lambda'$ mit Λ und Λ' eine Marinescu-Limitierung ist. Speziell folgt nun (siehe [8]), dass $\Lambda \otimes_k \Lambda'$ gleich der projektiven Tensorprodukttopologie ([7]) ist, falls Λ und Λ' lokalkonvexe Topologien sind.

Die Frage unter welchen Bedingungen $\Lambda \otimes_k \Lambda'$ mit Λ und Λ' separiert ist, haben wir nicht vollständig beantworten können (siehe Bemerkung im Anschluss an Satz 13).

1. Begriffe und Bezeichnungen

Im folgenden verstehen wir unter Vektorraum immer einen Vektorraum über dem Körper $\mathbf{K}$ der reellen oder komplexen Zahlen. $\mathbf{V}$ sei der Nullumgebungsfilter der natürlichen Topologie auf $\mathbf{K}$. Ein Filter $\mathcal{F}$ auf einem Vektorraum E über $\mathbf{K}$ heisst nach [6] *ausgeglichen* (equable), falls gilt $\mathbf{V} \cdot \mathcal{F} = \mathcal{F}$. Eine Vektorraumlimitierung Λ auf E heisst ausgeglichen, falls es für jedes $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ ein ausgeglichenes $\mathcal{G} \in \Lambda 0$ mit $\mathcal{G} \leq \mathcal{F}$ gibt. Die Vektorraumlimitierung Λ heisst absolutkonvex, falls es zu jedem Filter $\mathcal{F} \in \Lambda 0$ einen Filter $\mathcal{G} \in \Lambda 0$ gröber als $\mathcal{F}$ mit einer Basis aus absolutkonvexen Mengen gibt.

Seien E und $F \neq \phi$ Mengen und Ω eine Teilmenge der Menge aller Abbildungen $u : E \to F$. Die *Evaluation* ist die durch $\omega(u, x) = u(x)$

($u \in \Omega$, $x \in E$) definierte natürliche Abbildung $\omega : \Omega \times E \to F$. Sei Z eine weitere Menge. Zu jeder Abbildung $f : Z \to \Omega$ ist eine Abbildung $\alpha(f) = \tilde{f} = \omega \circ (f \times id_E) : Z \times E \to F$ assoziiert, wobei id_E die Identität auf E bezeichnet.

Seien $E, E_1, \ldots, E_n$ Vektorräume und sei $\mathbf{R}^+$ die Menge der nichtnegativen reellen Zahlen. Abbildungen $q : E \to \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$ mit den Eigenschaften

(a) $q(0) = 0$

(b) $q(\lambda x) = |\lambda| q(x)$ $\qquad \lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{K}$, $x \in E$

(c) $q(x + y) = q(x) + q(y)$ $\qquad x \in E$, $y \in E$

nennen wir *Pseudonormen*. Abbildungen $q : E_1 \times \ldots \times E_n \to \mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$, die die Pseudonormeigenschaften (b) und (c) für jedes »Argument» aufweisen, heissen *n-Pseudonormen* auf $E_1 \times \ldots \times E_n$. Es seien $Q(E_1, \ldots, E_n)$ die Menge aller n-Pseudonormen auf $E_1 \times \ldots \times E_n$ und $Q(E)$ die Menge aller Pseudonormen auf E. Die Ordnungsrelation $\leq$ auf $Q(E_1, \ldots, E_n)$ und $Q(E)$ sei die von der natürlichen Ordnung auf $\mathbf{R}^+ \cup \{\infty\}$ induzierte punktweise Ordnung. Jedes Element $(q_1, \ldots, q_n) \in Q(E_1) \times \ldots \times Q(E_n)$ definiert durch $(q_1 \ldots q_n)(x_1, \ldots, x_n) = q_1(x_1) \ldots q_n(x_n)$, wobei wir die Rechenregel $0 \cdot \infty = \infty$ verwenden, eine n-Pseudonorm

$$q_1 \ldots q_n \in Q(E_1, \ldots, E_n) .$$

Für beliebige Teilmengen $M_\nu \in Q(E_\nu)$ ($\nu = 1, \ldots, n$) und Filter ψ_ν auf $Q(E_\nu)$ ($\nu = 1, \ldots, n$) setzen wir

$$M_1 \ldots M_n = \{q | q \leq q_1 \ldots q_n \, , \ \ q_\nu \in M_\nu \ \text{ für } \ \nu = 1, \ldots, n\}$$

und $\psi_1 \ldots \psi_n = [\{M_1 \ldots M_n | M_\nu \in \psi_\nu \, , \ \nu = 1, \ldots, n\}]$.

Auf dem Raum $L(E_1, \ldots, E_n ; F)$ der n-linearen Abbildungen $w : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ wird für beliebige Pseudonormen $q_\nu \in Q(E_\nu)$ ($\nu = 1, \ldots, n$), $q' \in Q(F)$, durch

$$(q'/q_1 \ldots q_n)(w) = \sup_{q_\nu(x_\nu) \leq 1 \, ; \, \nu = 1, \ldots, n} q'(w(x_1, \ldots, x_n))$$

eine Pseudonorm $q'/q_1 \ldots q_n$ definiert.

Eine Teilmenge M von $Q(E)$ heisst *saturiert*, falls die Pseudonormen q_1 und q_2 genau dann in M sind, wenn $q_1 \vee q_2 = \sup (q_1, q_2)$ in M ist. Ein Filter auf $Q(E)$ heisst saturiert, falls er eine Basis aus saturierten Mengen besitzt. Eine Teilmenge M von $Q(E)$ heisst *ausgeglichen*, falls $\lambda M = M$ für jedes $\lambda > 0$ ist.

Jede Pseudornom $q \in Q(E)$ definiert eine absolutkonvexe Teilmenge $U_q = \{x | q(x) \leq 1\}$ von E und jede Teilmenge $M \subset Q(E)$ definiert einen

Filter $\mathfrak{F}_M = [\{U_q | q \in M\}]$ auf E. Nach [3] definiert ein Filter ψ auf $Q(E)$ durch $\Lambda 0 = [\{\mathfrak{F}_M | M \in \psi\}]$, $\Lambda x = x + \Lambda 0$ eine absolutkonvexe Limitierung Λ auf E, falls er die Bedingungen

(I) $\psi^\lambda \leq \psi$ für jedes $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{K}$

(II) für jedes $x \in E$ gibt es ein $M \in \psi$, so dass $q(x) < \infty$ für jedes $q \in M$ ist

erfüllt. ψ heisst dabei für Λ *definierend.* Jede absolutkonvexe Limitierung kann in dieser Weise durch einen saturierten Filter auf $Q(E)$ mit den Eigenschaften (I) und (II) definiert werden. Ist die Limitierung diesüber ausgeglichen, so können wir einen definierenden Filter finden, der eine Basis aus ausgeglichenen, saturierten Mengen besitzt.

Seien $w \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ und $q \in Q(F)$. Die Abbildung $q \circ w$ ist eine n-Pseudonorm auf $E_1 \times \ldots \times E_n$, für die wir die Bezeichnung q^w verwenden. Wir setzen weiter $M^w = \{q^w | q \in M\}$ und $\psi^w = [\{M^w | M \in \psi\}]$ für eine Teilmenge $M \subset Q(F)$ bzw. einen Filter ψ auf $Q(F)$. Seien nun der saturierte Filter ψ_ν für die absolutkonvexe Limitierung Λ_ν auf E_ν $(\nu = 1, \ldots, n)$ und der Filter ψ' für die absolutkonvexe Limitierung Λ' auf F definierend. Nach [3] ist eine n-lineare Abbildung $w : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ genau dann im Nullpunkt $(\Lambda_1 \times \ldots \times \Lambda_n, \Lambda')$-stetig, wenn $\psi_1 \ldots \psi_n \leq \psi'^w$ ist.

Für weitere Bezeichnungen wird es auf [3] und [5] verwiesen.

2. Die projektive absolutkonvexe Tensorproduktlimitierung

Sei E ein Vektorraum. In $Q(E)$ ist das Supremum einer Familie $(q_\iota)_{\iota \in I}$ von Pseudonormen $q_\iota \in Q(E)$ durch

$$(\sup_{\iota \in I} q_\iota)(x) = \sup_{\iota \in I} q_\iota(x)$$

gegeben.

Es seien $E_1, \ldots, E_n$ Vektorräume, $t : E_1 \times \ldots \times E_n \to E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ die kanonische n-lineare Abbildung und $q_\nu \in Q(E_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ Pseudonorme. Durch

$$q_1 \otimes \ldots \otimes q_n = \sup_{q^t \leq q_1 \ldots q_n} q \qquad (q \in Q(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n)) \tag{1}$$

wird eine Pseudonorm $q_1 \otimes \ldots \otimes q_n$ auf $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ definiert. Für jedes

$$z = \sum_k x_1^{(k)} \otimes \ldots \otimes x_n^{(k)} \in E_1 \otimes \ldots \otimes E_n \tag{2}$$

setzen wir

$$(3) \qquad p(z) = \inf \sum_k q_1(x_1^{(k)}) \ldots q_n(x_n^{(k)}) \quad (0 \cdot \infty = \infty) ,$$

wo das Infimum über alle möglichen Zerlegungen von z der Form (2) genommen wird. Man beweist leicht, dass p eine Pseudonorm ist. Speziell gilt $p^t \leq q_1 \ldots q_n$. Sei $q \in Q(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n)$ eine Pseudonorm mit $q^t \leq q_1 \ldots q_n$. Dann ist

$$p(z) \geq \inf \sum_k q(x_1^{(k)} \otimes \ldots \otimes x_n^{(k)}) \geq \inf q(\sum_k x_1^{(k)} \otimes \ldots \otimes x_n^{(k)}) = q(z) ,$$

d.h. es gilt $p \geq q$. Wir haben somit den ersten Teil des folgenden Satzes bewiesen.

Satz 1. *Seien $q_1, \ldots, q_n$ bzw, q' Pseudonormen auf den Vektorräumen $E_1, \ldots, E_n$ bzw. F.*

(a) *Durch die Gleichungen* (1) *und* (3) *wird dieselbe Pseudonorm $p = q_1 \otimes \ldots \otimes q_n$ auf $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ definiert.*

(b) *Für jede n-lineare Abbildung $w : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ mit der assoziierten linearen Abbildung $u : E_1 \otimes \ldots \otimes E_n \to F$, $w = u \circ t$, gilt*

$$(q'/q_1 \ldots q_n)(w) = (q'/q_1 \otimes \ldots \otimes q_n)(u) .$$

Beweis. (b) Nach Gl. (1) folgt aus $q'^w \leq q_1 \ldots q_n$ die Beziehung $q'^u \leq q_1 \otimes \ldots \otimes q_n$. Umgekehrt folgt nach Gl. (3) die erste Beziehung aus der zweiten. Nach [4], Satz 8 (a), sind die Relationen $q'^w \leq q_1 \ldots q_n$ und $q'^u \leq q_1 \otimes \ldots \otimes q_n$ mit $(q'/q_1 \ldots q_n)(w) \leq 1$ bzw. $(q'/q_1 \otimes \ldots \otimes q_n)(u) \leq 1$ äquivalent. Da Pseudonormen positiv homogen und die Abbildung $w \mapsto u$ linear ist, folgt die Behauptung aus der Äquivalenz der Beziehungen $(q'/q_1 \ldots q_n)(w) \leq 1$ und $(q'/q_1 \otimes \ldots \otimes q_n)(u) \leq 1$.

Für Teilmengen $M_\nu \subset Q(E_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ und Filter ψ_ν auf $Q(E_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ setzen wir $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n = \{q \in Q(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n) | q^t \leq q_1 \ldots q_n, q_\nu \in M_\nu, \ \nu = 1, \ldots, n\}$ und

$$\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n = [\{M_1 \otimes \ldots \otimes M_n | M_\nu \in \psi_\nu, \ \nu = 1, \ldots, n\}] .$$

Lemma. (a) *Seien $q_\nu \in Q(E_\nu)$ und $q'_\nu \in Q(E_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ Pseudonormen mit $q_\nu \leq q'_\nu$ für jedes $\nu = 1, \ldots, n$. Dann ist*

$$q_1 \otimes \ldots \otimes q_n \leq q'_1 \otimes \ldots \otimes q'_n .$$

(b) *Sei für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ M_ν eine saturierte Teilmenge von $Q(E_\nu)$. Dann ist $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$ saturiert.*

(c) *Falls eine der Mengen $M_\nu \subset Q(E_\nu)$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ ausgeglichen ist, so ist $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$ ausgeglichen.*

Beweis. Die Eigenschaft (a) folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung (1).

(b) Sei $q^{(\mu)}$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ eine endliche Familie von Pseudonormen aus $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$. Für jedes μ gibt es dann Pseudonormen $q_\nu^{(\mu)} \in M_\nu^\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$), so dass $q^{(\mu)} \leq q_1^{(\mu)} \otimes \ldots \otimes q_n^{(\mu)}$ ist. Man erhält mit Hilfe von (a):

$$\sup_\mu q^{(\mu)} \leq \sup_\mu (q_1^{(\mu)} \otimes \ldots \otimes q_n^{(\mu)}) \leq (\sup_\mu q_1^{(\mu)}) \otimes \ldots \otimes (\sup_\mu q_n^{(\mu)}) .$$

Da jedes M_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) saturiert ist, ist $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$ es folglich auch.

(c) Falls z.B. M_1 ausgeglichen ist, so gilt für jedes $\lambda > 0$:
$\lambda(M_1 \otimes \ldots \otimes M_n) = (\lambda M_1) \otimes \ldots \otimes M_n = M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$,
d.h. $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$ ist ausgeglichen.

Sei nun der Filter ψ_ν auf $Q(E_\nu)$ für die absolutkonvexe Vektorraumlimitierung Λ_ν auf E_ν definierend und saturiert ($\nu = 1, \ldots, n$). Der Filter $\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n$ hat die Eigenschaft (I), denn für jedes $M_\nu \in \psi_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$) ist $(M_1 \otimes \ldots \otimes M_n)^\lambda = M_1^\lambda \otimes M_2 \otimes \ldots \otimes M_n$ für beliebiges $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbf{K}$. Sei z der Vektor in Gl. (2). Für jedes $x_\mu^{(k)}$ gibt es eine Menge $N_\mu^{(k)} \in \psi_\mu$, so dass $q(x_\mu^{(k)}) < \infty$ für jedes $q \in N_\mu^{(k)}$ ist. Wir setzen $N_\mu = \bigcap_k N_\mu^{(k)}$ ($\mu = 1, \ldots, n$). Für jedes

$$q \in N_1 \otimes \ldots \otimes N_n\,, \quad q^t \leq q_1 \ldots q_n\,, \quad q_\mu \in N_\mu \quad (\mu = 1, \ldots, n)\,,$$

ist dann $q(z) \leq \sum_k q_1(x_1^{(k)}) \ldots q_n(x_n^{(k)}) < \infty$.

Der Filter $\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n$ hat also auch die Eigenschaft (II). Er definiert somit eine absolutkonvexe Limitierung auf $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$.

Definition. Die von $\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n$ definierte absolutkonvexe Limitierung $\Lambda_1 \otimes_k \ldots \otimes_k \Lambda_n$ heisse die *projektive absolutkonvexe Tensorproduktlimitierung* auf $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ (vgl. [7, 8]).

Wir setzen $E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n = (E_1 \otimes \ldots \otimes E_n\,, \ \Lambda_1 \otimes_k \ldots \otimes_k \Lambda_n)$.

Satz 2. (*Seien* E_ν, Λ_ν) ($\nu = 1, \ldots, n$) *und* (F, Λ') *absolutkonvexe Limesvektorräume. Eine* n*-lineare Abbildung* $w : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ *ist genau dann im Nullpunkt stetig, wenn die assoziierte lineare Abbildung* $u : E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n \to F$ *stetig ist. Die Limitierung* $\Lambda_1 \otimes_k \ldots \otimes_k \Lambda_n$ *ist die feinste absolutkonvexe Limitierung auf* $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$, *für die die kanonische Abbildung* $t : E_1 \times \ldots \times E_n \to E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ *im Nullpunkt stetig ist.*

Beweis. (A) Sei ψ_ν für Λ_ν ($\nu = 1, \ldots, n$) definierend und saturiert und sei ψ' für Λ' definierend. Es gilt $\psi_1 \ldots \psi_n \leq (\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n)^t$, denn für jedes $M_\nu \in \psi_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, n$) gilt $M_1 \ldots M_n \supset (M_1 \otimes \ldots \otimes M_n)^t$ nach der Definition der Menge $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$. Nach [3], Satz 6, ist t im Nullpunkt stetig.

(B) Sei $w : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ im Nullpunkt stetig und sei

$$u : E_1 \otimes \ldots \otimes E_n \to F\,,\ w = u \circ t\,,$$

die zu w assoziierte lineare Abbildung. Aus $\psi_1 \ldots \psi_n \leq \psi'^{w}$ (nach [3], Satz 6, ist w genau dann im Nullpunkt stetig, wenn diese Relation erfüllt ist) folgt: Für jedes $M_\nu \in \psi_\nu$ $(\nu = 1\,, \ldots, n)$ gibt es ein $M' \in \psi'$, so dass $M_1 \ldots M_n \supset (M'^{u})^{t}_{\nu}$ gilt. M'^{u} ist somit eine Teilmenge von $M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$. Man erhält $\psi_1 \otimes \ldots \otimes \psi_n \leq \psi'^{u}$, d.h. u ist stetig (siehe [3], Satz 9).

Ist umgekehrt $u : E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n \to F$ stetig, so ist nach (A) $w = u \circ t$ im Nullpunkt stetig.

(C) Sei $t : E_1 \times \ldots \times E_n \to (E_1 \otimes \ldots \otimes E_n\,, \Lambda)$ in bezug auf die absolutkonvexe Limitierung Λ im Nullpunkt stetig. Dann ist nach (B) die Identität $id : E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n \to (E_1 \otimes \ldots \otimes E_n\,, \Lambda)$ stetig, d.h. es gilt $\Lambda_1 \otimes_k \ldots \otimes_k \Lambda_n \geq \Lambda$.

Nach [3], Satz 7, ist die kanonische Abbildung

$$t : E_1 \times \ldots \times E_n \to E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n$$

überall stetig, falls die absolutkonvexen Räume $E_1\,, \ldots, E_n$ ausgeglichen sind.

Kor. 2. *Mit denselben Bezeichnungen wie in Satz 2 gilt: Falls die Räume $E_1\,, \ldots, E_n$ ausgeglichen sind, so ist w genau dann stetig, wenn u stetig ist. Die ausgeglichene Limitierung $\Lambda_1 \otimes_k \ldots \otimes_k \Lambda_n$ ist die feinste absolutkonvexe Limitierung auf $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$, für die t stetig ist.*

Beweis. Die Limitierung $\Lambda_1 \otimes_k \ldots \otimes_k \Lambda_n$ ist ausgeglichen nach Lemma 1 (b) und (c) und nach [3], Satz 8.

Satz 3. *Sei q_ν eine Pseudonorm auf dem Vektorraum E_ν $(\nu = 0\,, \ldots, n)$ und seien* $h : E_0 \otimes (E_1 \otimes \ldots \otimes E_n) \to E_0 \otimes \ldots \otimes E_n$

und $k : (E_0 \otimes \ldots \otimes E_{n-1}) \otimes E_n \to E_0 \otimes \ldots \otimes E_n$

die natürlichen Abbildungen. Dann ist

$$q_0 \otimes (q_1 \otimes \ldots \otimes q_n) = (q_0 \otimes \ldots \otimes q_n)^{h}$$

und

$$(q_0 \otimes \ldots \otimes q_{n-1}) \otimes q_n = (q_0 \otimes \ldots \otimes q_n)^{k}.$$

Beweis. Wir beweisen die erste Gleichung. Die Richtigkeit der zweiten kann in derselben Weise nachgewiesen werden. Wir setzen $p_0 = q_0 \otimes \ldots \otimes q_n$ und $p_1 = q_1 \otimes \ldots \otimes q_n$. Für jedes $x_\nu \in E_\nu$ $(\nu = 0\,, \ldots, n)$ gilt $(q_0 \otimes p_1)^{h^{-1}} (x_0 \otimes \ldots \otimes x_n) = q_0(x_0) \ldots q_n(x_n)$. Man erhält mit Hilfe von Gl. (1): $(q_0 \otimes p_1)^{h^{-1}} \leq p_0$. Seien $t_1 : E_1 \times \ldots \times E_n \to E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$ und $t_2 : E_0 \times (E_1 \otimes \ldots \otimes E_n) \to E_0 \otimes (E_1 \otimes \ldots \otimes E_n)$ die kanonischen Abbildungen. Die Abbildung $\bar{x}_0 : E_1 \otimes \ldots \otimes E_n \to E_0 \otimes (E_1 \otimes \ldots \otimes E_n)$, die durch $\bar{x}_0(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_0 \otimes (x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$ definiert ist, ist für jedes $x_0 \in E_0$ linear. Offenbar gilt $p_0^{h \circ \bar{x}_0 \circ t_1} \leq q_0(x_0) q_1 \ldots q_n$ für jedes $x_0 \in E_0$. Hieraus folgt $p_0^{h \circ \bar{x}_0} \leq q_0(x_0) p_1$ und ferner $p_0^{h \circ t_2} \leq q_0 p_1$. Wir erhalten nun schliesslich die Ungleichung $p_0^h \leq q_0 \otimes p_1$. Es gilt somit $p_0^h = q_0 \otimes p_1$ und die erste Gleichung ist damit bewiesen.

Aus Satz 3 folgt unmittelbar:

Satz 4. *Seien* E_ν $(\nu = 0, \ldots, n)$ *absolutkonvexe Limesvektorräume. Dann sind die natürlichen Abbildungen*

$$h : E_0 \otimes_k \Big(\bigotimes_{k\,\nu=1}^{n} E_\nu\Big) \to \bigotimes_{k\,\nu=0}^{n} E_\nu \quad \textit{und} \quad k : \Big(\bigotimes_{k\,\nu=0}^{n-1} E_\nu\Big) \otimes_k E_n \to \bigotimes_{k\,\nu=0}^{n} E_\nu$$

lineare Homöomorphismen.

Offensichtlich gilt auch

Satz 5. *Für je zwei absolutkonvexe Limesvektorräume* E *und* F *sind* $E \otimes_k F$ *und* $F \otimes_k E$ *in kanonischer Weise homöomorph.*

Satz 6. *Seien* $u_i : E_i \to F_i$ $(i = 1, 2)$ *stetige lineare Abbildungen zwischen den absolutkonvexen Limesvektorräumen* E_i *und* F_i $(i = 1, 2)$. *Dann ist ihr Kronecker-Produkt* $u_1 \otimes u_2 : E_1 \otimes_k E_2 \to F_1 \otimes_k F_2$ *stetig.* $u_1 \otimes u_2$ *ist ein linearer Homöomorphismus, wenn dies für* u_1 *und* u_2 *gilt.*

Beweis. $u_1 \otimes u_2$ ist die zu der im Nullpunkt stetigen bilinearen Abbildung $t \circ (u_1 \times u_2)$ assoziierte lineare Abbildung und ist folglich stetig (t bezeichnet die kanonische Abbildung $F_1 \times F_2 \to F_1 \otimes F_2$). Falls v_i eine stetige Inverse zu u_i ist $(i = 1, 2)$, so ist $v_1 \otimes v_2$ eine stetige Inverse zu $u_1 \otimes u_2$.

Ferner gilt

Satz 7. *Jeder ausgeglichene, absolutkonvexe Limesvektorraum* E *ist in kanonischer Weise zu* $\mathbf{K} \otimes_k E$ *homöomorph.*

Beweis. Der kanonische Isomorphismus $s : \mathbf{K} \otimes E \to E$, $s : \lambda \otimes x \mapsto \lambda x$, ist stetig, da die Skalarmultiplikation stetig ist.

Der saturierte Filter $\psi_0 = [\{\Gamma_0\}]$, $\Gamma_0 = \{q \in Q(\mathbf{K}) | q \leq \lambda p_0, \lambda > 0\}$, wo p_0 die natürliche Norm auf $\mathbf{K}$ bezeichnet, ist für die natürliche Topologie auf $\mathbf{K}$ definierend. Sei ψ für die absolutkonvexe und ausgeglichene Limitierung auf E definierend und saturiert (vgl. [3], Satz 8). Für jedes ausgeglichene, saturierte $M \in \psi$ gilt $M \supset (\Gamma_0 \otimes M)^{s^{-1}}$ denn für jedes $q \in \Gamma_0 \otimes M$ mit $q^t \leq \lambda p_0 q$, $\lambda > 0$, $q \in M$, ist $q^{s^{-1}}(x) = q^t(1, x) \leq \lambda q(x)$ für jedes $x \in E$. Es gilt somit $\psi \leq (\psi_0 \otimes \psi)^{s^{-1}}$, d.h. s^{-1} ist stetig.

Seien $E_1, \ldots, E_n, F$ absolutkonvexe Limesvektorräume und sei ${}^\circ\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ die Menge der im Nullpunkt stetigen, n-linearen Abbildungen $w : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$. Für die gröbste ausgeglichene, absolutkonvexe Limitierung Λ_p auf ${}^\circ\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$, für die die Evaluation $\omega : {}^\circ\mathscr{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \times E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ im Nullpunkt stetig ist, gilt nach [4]: Für jeden ausgeglichenen, absolutkonvexen Raum Z und jedes lineare $f : Z \to ({}^\circ\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F), \Lambda_p) = {}^\circ\mathcal{L}_p(E_1, \ldots, E_n; F)$ ist f genau dann stetig, wenn die assoziierte $(n+1)$-lineare Abbildung $\tilde{f} : Z \times E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ im Nullpunkt stetig ist. Diese Eigenschaft der Limitierung Λ_p wird im Beweis des nächsten Satzes benutzt.

Im folgenden bezeichnet $\hat{w} : E_1 \otimes \ldots \otimes E_n \to F$ die zu der n-linearen Abbildung $w : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ assoziierte lineare Abbildung. $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ sei die Menge aller stetigen $w \in {}^\circ\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Satz 8. *Seien $E_1, \ldots, E_n$ und F absolutkonvexe Limesvektorräume. Dann ist die durch $\xi : w \mapsto \hat{w}$, definierte natürliche Abbildung*

$$\xi : {}^\circ\mathcal{L}_p(E_1, \ldots, E_n; F) \to \mathcal{L}_p(E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n; F)$$

ein linearer Homöomorphismus.

Beweis. Sei

$$h : {}^\circ\mathcal{L}_p(E_1, \ldots, E_n; F) \otimes_k (E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n) \to {}^\circ\mathcal{L}_p(E_1, \ldots, E_n; F) \otimes_k E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n$$

der kanonische Homöomorphismus. Für die zu der bilinearen Abbildung $\alpha(\xi) : {}^\circ\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \times (E_1 \otimes \ldots \otimes E_n) \to F$ assoziierte Abbildung $\widehat{\alpha(\xi)} : {}^\circ\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \otimes (E_1 \otimes \ldots \otimes E_n) \to F$ gilt $\widehat{\alpha(\xi)} = \hat{\omega} \circ h$. Da die Evaluation $\omega : {}^\circ\mathcal{L}_p(E_1, \ldots, E_n; F) \times E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ im Nullpunkt stetig ist, ist die Abbildung ξ stetig. Ähnlich folgt, dass ξ^{-1} stetig ist. Es gilt nämlich $\widehat{\alpha(\xi^{-1})} = \hat{\omega}_1 \circ h_1^{-1}$, wo ω_1 die Evaluation

$$\mathcal{L}(E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n; F) \times (E_1 \otimes \ldots \otimes E_n) \to F$$

und

$$h_1 : \mathcal{L}_p(E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n; F) \otimes_k (E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n) \to \mathcal{L}_p(E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n; F) \otimes_k E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n$$

der kanonische Homöomorphismus ist.

Bemerkung. Der für Λ_p definierende Filter wurde in [4] durch Pseudonormen der Form $q'/q_1 \ldots q_n$ charakterisiert. Offenbar kann man den obigen Satz auch mit Hilfe von Satz 1 (b) beweisen.

Sei Λ_c die Limitierung der stetigen Konvergenz (siehe [2]). Genau wie oben beweist man Satz 9. Zu beachten ist, dass Λ_c nur auf $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ definiert ist.

Satz 9. *Seien $E_1, \ldots, E_n$ ausgeglichene, absolutkonvexe Limesvektorräume und F ein absolutkonvexer Limesvektorraum. Dann ist die natürliche Abbildung $\xi : \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \to \mathcal{L}(E_1 \otimes_k \ldots \otimes_k E_n; F)$ ein linearer (Λ_c, Λ_c)-Homöomorphismus.*

Satz 10. *Seien* E_i *und* F_i $(i = 1\,,2)$ *absolutkonvexe Limesvektorräume. Dann ist die durch* $(u\,,v) \mapsto u \otimes v$ *definierte bilineare Abbildung* $\eta : \mathcal{L}(E_1\,;F_1) \times \mathcal{L}(E_2\,;F_2) \to \mathcal{L}(E_1 \otimes_k E_2\,;F_1 \otimes_k F_2)$ $(\Lambda_p \times \Lambda_p\,,\Lambda_p)$*-stetig und im Nullpunkt* $(\Lambda_c \times \Lambda_c\,,\Lambda_c)$*-stetig.*

Beweis. Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}(E_1\,;F_1) \otimes \mathcal{L}(E_2\,;F_2) \otimes (E_1 \otimes E_2) \arrow[r, "\widehat{\alpha(\eta)}"] & F_1 \otimes F_2 \\
(\mathcal{L}(E_1\,;F_1) \otimes E_1) \otimes (\mathcal{L}(E_2\,;F_2) \otimes E_2) \arrow[u, "h"] \arrow[ur, phantom] & \arrow[u, "(t \circ (\hat{\omega}_1 \times \hat{\omega}_2))^{\wedge}"']
\end{tikzcd}$$

wo h die natürliche Abbildung, $\omega_i : \mathcal{L}(E_i\,;F_i) \times E_i \to F_i$ $(i = 1\,,2)$ die Evaluation und $t : F_1 \times F_2 \to F_1 \otimes F_2$ die kanonische Abbildung ist, ist kommutativ. Da ω_1 und ω_2 bezüglich Λ_p und Λ_c stetig sind (siehe [4] und [2]), folgt die Behauptung hieraus. Die Limitierung Λ_c ist nämlich absolutkonvex nach [4], Satz 6.

Sei $(E\,,\Lambda)$ ein absolutkonvexer Limesvektorraum und sei L ein linearer Unterraum von E. Wir bezeichnen mit $x \mapsto \bar{x}$ die kanonische Abbildung aus E nach E/L. Jeder Pseudonorm q auf E ist eine Pseudonorm $\bar{q}$ auf E/L, $\bar{q}(\bar{x}) = \inf\{q(y) | y \in \bar{x}\}$, zugeordnet. Falls ψ die Limitierung Λ definiert, so ist $\bar{\psi} = [\{\bar{M} | M \in \psi\}]$ für die Quotientenlimitierung auf E/L definierend ([3], Satz 4). Dabei ist $\bar{M} = \{\bar{q} | q \in M\}$.

Satz 11. *Es sei* E *bzw.* F *ein absolutkonvexer Limesvektorraum mit dem Unterraum* G *bzw.* H. *Dann ist die kanonische Abbildung* $(E/G) \otimes_k (F/H) \to (E \otimes_k F)/\Gamma(G\,,H)$, *wo* $\Gamma(G\,,H)$ *den von der Menge* $\{x \otimes y | x \in G$ oder $y \in H\}$ *erzeugten Unterraum bezeichnet, ein linearer Homöomorphismus.*

Beweis. Sei $u : \bar{x} \otimes \bar{y} \to \overline{x \otimes y}$ der kanonische, lineare Isomorphismus. Es genügt zu zeigen, dass für beliebige Pseudonorme q_1 und q_2 auf E bzw. F $\bar{q}_1 \otimes \bar{q}_2 = (\overline{q_1 \otimes q_2})^u$ ist. Für jedes $x \in E$ und jedes $y \in F$ ist $(\overline{q_1 \otimes q_2})(\overline{x \otimes y}) \leq q_1(x) q_2(y)$. Folglich gilt $(\overline{q_1 \otimes q_2})(\overline{x \otimes y}) \leq \bar{q}_1(\bar{x}) \bar{q}_2(\bar{y})$, woraus nach Gl. (1) die Ungleichung $(\overline{q_1 \otimes q_2})^u \leq \bar{q}_1 \otimes \bar{q}_2$ folgt. Sei $a \in (E/G) \otimes (F/H)$ und $z \in u(a)$ beliebig. Für jede Zerlegung $z = \sum x^{(k)} \otimes y^{(k)}$ von z ist $\sum \bar{x}^{(k)} \otimes \bar{y}^{(k)}$ eine Zerlegung von a. Man erhält mit Hilfe von (3):

$$(\bar{q}_1 \otimes \bar{q}_2)(a) \leq \inf \sum_k \bar{q}_1(\bar{x}^{(k)}) \bar{q}_2(\bar{y}^{(k)}) \leq \inf \sum_k q_1(x^{(k)}) q_2(y^{(k)}) = (q_1 \otimes q_2)(z)\,,$$

wo das Infimum über alle möglichen Zerlegungen von z genommen wird. Da dieses für jedes $z \in u(a)$ und jedes a gilt, ist $\bar{q}_1 \otimes \bar{q}_2 \leq (\overline{q_1 \otimes q_2})^u$. Es gilt somit $\bar{q}_1 \otimes \bar{q}_2 = (\overline{q_1 \otimes q_2})^u$.

Sei (E, Λ) ein ausgeglichener, absolutkonvexer Limesvektorraum und sei der saturierte Filter ψ für Λ definierend. Durch

$$(4) \qquad q_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } q(x) < \infty \text{ für jedes } q \in M \text{ ist} \\ \infty & \text{falls es ein } q \in M \text{ mit } q(x) = \infty \text{ gibt} \end{cases}$$

wird für jede Teilmenge M von $Q(E)$ eine Pseudonorm q_M auf E definiert. Die Einschränkungen auf $L_M = q_M^{-1}(0)$ der Pseudonormen in M sind Seminormen und definieren eine lokalkonvexe Vektorraumtopologie τ_M auf L_M. Sei χ eine Filterbasis von ψ aus lauter ausgeglichenen, saturierten Mengen. Für je zwei $M, N \in \chi$ mit $M \supset N$ sei $i_{NM} : L_M \to L_N$ die Inklusion. Diese ist offensichtlich (τ_M, τ_N)-stetig. Falls für jedes $M \in \chi$ die Beziehung $q_M \in M$ erfüllt ist, so ist (E, Λ) induktiver Limes (in der Kategorie der Limesvektorräume) der gerichteten Familie $(L_M, \tau_M)_{M \in \chi}$ von lokalkonvexen Räumen. Für jedes $M \in \chi$ ist nämlich dann $i_M(\mathcal{U}_M) = \mathcal{F}_M$, wobei $\mathcal{U}_M$ der Nullumgebungsfilter im Raum (L_M, τ_M) und $i_M : L_M \to E$ die Inklusion bezeichnet (siehe [8], Satz 1.2.2). (E, Λ) ist also ein Marinescu-Raum.

Wir setzen nun umgekehrt voraus, dass (E, Λ) ein Marinescu-Raum ist. Dieser Raum ist dann bezüglich stetiger Inklusionen $i_{\varkappa\iota} : E_\iota \to E_\varkappa$, $\iota \leq \varkappa$, induktiver Limes einer durch $\leq$ gerichteten Familie $(E_\iota, \tau_\iota)_{\iota \in I}$ von lokalkonvexen Räumen. Sei für jedes $\iota \in I$ M_ι die Menge der τ_ι-stetigen Seminormen auf E_ι. Jedes $q \in M$ kann als Pseudonorm auf ganz E fortgesetzt werden: Wir setzen $q'(x) = q(x)$ falls $x \in E_\iota$ und $q'(x) = \infty$ falls $x \notin E_\iota$ ist. Ferner setzen wir $M'_\iota = \{q' | q \in M\}$ für jedes $\iota \in I$. Die Filterbasis $\{M'_\iota | \iota \in I\}$ erzeugt einen saturierten Filter auf $Q(E)$, der Λ definiert. Für jedes $\iota \in I$ ist M'_ι ausgeglichen und es gilt $q_{M'_\iota} \in M'_\iota$.

Wir fassen zusammen:

Satz 12. *Ein ausgeglichener, absolutkonvexer Limesvektorraum (E, Λ) mit dem saturierten, definierenden Filter ψ ist genau dann ein Marinescu-Raum, wenn die Beziehung $q_M \in M$ für jedes M in einer Filterbasis χ von ψ aus lauter ausgeglichenen, saturierten Mengen gilt. Dabei ist für jedes $M \in \chi$ die Pseudonorm q_M durch* (4) *definiert.*

Dieser Satz kann auch aus einer von K. Kutzler in [11] gegebenen internen Charakterisierung der Marinescu-Räume hergeleitet werden.

Satz 13. *Für je zwei Marinescu-Räume E und F ist $E \otimes_k F$ ein Marinescu-Raum.*

Beweis. Der saturierte Filter ψ_1 (bzw. ψ_2) sei für die Limitierung auf E (bzw. F) definierend. ψ_1 (bzw. ψ_2) besitzt nach Satz 12 eine Basis χ_1 (bzw. χ_2) aus ausgeglichenen, saturierten Mengen derart, dass für jedes $M \in \chi_1$ (bzw. $M \in \chi_2$) die Beziehung $q_M \in M$ erfüllt ist. Für beliebiges

$M_i \in \chi_i$ $(i = 1, 2)$ ist $q_{M_1 \otimes M_2}(x \otimes y) \leq q_{M_1}(x) q_{M_2}(y)$ für jedes $x \in E$, $y \in F$, denn falls $q_1(x)$ und $q_1(y)$ für jedes $q_i \in M_i$ $(i = 1, 2)$ endlich sind, so gilt dasselbe für $q(x \otimes y)$ für jedes $q \in M_1 \otimes M_2$. Man erhält $q_{M_1 \otimes M_2} \leq q_{M_1} \otimes q_{M_2}$. Da $\{M_1 \otimes M_2 | M_i \in \chi_i, \ i = 1, 2\}$ eine Basis von $\psi_1 \otimes \psi_2$ aus ausgeglichenen, saturierten Mengen ist (Lemma 1), so ist die von $\psi_1 \otimes \psi_2$ definierte Limitierung eine Marinescu-Limitierung (Satz 12). Für jedes $M_i \in \chi_i$ $(i = 1, 2)$ ist ja $q_{M_1 \otimes M_2} \in M_1 \otimes M_2$.

Bemerkung. Die projektive, absolutkonvexe Tensorproduktlimitierung auf $E \otimes F$ ist offenbar die feinste Marinescu-Limitierung, für die die kanonische Abbildung $t : E \times F \to E \otimes F$ stetig ist, falls E und F Marinescu-Räume sind. Sie fällt somit in diesem Fall mit einer von H. Jarchow eingeführten Tensorproduktlimitierung zusammen ([8], Satz 2.3.9). Falls E und F lokalkonvexe, topologische Vektorräume sind, so ist die projektive, absolutkonvexe Tensorproduktlimitierung auf $E \otimes F$ mit der von A. Grotendieck in [7] eingeführten projektiven Tensorprodukttopologie identisch (siehe [8], Seite 152).

Bemerkung. Seien (E, Λ_1) und (F, Λ_2) absolutkonvexe Limesvektorräume. Mit Hilfe einer Beweisführung in [8] (Seite 153) beweist man leicht, dass mit $\Lambda_1 \otimes_k \Lambda_2$ auch Λ_1 und Λ_2 separiert sind. Umgekehrt folgt aus [8], Satz 2.3.11, und aus Satz 13, dass $\Lambda_1 \otimes_k \Lambda_2$ separiert ist, falls Λ_1 und Λ_2 separierte Marinescu-Limitierungen sind.

3. Direkte Summen und Tensoralgebren

Sei $(E_\iota)_{\iota \in I}$ eine nichtleere Familie von Vektorräumen und $(q_\iota)_{\iota \in I}$ eine Familie von Pseudonormen $q_\iota \in Q(E_\iota)$. Durch

(5) $$\bigoplus_{\iota \in I} q_\iota = \sup_{q^{i_\iota} \leq q_\iota ; \iota \in I} q \qquad (q \in \bigoplus_{\iota \in I} E_\iota)$$

wird eine Pseudonorm $\bigoplus_{\iota \in I} q_\iota$ auf $\bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$ definiert. Hierbei bezeichnet $i_\iota : E_\iota \to \bigoplus E_\varkappa$ für jedes $\iota \in I$ die natürliche Injektion. Die Pseudonorm $\bigoplus q_\iota$ ist gleich der Pseudonorm p, die an der Stelle $z = \sum_{\iota \in I} x_\iota \in \bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$ $(x_\iota \in E_\iota, x_\iota \neq 0$ nur für endlich viele $\iota \in I)$ den Wert

(6) $$p(z) = \sum_{\iota \in I} q_\iota(x_\iota)$$

annimmt.

Für jeden Vektorraum E sei q_∞ das grösste Element im Verband $Q(E)$. I^* bezeichne die Menge der endlichen Teilmengen von I. Für jedes $J \in I^*$ und jede Familie $(M_\iota)_{\iota \in J}$ von Teilmengen $M_\iota \subset Q(E_\iota)$, setzen wir

$\bigoplus_{\iota \in J} M_\iota = \{q \in Q(\oplus E) | q \leq \oplus q_\iota, q_\iota \in M_\iota \text{ für } \iota \in J \text{ und } q_\iota = q_\infty \text{ für } \iota \notin J\}$.

Sei nun $((E_\iota, \Lambda_\iota))_{\iota \in I}$ eine Familie von absolutkonvexen Limesvektorräumen und sei der saturierte Filter ψ_ι für jedes $\iota \in I$ für Λ_ι definierend. Wir setzen

$$\bigoplus_{\iota \in I} \psi_\iota = [\{\bigoplus_{\iota \in I} M_\iota | M \in \psi_\iota \text{ für jedes } \iota \in J, \ J \in I^*\}].$$

Dieser Filter ist saturiert und genügt (I) und (II). Er definiert somit eine absolutkonvexe Limitierung $\bigoplus_{\iota \in I} \Lambda_\iota$ auf $\bigoplus_{\iota \in I} E_\iota$.

Satz 14. *Eine lineare Abbildung $f: \oplus E_\varkappa \to F$ nach einem absolutkonvexen Limesvektorraum (F, Λ') ist genau dann $(\oplus \Lambda_\varkappa, \Lambda')$-stetig, wenn für jedes $\iota \in I$ die Abbildung $f \circ i_\iota$ $(\Lambda_\iota, \Lambda')$-stetig ist. Für jedes $\iota \in I$ ist $i_\iota : E_\iota \to \oplus E_\varkappa$ eine Einbettung.*

Beweis. Für jedes $\iota \in I$ ist $\psi_\iota = (\oplus \psi_\varkappa)^{i_\iota}$, d.h. i_ι ist eine Einbettung ([3], Satz 11). Ist f $(\oplus \Lambda_\varkappa, \Lambda')$-stetig, so ist folglich $f \circ i_\iota$ $(\Lambda_\iota, \Lambda')$-stetig für jedes $\iota \in I$.

Wir nehmen nun umgekehrt an, dass $f \circ i_\iota$ für jedes $\iota \in I$ $(\Lambda_\iota, \Lambda')$-stetig ist. Sei der Filter ψ' für Λ' definierend. Dann ist $\psi_\iota \leq \psi'^{f \circ i_\iota}$, d.h. für jedes $\iota \in I$ und jedes $M_\iota \in \psi_\iota$ gibt es ein $M'_\iota \in \psi'$ derart, dass $M_\iota \supset (M'^f_\iota)^{i_\iota}$ gilt. Für jedes $J \in I^*$ setzen wir $M'_J = \bigcap \{M'_\iota | \iota \in J\}$. Nach der Definition der Menge $\bigoplus_{\iota \in J} M_\iota$ ist diese Menge Obermenge zu M'^f_J. Man erhält: $\oplus \psi_\iota \leq \psi'^f$, d.h. f ist stetig.

Bemerkung. Aus Satz 14 folgt, dass $\oplus \Lambda_\varkappa$ die feinste absolutkonvexe Limitierung auf $\oplus E_\varkappa$ ist, für die $i_\iota : E_\iota \to \oplus E_\varkappa$ für jedes $\iota \in I$ stetig ist. H. R. Fischer hat in [5] eine Limitierung auf $\oplus E_\varkappa$ als induktiver Limes der Unterräume $((\bigoplus_{\iota \in J} E_\iota, \prod_{\iota \in J} \Lambda_\iota))_{J \in I^*}$ bezüglich der natürlichen Inklusionen definiert. Diese Limitierung ist nach [8] die feinste Vektorraumlimitierung, für die alle i_ι stetig sind. Da Produkte und induktive Limites (in der Kategorie der Limesvektorräume) von absolutkonvexen Räumen absolutkonvex sind (die in [12] hierfür gegebene Beweise sind für den reellen Fall durchgeführt aber können unmittelbar verallgemeinert werden), so ist folglich $\oplus \Lambda_\varkappa$ gleich der von Fischer definierten Limitierung. Für weitere Eigenschaften der Limitierung $\oplus \Lambda_\varkappa$ verweisen wir deswegen auf [8].

Satz 15. *Es seien $(E_\iota)_{\iota \in I}$ und $(F_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ Vektorräume $(I \neq \phi, K \neq \phi)$, $u : (\bigoplus_I E_\iota) \otimes (\bigoplus_K F_\varkappa) \to \bigoplus_{I \times K} (E_\iota \otimes F_\varkappa)$ der kanonische lineare Isomorphismus und $(q_\iota)_{\iota \in I}$ und $(p_\varkappa)_{\varkappa \in K}$ Familien von Pseudonormen mit $q_\iota \in Q(E_\iota)$ bzw. $p_\varkappa \in Q(F_\varkappa)$ für jedes $\iota \in I$ bzw. $\varkappa \in K$. Dann ist*

$$(\underset{I}{\oplus} q_\iota) \otimes (\underset{K}{\oplus} p_\varkappa) = (\underset{I\times K}{\oplus} (q_\iota \otimes p_\varkappa))^u .$$

Beweis. Sei $i_{\iota\varkappa} : E_\iota \otimes F_\varkappa \to \oplus (E_\lambda \otimes F_\mu)$ für jedes $\iota \in I$, $\varkappa \in K$ die natürliche Injektion. Für beliebiges $\iota \in I$, $\varkappa \in K$ und für jedes $x_\iota \in E_\iota$, $y_\varkappa \in F_\varkappa$ ist $((\oplus q_\lambda) \otimes (\oplus p_\mu))^{u^{-1}\circ i_{\iota\varkappa}} (x_\iota \otimes y_\varkappa) \leq q_\iota(x_\iota)p_\varkappa(y_\varkappa)$. Hieraus erhält man mit Hilfe von (1) und (5) die Ungleichung

$$((\oplus q_\lambda) \otimes (\oplus p_\mu))^{u^{-1}} \leq \oplus (q_\lambda \otimes p_\mu) .$$

Andererseits gilt für jedes $\sum x_\iota \in \oplus E_\iota$, $x_\iota \in E_\iota$, und jedes $\sum y_\varkappa \in \oplus F_\varkappa$, $y_\varkappa \in F_\varkappa$, die Beziehung

$$(\underset{I\times K}{\oplus} (q_\iota \otimes p_\varkappa))^u ((\sum_I x_\iota) \otimes (\sum_K y_\varkappa)) \leq \underset{I\times K}{\oplus} q_\iota (x_\iota)p_\varkappa(y_\varkappa) =$$

$$= (\underset{I}{\oplus} q_\iota)(\sum_I x_\iota)(\underset{K}{\oplus} p_\varkappa)(\sum_K y_\varkappa) ,$$

woraus mit Hilfe von (1) die umgekehrte Ungleichung folgt. Satz 15 ist damit bewiesen.

Aus Satz 15 folgt:

Satz 16. *Für beliebige nichtleere Familien* $((E_\iota , \Lambda_\iota))_{\iota\in I}$ *und* $((F_\varkappa , \Lambda'_\varkappa))_{\varkappa\in K}$ *von absolutkonvexen Limesvektorräumen ist die kanonische Abbildung* $u : (\underset{I}{\oplus} E_\iota) \otimes (\underset{K}{\oplus} F_\varkappa) \to \underset{I\times K}{\oplus} (E_\iota \otimes F_\varkappa)$ *ein linearer* $((\oplus \Lambda_\iota) \otimes_k (\oplus \Lambda'_\varkappa)$, $\oplus (\Lambda_\iota \otimes_k \Lambda'_\varkappa))$*-Homöomorphismus.*

Bemerkung. Sei $((E_\iota , \Lambda_\iota))_{\iota\in I}$ eine Familie von absolutkonvexen Räumen und sei der saturierte Filter ψ_ι für jedes $\iota \in I$ für Λ_ι definierend. Wir setzen $\oplus_t \psi_\iota = [\{\oplus M_\iota | M_\iota \in \psi_\iota$ für jedes $\iota \in I\}]$, wobei $\oplus M_\iota$ die Menge $\{q \in Q (\oplus E_\iota) | q \leq \oplus q_\iota , \; q_\iota \in M_\iota$ für jedes $\iota \in I\}$ bezeichnet. $\oplus_t \psi_\iota$ definiert eine Limitierung $\oplus_t \Lambda_\iota$ auf $\oplus E_\iota$, die folgende Eigenschaft hat: Für jeden lokalkonvexen (topologischen) Raum (Z , τ) und jedes lineare $f : \oplus E \to Z$ ist f genau dann $(\oplus_t \Lambda_\iota , \tau)$-stetig, wenn für jedes $\iota \in I$ die Abbildung $f \circ i_\iota$ (Λ_ι , τ)-stetig ist. Falls die Räume $((E_\iota , \Lambda_\iota))_{\iota\in I}$ lokalkonvex sind, so ist $(\oplus E_\iota , \oplus_t \Lambda_\iota)$ offensichtlich gleich der üblichen topologischen, direkten Summe dieser Räume. Aus Satz 15 folgt, dass die Bildung der direkten Summe $\oplus_t \Lambda_\iota$ mit der Bildung der projektiven, absolutkonvexen Tensorproduktlimitierung verträglich ist, d.h. dass die kanonische Abbildung u in Satz 16 auch ein $((\oplus_t \Lambda_\iota) \otimes_k (\oplus_t \Lambda'_\varkappa)$, $\oplus_t (\Lambda_\iota \otimes_k \Lambda'_\varkappa))$-Homöomorphismus ist.

Sei (E , Λ) ein ausgeglichener, absolutkonvexer Raum. Das Tensorprodukt von n Faktoren E sei $\otimes^n E$ und die projektive, absolutkonvexe Tensorproduktlimitierung auf $\otimes^n E$ sei mit $\otimes_k^n \Lambda$ bezeichnet. Wir setzen $(\otimes^0 E , \otimes_k^0 \Lambda)$ gleich $(\mathbf{K} , \Lambda_0)$, wo Λ_0 die natürliche Topologie auf $\mathbf{K}$ ist (Λ_0 ist ja die feinste Vektorraumlimitierung auf $\mathbf{K}$; siehe [1] und [10]).

Auf der Tensoralgebra $\otimes E = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \otimes^n E$, wo $\mathbf{N}$ die Menge $\{0, 1, 2, \ldots\}$ bezeichnet, sei $\otimes_k \Lambda$ die Limitierung $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \otimes_k^n \Lambda$. Der Raum $\otimes_k E = (\otimes E, \otimes_k \Lambda)$ ist eine Limesalgebra, denn die zu der kanonischen Multiplikation assoziierte lineare Abbildung ist stetig, wegen des Homöomorphismus $(\otimes_k E) \otimes_k (\otimes_k E) \to \bigoplus_{n,m \in \mathbf{N}} (\otimes_k^{n+m} E)$ (Sätze 16, 4, 2, Bemerkung nach Satz 14).

Folgendes gilt (vgl. [9], Th. 3.1):

Satz 17. (1) *Für jeden ausgeglichenen, absolutkonvexen Limesvektorraum* (E, Λ) *ist* $(\otimes E, \otimes_k \Lambda)$ *eine ausgeglichene, absolutkonvexe Limesalgebra. Falls* $E \neq \{0\}$ *ist, so gibt es keine Vektorraumtopologie auf* $\otimes E$, *die feiner als* $\otimes_k \Lambda$ *ist.*

(2) *Für jede lineare Abbildung* $f: E \to A$ *von einem ausgeglichenen, absolutkonvexen Raum* (E, Λ) *nach einer absolutkonvexen, assoziativen, unitären Limesalgebra* (A, Λ_A) *ist* f *genau dann* (Λ, Λ_A)*-stetig, wenn der von* f *definierte Algebra-Homomorphismus* $f^{\otimes}: \otimes E \to A$ $(\otimes_k \Lambda, \Lambda_A)$*-stetig ist. Die Limitierung* $\otimes_k \Lambda$ *ist also die feinste absolutkonvexe Algebra-Limitierung auf* $\otimes E$, *für die die natürliche Injektion* $E \to \otimes E$ *stetig ist.*

Beweis. (1) Nach 2.2.16 in [8] gibt es keine Vektorraumlimitierung feiner als $\otimes_k \Lambda$, falls $E \neq \{0\}$ ist. (2) folgt aus Satz 14, Kor. 2 und aus der Tatsache, dass der von der natürlichen Injektion $E \to \otimes E$ definierte Algebra-Homomorphismus die Identität auf $\otimes E$ ist.

Åbo Akademi
Mathematisches Institut
SF-20500 Åbo 50
Finnland

Literatur

[1] BINZ, E.: Ein Differenzierbarkeitsbegriff in limitierten Vektorräumen. - Comment. Math. Helv. 41, 137–156 (1966).

[2] —»— KELLER, H. H.: Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume. - Ann. Acad. Sci. Fenn. A. I. 383 (1966).

[3] BJON, S.: Über absolutkonvexe Limesvektorräume. - Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math. 43, 181–188 (1973).

[4] —»— Eine ausgeglichene Limitierung auf Räumen n-linearer Abbildungen zwischen Limesvektorräumen. - Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math. 43, 189–201 (1973).

[5] FISCHER, H. R.: Limesräume. - Math. Ann. 137, 269–303 (1959).

[6] FRÖLICHER, A., BUCHER, W.: Calculus in vector spaces without norm. - Lecture Notes in Mathematics 30. Springer-Verlag 1966.

[7] GROTHENDIECK, A.: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires. - Mem. Amer. Math. Soc. Nr. 16 (1955).

[8] JARCHOW, H.: Marinescu-Räume. - Comment. Math. Helv. 44, 138–163 (1969).

[9] —»— On tensor algebras of Marinescu spaces. - Math. Ann. 187, 163–174 (1970).

[10] KUTZLER, K.: Eine Bemerkung über endlichdimensionale, separierte, limitierte Vektorräume. - Arch. Math. (Basel) 20, 165–168 (1969).

[11] —»— Bemerkungen über unendlichdimensionale, separierte Limesvektorräume und Limesgruppen. - J. reine angew. Math. 253, 98–116 (1972).

[12] WINGREN, C.-E.: Locally convex limit spaces. - Acta Acad. Aboensis, Ser. B 33 nr 5 (1973).

Gedruckt Dezember 1974