

ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

---

Series A

I. MATHEMATICA

527

ÜBER DEN SATZ VON STOKES

VON

PETER HERMANN

---

HELSINKI 1973  
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

<https://doi.org/10.5186/aasfm.1973.527>

Copyright © 1972 by  
Academia Scientiarum Fennica  
ISBN 951-41-0068-9

Am 8. September 1972 vorgelegt von ROLF NEVANLINNA

KESKUSKIRJAPAINO  
HELSINKI 1973

## Einleitung

F. und R. Nevanlinna führen in [4], III.2.6, eine Verallgemeinerung der alternierenden (Cartanschen) Ableitung von Differentialformen (dort Rotor genannt) ein und beweisen damit den Satz von Stokes für Simplexe ([4], III.2.7). Daran anschließend ([4], III.2.8) beginnen sie einen zweiten Beweis des Stokesschen Satzes, dessen Ansatz im Grunde genommen näherliegt als die Idee ihres zuerst zitierten Beweises. Dieser zweite Beweis wird jedoch nicht zu Ende geführt, weil das dabei benötigte gleichmäßige Verschwinden eines gewissen Restgliedes »im allgemeinen nicht direkt zu ersehen ist«.

Ziel dieser Note ist die Fortführung jenes Beweises durch eingehendere Untersuchung des fraglichen Restgliedes.

Genau diese Aufgabe hat sich bereits T. Klemola in [2] gestellt. Allerdings ändert er die Nevanlinnasche Definition des Rotors ab<sup>1)</sup>, wodurch der Beweis des Satzes von Stokes erheblich erleichtert wird. Zwar impliziert die Voraussetzung bei Nevanlinna (Stetigkeit des Nevanlinnaschen Rotors) die Existenz und Stetigkeit des Rotors im Sinne von Klemola, doch ergibt sich dies erst als Folgerung des zu beweisenden Stokesschen Satzes.

Wir führen die nachstehende Untersuchung mit einer in [1] behandelten, dem Nevanlinnaschen Rotor entsprechenden Verallgemeinerung der alternierenden Ableitung durch. Auf diese Weise vermeiden wir zusätzliche Überlegungen im Zusammenhang mit den bei Nevanlinna erforderlichen Zerlegungen eines Simplex in Teilsimplexe mit gleichmäßig beschränktem Regularitätsindex, da jetzt Würfel an die Stelle der Simplexe treten. Der hier dargestellte Beweis läßt sich jedoch ohne weiteres, etwa mit Hilfe der von H. Whitney ([5], Appendix II.4) angegebenen »Normalunterteilung« (»standard subdivision«) eines Simplex, auf die Nevanlinnasche Theorie übertragen.

Zur Vereinfachung der formalen Darstellung beschränken wir uns auf  $(n-1)$ -Differentialformen im  $n$ -dimensionalen reellen Zahlenraum  $\mathbf{R}^n$ ; zur Herleitung des Stokesschen Satzes für Differentialformen in einem

---

<sup>1)</sup> Man vergleiche <sup>2)</sup>. Die Definition von Klemola ist nicht mit der Nevanlinnaschen äquivalent, vielmehr folgt aus der Existenz des Rotors in seinem Sinn, daß der Nevanlinnasche Rotor existiert und stetig ist.

beliebigen reellen linearen Raum mit Skalarprodukt kann die hier verfolgte Idee aber auch ausgenutzt werden.

In dem Fall, daß die vorgelegte Differentialform Koeffizientenfunktionen mit Werten in einem reellen oder komplexen linearen Raum endlicher Dimension besitzt, folgt das gleichmäßige Verschwinden des in Rede stehenden Restgliedes (oder gleich der Stokessche Satz) auch aus einer von Cl. Müller [3] gefundenen Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (man vgl. [1], 5.1, oder [1a], 4.1).

### 1. Definitionen und Bezeichnungen

Wenn wir im folgenden von  $n$ -dimensionalen Würfeln sprechen, verstehen wir darunter stets kompakte  $n$ -dimensionale (nicht notwendigerweise achsenparallele) Würfel des  $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 1$ ). Den euklidischen Inhalt eines solchen Würfels  $W \subset \mathbf{R}^n$  bezeichnen wir mit  $I(W)$ . Von den vorkommenden  $(n-1)$ -Differentialformen nehmen wir an, daß ihre Koeffizientenfunktionen Werte in einem reellen oder komplexen Banachraum  $(B, \|\cdot\|)$  besitzen.

**Definition 1.1.** Es sei  $\omega$  eine in einer Umgebung  $U(x^*)$  von  $x^* \in \mathbf{R}^n$  stetige  $(n-1)$ -Differentialform. Falls dann ein solches  $f(x^*) \in B$  existiert, daß für alle  $n$ -dimensionalen Würfel  $W$  mit  $W \subset U(x^*)$  eine Zerlegung

$$\int_{\partial W} \omega = \int_W f(x^*) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + I(W) r(x^*, W)$$

besteht, wobei es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\delta(\varepsilon, x^*) > 0$  so gibt, daß  $\|r(x^*, W)\| < \varepsilon$  für alle  $W \subset \{x \in \mathbf{R}^n \mid |x - x^*| < \delta(\varepsilon, x^*)\}$  mit  $x^* \in W$  <sup>2)</sup> gilt, so heißt  $\omega$  in  $x^*$  elementar derivierbar.

Ist  $\omega$  in  $x^*$  elementar derivierbar, so ist  $f(x^*)$  eindeutig bestimmt.

Hinreichend, aber nicht notwendig zur elementaren Derivierbarkeit der stetigen Differentialform  $\omega$  ist die Differenzierbarkeit von  $\omega$  in  $x^*$ .

Wenn  $\omega$  in allen Punkten einer Menge  $M \subseteq \mathbf{R}^n$  elementar derivierbar ist, setzen wir  $f: M \ni x \mapsto f(x) \in B$  und definieren

$$d\omega := f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

Die  $n$ -Differentialform  $d\omega$  stimmt mit der üblicherweise erklärten Cartanschen Ableitung von  $\omega$  überein, falls  $\omega$  differenzierbar ist.

<sup>2)</sup> Die der Eigenschaft  $x^* \in W$  in der Nevanlinnaschen Theorie entsprechende Bedingung läßt Klemola bei seiner Definition ([2], 10) weg.

## 2. Der Satz von Stokes

Zunächst wollen wir die gleich benötigten Eigenschaften des Restgliedes  $r(x^*, W)$  aus Definition 1.1 beweisen. Dazu bemerken wir, daß wegen

$$I(W) = \int_W dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

die Identität

$$(2.1) \quad r(x^*, W) = \frac{1}{I(W)} \int_{\partial W} \omega - f(x^*)$$

besteht.

**Lemma 2.1.** *Die  $(n-1)$ -Differentialform  $\omega$  sei in allen Punkten des  $n$ -dimensionalen Würfels  $W_0$  elementar derivierbar. Wird  $W_0$  in  $N$  inhaltsgleiche Teilwürfel  $W_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) zerlegt und dann je ein Punkt  $x_i \in W_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ) gewählt, so gilt*

$$r(x_0, W_0) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N r(x_i, W_i) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (f(x_i) - f(x_0)).$$

**Beweis.** Ersetzen wir in (2.1) jeweils  $x^*$  durch  $x_i$  und  $W$  durch  $W_i$  ( $i = 0, 1, \dots, N$ ), so läßt sich die Behauptung durch einfaches Nachrechnen verifizieren, wenn wir noch die Additivität des Randintegrals und des Inhalts

$$\int_{\partial W_0} \omega = \sum_{i=1}^N \int_{\partial W_i} \omega \quad \text{bzw.} \quad I(W_0) = N I(W_i) \quad (i = 1, \dots, N)$$

berücksichtigen.

**Lemma 2.2.** *Die Voraussetzungen von Lemma 2.1 seien erfüllt. Gilt dann*

$$\|r(x_0, W_0)\| \geq C,$$

so besteht für mindestens ein  $i_1 \in \{1, \dots, N\}$  die Abschätzung

$$\|r(x_{i_1}, W_{i_1})\| \geq C - \max_{j=1, \dots, N} \|f(x_j) - f(x_0)\|.$$

**Beweis.** Wäre die Behauptung falsch, dann hätten wir für alle  $i = 1, \dots, N$

$$\|r(x_i, W_i)\| < C - \max_{j=1, \dots, N} \|f(x_j) - f(x_0)\|$$

und damit nach Lemma 2.1

$$\begin{aligned} \|r(x_0, W_0)\| &\leq \max_{i=1, \dots, N} \|r(x_i, W_i)\| + \max_{i=1, \dots, N} \|f(x_i) - f(x_0)\| \\ &< C - \max_{j=1, \dots, N} \|f(x_j) - f(x_0)\| + \max_{i=1, \dots, N} \|f(x_i) - f(x_0)\| = C \end{aligned}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung.

Mit Hilfe von Lemma 2.2 beweisen wir den Satz von Stokes:

**Satz 2.3.** Die  $(n-1)$ -Differentialform  $\omega$  sei in allen Punkten des  $n$ -dimensionalen Würfels  $W$  elementar derivierbar; darüberhinaus sei  $d\omega$  in  $W$  stetig. Dann gilt

$$\int_{\partial W} \omega = \int_W d\omega.$$

Beweis. Wir zerlegen  $W$  durch Halbieren der Kanten in  $2^n$  inhaltsgleiche Teilwürfel  $W_{1i}$  ( $i = 1, \dots, 2^n$ ). Dann halbieren wir die Kanten jedes Teilwürfels, wodurch eine Zerlegung von  $W$  in  $(2^n)^2$  inhaltsgleiche Teilwürfel  $W_{2i}$  ( $i = 1, \dots, (2^n)^2$ ) entsteht. Iterieren wir diesen Vorgang, so gewinnen wir eine Zerlegung von  $W$  in  $2^{nv}$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) Teilwürfel  $W_{vi}$  ( $i = 1, \dots, 2^{nv}$ ), wobei

$$I(W_{vi}) = \frac{1}{2^{nv}} I(W)$$

für  $v \rightarrow \infty$  gegen Null strebt.

Wir wählen je ein  $x_{vi} \in W_{vi}$  beliebig. Insbesondere in den Punkten  $x_{vi}$  ist  $\omega$  elementar derivierbar, so daß wir nach Definition 1.1

$$\int_{\partial W} \omega = \sum_{i=1}^{2^{nv}} \int_{\partial W_{vi}} \omega = \sum_{i=1}^{2^{nv}} \int_{W_{vi}} f(x_{vi}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n + \sum_{i=1}^{2^{nv}} I(W_{vi}) r(x_{vi}, W_{vi})$$

für jedes  $v \in \mathbf{N} := \{1, 2, \dots\}$  erhalten. Auf Grund der Stetigkeit von  $d\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$  in  $W$  konvergiert die vorletzte Summe für  $v \rightarrow \infty$  gegen das Integral von  $d\omega$  über  $W$ . Die letzte Summe schätzen wir durch

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^{nv}} I(W_{vi}) r(x_{vi}, W_{vi}) \right\| \leq \max_{i=1, \dots, 2^{nv}} |r(x_{vi}, W_{vi})| \sum_{i=1}^{2^{nv}} |I(W_{vi})|$$

ab, wobei

$$\sum_{i=1}^{2^{nv}} |I(W_{vi})| = I(W)$$

gilt. Daher bleibt zu zeigen, daß es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein solches  $N(\varepsilon)$  gibt, daß

$$\max_{i=1, \dots, 2^{nv}} \|r(x_{r_i}, W_{r_i})\| < \varepsilon$$

für alle  $v > N(\varepsilon)$  ist.

Die Annahme, daß diese Behauptung falsch sei, soll zum Widerspruch geführt werden. Es gebe also ein  $\varepsilon_0 > 0$  und eine Folge natürlicher Zahlen  $v' \rightarrow \infty$  mit

$$\max_{i=1, \dots, 2^{nv'}} \|r(x_{r_i}, W_{r_i})\| \geq \varepsilon_0$$

für alle  $v'$ . Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von

$$d\omega = f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

in  $W$  läßt sich ein  $v'_0$  aus der Menge der Zahlen  $v'$  so wählen, daß

$$\sup_{x, y \in W_{v'_0 i}} \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{3} \varepsilon_0$$

für alle  $i = 1, \dots, 2^{nv'_0}$  gilt. Zu  $v'_0$  gibt es ein  $i_0 \in \{1, \dots, 2^{nv'_0}\}$  mit

$$(2.2) \quad \|r(x_{r_0 i_0}, W_{r_0 i_0})\| = \max_{i=1, \dots, 2^{nv'_0}} \|r(x_{r_i}, W_{r_i})\| \geq \varepsilon_0.$$

Wir bestimmen zu jedem  $v \in N$  ein  $k_v \in N$  mit  $k_v > k_{v-1}$ ,  $k_1 > v'_0$  derart, daß für alle  $i = 1, \dots, 2^{nk_v}$

$$(2.3) \quad \sup_{x, y \in W_{k_v i}} \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{3^{v+1}} \varepsilon_0$$

ist. Diejenigen Würfel  $W_{k_i i}$  ( $i = 1, \dots, 2^{nk_i}$ ), welche in  $W_{v'_0 i_0}$  enthalten sind, bilden eine Zerlegung von  $W_{v'_0 i_0}$ . Daher läßt sich Lemma 2.2 anwenden, und wir erhalten auf Grund von (2.2) einen solchen Teilwürfel  $W_{k_1 i_1} \subset W_{v'_0 i_0}$ , daß nach Berücksichtigung von

$$\max_{\substack{i=1, \dots, 2^{nk_1} \\ W_{k_1 i} \subset W_{v'_0 i_0}}} \|f(x_{k_1 i}) - f(x_{v'_0 i_0})\| \leq \sup_{x, y \in W_{v'_0 i_0}} \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{3} \varepsilon_0$$

die Ungleichung

$$(2.4) \quad \|r(x_{k_1 i_1}, W_{k_1 i_1})\| \geq \varepsilon_0 - \frac{1}{3} \varepsilon_0$$

besteht. Die Anwendung von Lemma 2.2 auf die Zerlegung von  $W_{k_1 i_1}$  in die Teilwürfel  $W_{k_2 i}$  ( $i = 1, \dots, 2^{nk_2}$  |  $W_{k_2 i} \subset W_{k_1 i_1}$ ) liefert einen Teilwürfel  $W_{k_2 i_2} \subset W_{k_1 i_1}$  mit

$$\|r(x_{k_2 i_2}, W_{k_2 i_2})\| \geq \varepsilon_0 - \frac{1}{3} \varepsilon_0 - \frac{1}{3^2} \varepsilon_0,$$

wenn wir jetzt von (2.4) ausgehen und (2.3) für  $\nu = 1$  beachten. Durch Iteration dieser Schlußweise entsteht eine Folge von ineinandergeschachtelten Würfeln  $W_{k_1 i_1} \supset W_{k_2 i_2} \supset \dots \supset W_{k_\nu i_\nu} \supset \dots$ , deren Inhalt

$$I(W_{k_\nu i_\nu}) = \frac{1}{2^{nk_\nu}} I(W)$$

gegen Null strebt, wobei nach (2.3) für alle  $\nu = 1, 2, \dots$  die Abschätzung

$$(2.5) \quad \|r(x_{k_\nu i_\nu}, W_{k_\nu i_\nu})\| \geq \varepsilon_0 \left(1 - \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{3^j}\right) \geq \frac{\varepsilon_0}{2} > 0$$

gilt. Die Punkte  $x_{k_\nu i_\nu}$  konvergieren gegen einen Punkt  $\bar{x} \in W$ . Damit wird

$$\begin{aligned} \|r(x_{k_\nu i_\nu}, W_{k_\nu i_\nu})\| &\leq \|r(x_{k_\nu i_\nu}, W_{k_\nu i_\nu}) - r(\bar{x}, W_{k_\nu i_\nu})\| + \|r(\bar{x}, W_{k_\nu i_\nu})\| \\ &\leq \|f(\bar{x}) - f(x_{k_\nu i_\nu})\| + \|r(\bar{x}, W_{k_\nu i_\nu})\|. \end{aligned}$$

Der vorletzte Term dieser Ungleichung strebt gegen Null wegen der Stetigkeit von  $f$  insbesondere in  $\bar{x}$ . Die Zahlen  $\|r(\bar{x}, W_{k_\nu i_\nu})\|$  bilden eine Nullfolge auf Grund der elementaren Derivierbarkeit von  $\omega$  insbesondere in  $\bar{x}$ , weil die Würfel  $W_{k_\nu i_\nu}$  im Sinne von Definition 1.1 gegen  $\bar{x}$  konvergieren und  $\bar{x} \in W_{k_\nu i_\nu}$  für alle  $\nu$  gilt. Daher strebt auch

$$\|r(x_{k_\nu i_\nu}, W_{k_\nu i_\nu})\|$$

gegen Null im Widerspruch zu (2.5), und der Satz von Stokes ist bewiesen.

Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen  
 Institut für Reine und Angewandte Mathematik  
 D-5100 Aachen  
 Deutschland



### Literatur

- [1] HERMANN, P.: Über eine Verallgemeinerung der alternierenden Ableitung von Differentialformen. - Universität Jyväskylä, Mathematisches Institut, Bericht 12, 1971.
  - [1a] — — Über eine Verallgemeinerung der alternierenden Ableitung von Differentialformen I. - Math. Nachr. 52, 1972, S. 85—99.
  - [2] KLEMOLA, T.: Reguläre Mengen von Simplexen und der Satz von Stokes. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 295, 1961.
  - [3] MÜLLER, CL.: Über einen neuen Zugang zur mehrdimensionalen Differential- und Integralrechnung. - Erscheint demnächst.
  - [4] NEVANLINNA, F. und R.: Absolute Analysis. - Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 102, Springer-Verlag, Berlin Göttingen, Heidelberg, 1959.
  - [5] WHITNEY, H.: Geometric integration theory. - [Fourth printing.] Princeton Mathematical Series 21, Princeton University Press, Princeton (New Jersey), 1971.
-