ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

514

ÜBER DIE INTEGRATION DER GLEICHUNG $\Delta u = c(z)u$ AUF EINER RIEMANNSCHEN FLÄCHE IM INDEFINITEN FALL

VON

LAURI MYRBERG

HELSINKI 1972
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1972.514

ISBN 951-41-0041-7

Vorgelegt am 14. April 1972

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1972

1. Der Fall $c(z) \geqq 0$

1. Es sei F eine Riemannsche Fläche und $c(z)$ eine Dichte auf F, d.h. eine nebst ihren ersten Ableitungen stetige reelle Grösse, die sich bei einer Vertauschung des lokalen Parameters so transformiert, dass der Ausdruck $c(z)|dz|^2$ invariant ist. Dann hat die Differentialgleichung

$$\Delta u = c(z)u \tag{1}$$

eine invariante Bedeutung. Gewöhnlich nimmt man an, dass $c(z) \geqq 0$ ist. In der vorliegenden Arbeit werden wir auf diese Annahme verzichten und sie durch eine schwächere Bedingung ersetzen.

2. Es sei $K \subset F$ ein kompaktes Gebiet, ∂K sein Rand und $\bar{K} = K \cup \partial K$. Die Funktion h sei in $\bar{K}$ stetig und in K harmonisch. Die Funktion u sei in $\bar{K}$ stetig und eine Lösung von (1) in K.

Im Falle $c(z) \geqq 0$ sind dann die folgenden Resultate bekannt:

1° Ist $u(z) \geqq 0$ auf ∂K, so ist $u(z) \geqq 0$ in K.

2° Ist $h(z) \geqq u(z) \geqq 0$ auf ∂K, so ist $h(z) \geqq u(z)$ in K.

3° Ist $u(z) = 0$ auf ∂K, so ist $u(z) \equiv 0$ in K.

4° Wenn das Gebiet K in bezug auf die Randwertaufgabe der harmonischen Funktionen regulär ist, so ist auch die Randwertaufgabe der Gleichung (1) (für jede stetige Randfunktion) in K lösbar.

5° Für dieselben Gebiete ist auch die Existenz der Greenschen Funktion der Gleichung (1) garantiert.

6° Es gelten die Harnackschen Ungleichungen: Ist u eine nichtnegative Lösung von (1) in einem Gebiet G und K ein kompaktes Teilgebiet von G, so existiert eine von der Funktion u und von den Punkten z_1, z_2 unabhängige Konstante $k > 0$, so dass die Ungleichungen

$$k^{-1}u(z_1) \leqq u(z_2) \leqq k\, u(z_1)$$

für alle Punktpaare $z_2, z_1 \in K$ gelten.

7° Ist B eine Familie von Lösungen der Gleichung (1), die in jeder kompakten Menge von F gleichmässig beschränkt sind, so ist B normal.

2. Eine allgemeinere Bedingung für $c(z)$

3. Wir verzichten nun auf die Bedingung $c(z) \geqq 0$. Es sei K ein kompaktes Gebiet von F, wo die Randwertaufgabe der harmonischen Funktionen für jede stetige Randfunktion f lösbar ist. Die Lösbarkeit der entsprechenden Randwertaufgabe der Gleichung (1) reduziert sich auf die Lösbarkeit der Integralgleichung

$$u(\zeta) = h(\zeta) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_K g(z, \zeta) c(z) u(z) d\sigma_z , \tag{2}$$

wo $g(z, \zeta)$ die harmonische Greensche Funktion des Gebietes K mit dem Pol ζ und h die harmonische Funktion mit den Randwerten f ist.

Nach der Theorie der Integralgleichungen besitzt entweder die Integralgleichung (2) (mit $h(\zeta) \not\equiv 0$) eine Lösung, oder die entsprechende homogene Gleichung

$$v(\zeta) = - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_K g(z, \zeta) c(z) v(z) d\sigma_z \tag{3}$$

hat eine Lösung v, die nicht identisch verschwindet. Im ersten Falle ist u die gesuchte Lösung der Randwertaufgabe, im zweiten Falle ist v eine Lösung von (1), die auf dem Rand ∂K verschwindet, ohne in K identisch zu verschwinden.

4. Die Greensche Funktion $G(z, \zeta)$ der Gleichung (1) in dem kompakten Gebiet K ist eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

1° $\Delta G(z, \zeta) = c(z) G(z, \zeta)$ in $K - \{\zeta\}$.

2° $G(z, \zeta) - g(z, \zeta)$ ist in $K - \{\zeta\}$ beschränkt.

3° Die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} (G(z, \zeta) - g(z, \zeta)) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} (G(z, \zeta) - g(z, \zeta))$$

sind in $U - \{\zeta\}$ beschränkt, wo U eine Umgebung von ζ ist.

4° $G(z, \zeta)$ ist in $\bar{K} - \{\zeta\}$ stetig und $= 0$ auf ∂K.

Wenn man

$$u(z, \zeta) = G(z, \zeta) - g(z, \zeta)$$

setzt, genügt u der Integralgleichung

$$u(z, \zeta) = v(z, \zeta) - \frac{1}{2\pi} \iint\limits_K g(w, z) c(w) u(w, \zeta) d\sigma_w , \tag{4}$$

wo

$$v(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi}\iint_K g(w, z)g(w, \zeta)c(w)d\sigma_w$$

ist. Die zu (4) gehörige homogene Gleichung ist dieselbe wie (3), woraus folgt, dass die Gleichungen (2) und (4) gleichzeitig lösbar sind. Die Funktion $G(z, \zeta) = g(z, \zeta) + u(z, \zeta)$ ist dann die gesuchte Greensche Funktion.

5. Auf Grund der vorigen Betrachtungen stellen wir für die Dichte $c(z)$ die folgende Bedingung auf:

Bedingung A. *Ist K ein kompaktes Gebiet und u eine in $\bar{K}$ stetige Lösung von (1) in K, die auf ∂K verschwindet, so verschwindet u identisch in K.*

Diese Bedingung ist immer im Falle $c(z) \geqq 0$ erfüllt.

Wir werden nun untersuchen, welche von den Eigenschaften 1°—7° in Nummer 1 noch gültig sind.

1° Es sei u eine Lösung von (1), die auf ∂K nichtnegativ ist. Behauptung: $u(z) \geqq 0$ in K. Antithese: Die Menge $\{z \in K \mid u(z) < 0\}$ ist nicht leer; es sei K_0 eine von ihren Komponenten. K_0 ist ein kompaktes Gebiet, und auf ∂K_0 ist $u(z) = 0$, woraus $u(z) \equiv 0$ in K_0 folgt (Bedingung A). Dies ist ein Widerspruch, und die Antithese ist falsch.

2° gilt nicht.

3°—5° sind trivialerweise gültig.

6° Es sei $U(0, R)$ ein Parameterkreis und $G(z, \zeta)$ die Greensche Funktion von (1) in $U(0, R)$. Die (innere) normale Ableitung $\dfrac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n}$ existiert in jedem Punkt $z \in U(0, R)$ und ist stetig in $\partial U(0, R) \times U(0, R)$. Dies folgt daraus, dass die harmonische Greensche Funktion diese Eigenschaften besitzt und die zwei Greenschen Funktionen durch die Gleichung

$$G(z, \zeta) = g(z, \zeta) - \frac{1}{2\pi}\iint_{U(0, R)} g(w, z)c(w)G(w, \zeta)d\sigma_w$$

verknüpft sind. Ferner ist $\dfrac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} \geqq 0$ in $\partial U(0, R) \times U(0, R)$. Wir wollen zeigen, dass

$$\inf \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} > 0$$

in $\partial U(0, R) \times U(0, R')$, wenn R' genügend klein ist.

Es sei in $U(0, R)$

$$c(z) \leqq \lambda = \text{Konstante } (\lambda > 0) .$$

Die Gleichung $\Delta v = \lambda v$ hat in $U(0 , R)$ die Greensche Funktion $G_\lambda(z , 0)$, die nur von $r = |z|$ abhängt und somit der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$v'' + \frac{1}{r} v' - \lambda v = 0$$

genügt. Sie kann nicht die Anfangsbedingungen $v(R) = 0 , v'(R) = 0$ erfüllen, woraus folgt, dass auf $\partial U(0 , R)$ die normale Ableitung

$$\frac{\partial G_\lambda(z , 0)}{\partial n} = m > 0 \quad (m \text{ Konstante}) \tag{5}$$

ist. Andererseits ist die Differenz

$$\gamma(z) = G_\lambda(z , 0) - G(z , 0)$$

in $U(0 , R) - \{0\}$ beschränkt: $|\gamma(z)| \leqq M$, und

$$\Delta\gamma(z) = \lambda G_\lambda(z , 0) - c(z)G(z , 0) \geqq \lambda(G_\gamma(z , 0) - G(z , 0)) = \lambda\gamma(z) .$$

Es ist somit $\Delta\gamma(z) \geqq \lambda\gamma(z)$ in $U(0 , R) - \{0\}$ und $\gamma(z) = 0$ auf $\partial U(0 , R)$; wir behaupten, dass $\gamma(z) \leqq 0$ in $U(0 , R) - \{0\}$. Es sei $0 < \varrho < R$ und v_ϱ eine Lösung von $\Delta v = \lambda v$ in $U(0 , R) - \overline{U(0 , \varrho)}$ mit den Randwerten $v_\varrho(z) = 0$ auf $\partial U(0 , R)$, $v_\varrho(z) = 1$ auf $\partial U(0 , \varrho)$. Dann ist $\Delta(\gamma(z) - v_\varrho(z)) \geqq \lambda(\gamma(z) - v_\varrho(z))$ in $U(0 , R) - \overline{U(0 , \varrho)}$, $\gamma(z) - Mv_\varrho(z) = 0$ auf $\partial U(0 , R)$ und $\gamma(z) - Mv_\varrho(z) \leqq 0$ auf $\partial U(0 , \varrho)$, woraus folgt, dass $\gamma(z) \leqq Mv_\varrho(z)$ in $U(0 , R) - \overline{U(0 , \varrho)}$. Nun ist aber für alle $z \in U(0 , R) - \{0\}$ $\lim\limits_{\varrho \to 0} v_\varrho(z) = 0$, und hieraus folgt die Behauptung $\gamma(z) \leqq 0$.

Es gilt somit in $U(0 , R) - \{0\}$

$$G(z , 0) \geqq G_\lambda(z , 0)$$

und ferner

$$\frac{\partial G(z , 0)}{\partial n} \geqq \frac{\partial G_\lambda(z , 0)}{\partial n} \tag{6}$$

für alle $z \in \partial U(0 , R)$. Wegen der Stetigkeit von $\dfrac{\partial G(z , \zeta)}{\partial n}$ in $\partial U(0 , R) \times U(0 , R)$ folgt aus (5) und (6), dass für genügend kleines R' in $\partial U(0 , R) \times U(0 , R')$

$$\frac{\partial G(z , \zeta)}{\partial n} \geqq \frac{m}{2} > 0$$

gilt, d.h. $\inf \dfrac{\partial G(z\,,\,\zeta)}{\partial n} > 0$ in $\partial U(0\,,R) \times U(0\,,R')$, wie behauptet wurde.

Es sei nun u eine nichtnegative Lösung von (1) in einem Gebiet G und $U(0\,,R)$ ein Parameterkreis mit $\overline{U(0\,,R)} \subset G$. Dann hat u in $U(0\,,R)$ die Integraldarstellung

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\partial U(0,R)} u(z) \frac{\partial G(z\,,\,\zeta)}{\partial n}\, ds\,. \tag{7}$$

und die Harnackschen Ungleichungen in 6° in Nummer 1 folgen daraus auf die gewöhnliche Weise.

Bemerkung. Aus den Harnackschen Ungleichungen folgt speziell, dass eine nichtnegative Lösung von (1) entweder überall positiv ist oder identisch verschwindet.

7° gilt auch unter der Bedingung A. Ist nämlich B eine Familie von Lösungen der Gleichung (1), die in jeder kompakten Menge von F gleichmässig beschränkt sind, so folgt aus (7) die gleichgradige Stetigkeit der Funktionen von B in jeder kompakten Menge von F. Dies impliziert aber die Normalität der Familie B.

3. Über die Existenz einer positiven Lösung auf der ganzen Fläche

6. Die Fläche F sei nun speziell nichtkompakt. Wir können (unter der Bedingung A) eine auf der ganzen Fläche F positive Lösung von (1) auf folgende Weise konstruieren:

Es sei $(F_n)\,,\, n = 1\,,2\,,\ldots$ eine Ausschöpfung von F mit den kompakten Gebieten F_n, so dass in F_n die Randwertaufgabe von (1) lösbar ist. Es sei w_n das *elliptische Mass* von (1) in F_n, d.h. diejenige Lösung von (1), die auf F_n die konstanten Randwerte $f(z) = 1$ besitzt. Dann ist $w_n(z) > 0$ in F_n, und für einen festen Punkt $z_0 \in F_1$ bilden die Funktionen v_n:

$$v_n(z) = \frac{w_n(z)}{w_n(z_0)}\,,\; n = 1\,,2\,,\ldots$$

eine Familie von Lösungen von (1), die wegen $v_n(z_0) = 1$ und der Harnackschen Ungleichungen in jeder kompakten Menge von F gleichmässig beschränkt sind und somit eine normale Familie B bilden. Aus B kann eine Teilfolge gewählt werden, die gleichmässig in jeder kompakten Menge von F gegen eine Grenzfunktion v konvergiert, die in F der Gleichung (1) genügt und wegen $v(z_0) = 1$ überall positiv ist. Ist $c(z) \not\equiv 0$, so ist v nicht konstant. — Wir haben somit den

Satz 1. *Es sei* $c(z)$ *eine auf der nichtkompakten Riemannschen Fläche* F *definierte Dichte, die die Bedingung* A *erfüllt. Dann existiert auf* F *eine positive Lösung von* (1), *die im Falle* $c(z) \not\equiv 0$ *nicht konstant ist.*

Umgekehrt kann man zeigen: Hat die Gleichung (1) eine auf der ganzen Fläche F positive Lösung, so erfüllt die Dichte $c(z)$ die Bedingung A.

7. Betreffs der Gültigkeit von Bedingung A geben wir das folgende Beispiel:

Beispiel 1. Es sei F eine hyperbolische Riemannsche Fläche, $c(z)$ eine Dichte auf F und $g(z, \zeta)$ die harmonische Greensche Funktion von F. Wenn das Integral

$$\iiiint\limits_{F \times F} g^2(z, \zeta)\, |c(z)|\, |c(\zeta)|\, d\sigma_z d\sigma_\zeta < 4\pi^2 \tag{8}$$

ist, gilt die Bedingung A.

Beweis. Es sei K ein kompaktes Gebiet, so dass die homogene Integralgleichung

$$u(\zeta) = -\frac{1}{2\pi} \iint\limits_K g_K(z, \zeta) c(z) u(z) d\sigma_z ,$$

wo $g_K(z, \zeta)$ die harmonische Greensche Funktion von K ist, eine nicht identisch verschwindende Lösung hat. Dann ist nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} u(\zeta)^2 &\leqq \frac{1}{4\pi^2} \Big(\iint\limits_K g_K(z, \zeta)\, |c(z)|\, |u(z)|\, d\sigma_z \Big)^2 \\ &\leqq \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_K g_K^2(z, \zeta)\, |c(z)|\, d\sigma_z \cdot \iint\limits_K u(z)^2\, |c(z)|\, d\sigma_z \\ &\leqq \frac{1}{4\pi^2} \iint\limits_K g^2(z, \zeta)\, |c(z)|\, d\sigma_z \cdot \iint\limits_K u(z)^2\, |c(z)|\, d\sigma_z , \end{aligned}$$

woraus durch Multiplikation mit $|c(\zeta)|$ und Integration über K

$$\iint\limits_K u(\zeta)^2\, |c(\zeta)|\, d\sigma_\zeta$$

$$\leqq \frac{1}{4\pi^2} \iiiint\limits_{K \times K} g^2(z, \zeta) |c(z)|\, |c(\zeta)|\, d\sigma_z d\sigma_\zeta \cdot \iint\limits_K u(z)^2\, |c(z)|\, d\sigma_z$$

folgt. Wegen

$$\iint\limits_K u(z)^2 \, |c(z)| \, d\sigma_z > 0$$

ergibt sich hieraus

$$(9) \qquad 1 \leqq \frac{1}{4\pi^2} \iiiint\limits_{K\times K} g^2(z\,,\,\zeta)\,|c(z)|\,|c(\zeta)|\,d\sigma_z d\sigma_\zeta$$

$$\leqq \frac{1}{4\pi^2} \iiiint\limits_{F\times F} g^2(z\,,\,\zeta)\,|c(z)|\,|c(\zeta)|\,d\sigma_z d\sigma_\zeta\,.$$

Ist nun die Bedingung (8) erfüllt, enthält (9) einen Widerspruch, und die Bedingung A ist erfüllt.

4. Über die Existenz der Greenschen Funktion der Gleichung $\Delta u = c(z)u$ auf der ganzen Fläche

8. Im Falle $c(z) \geqq 0\,,\, c(z) \not\equiv 0$ existiert auf jeder Riemannschen Fläche F die Greensche Funktion

$$G(z\,,\,\zeta) = \sup_{K \in F} G_K(z\,,\,\zeta) \quad (K \text{ kompakt})$$

(vgl. [4]). Wenn die Dichte $c(z)$ nur die schwächere Bedingung A erfüllt, ist dies nicht mehr immer der Fall. Aus dem Beispiel 2 geht hervor, dass sogar die folgende Situation möglich ist:

Es gibt eine kompakte Riemannsche Fläche F und auf F eine Dichte $c(z)$ $(\not\equiv 0)$ derart, dass auf F eine positive beschränkte Lösung von (1) existiert, aber die punktierte Fläche $F - \{z_0\}$ nicht die Greensche Funktion besitzt.

Beispiel 2. Die Riemannsche Fläche F sei die erweiterte komplexe Ebene $\bar{C}$, und die Dichte $c(z)$ sei für $z \neq \infty$ durch den Ausdruck

$$c(z) = 4\,\frac{|z|^2 - 1}{(|z|^2 + 2)\,(|z|^2 + 1)^2}$$

gegeben. Dann hat c in der Umgebung des Punktes $z = \infty$ als Funktion des lokalen Parameters $w = 1/z$ den Ausdruck

$$c(w) = 4\,\frac{1 - |w|^2}{(2|w|^2 + 1)\,(|w|^2 + 1)^2}$$

und ist somit auf der ganzen Fläche $\bar{C}$ definiert. Diejenige Teilfamilie der Lösungen von (1), die nur von $r = |z|$ abhängen, hat die Form

$$(10) \qquad u(z) = \frac{r^2 + 2}{r^2 + 1}\left[C_1\left(\frac{2}{r^2 + 2} + 3\ln(r^2 + 2) + 2\ln r\right) + C_2\right],$$

wo C_1 und C_2 reelle Konstanten sind. Für $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ erhält man aus (10) die partikuläre Lösung

$$u_0(z) = \frac{r^2 + 2}{r^2 + 1},$$

die in der Umgebung des Punktes $z = \infty$ in dem lokalen Parameter $w = 1/z$ den Ausdruck

$$u_0(w) = \frac{2|w|^2 + 1}{|w|^2 + 1}$$

hat. Die Lösung u_0 ist somit auf der ganzen Fläche $\bar{C}$ definiert und genügt den Ungleichungen

$$1 \leqq u_0(z) \leqq 2 .$$

Aus der Familie (10) erhält man auch die zu dem Kreis $U(0, R)$ gehörige Greensche Funktion von (1),

$$G_R(z, 0) = \frac{1}{2}\frac{r^2 + 2}{r^2 + 1}\left[\frac{r^2 - R^2}{(R^2 + 2)(r^2 + 2)} + \frac{3}{2}\ln\frac{R^2 + 2}{r^2 + 2} + \ln\frac{R}{r}\right].$$

Für $R \to \infty$ wächst $G_R(z, 0)$ unbegrenzt, und in C gibt es somit keine Greensche Funktion von (1).

Literatur

[1] Bergman, S.: The kernel function and conformal mapping. — Mathematical Surveys, Number V (1970).

[2] Bergman, S. and Schiffer, M.: Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics. — Pure and Applied Mathematics, Vol. IV (1953).

[3] Myrberg, L.: Über die Integration der Differentialgleichung $\Delta u = c(P)u$ auf offenen Riemannschen Flächen. — Math. Scand. 2 (1954).

[4] —»— Über die Existenz der Greenschen Funktion der Gleichung $\Delta u = c(P)u$ auf Riemannschen Flächen. — Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I 170 (1954).

[5] —»— Über subelliptische Funktionen. — Ibid. A I 290 (1960).

[6] Royden, H. L.: The equation $\Delta u = Pu$, and the classification of open Riemann surfaces. — Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I 271 (1959).

Gedruckt Juni 1952