ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

513

ÜBER NICHTELLIPTISCHE LINEARE PARTIELLE DIFFERENTIALOPERATOREN MIT KONSTANTEN KOEFFIZIENTEN

VON

ILPPO SIMO LOUHIVAARA und CHRISTIAN G. SIMADER

Herrn Professor Dr. Wolfgang Haack zu seinem 70. Geburtstag gewidmet

HELSINKI 1972
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1972.513

ISBN 951-41-0040-9

Am 11. Februar 1972 vorgelegt von R. NEVANLINNA

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1972

0. Einleitende Bemerkungen

0.1. In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir lineare partielle Differentialoperatoren mit konstanten komplexen Koeffizienten, zuerst auf dem Funktionenraum $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. Insbesondere werden einige Klassen von koerzitiven Operatoren behandelt. Es zeigt sich, daß alle betrachteten koerzitiven Operatoren weder elliptisch noch hypoelliptisch sein müssen; trotzdem können Regularitätsaussagen für schwache und starke Lösungen der entsprechenden partiellen Differentialgleichungen bewiesen werden. Die auf $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ definierten linearen partiellen Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten erzeugen dicht definierte abschließbare Operatoren auf $L^2(\boldsymbol{R}^n)$. Mit den hier benutzten Methoden können Definitionsmenge, Wertemenge und Spektrum dieser Operatoren in handhabbarer Form beschrieben werden.

Von der umfangreichen Literatur über verwandte Fragen werden hier nur wenige Titel zitiert; diese sind teilweise solche, auf die wir uns direkt beziehen, teilweise nur als Beispiele erwähnt.

0.2. Für einen Multiindex, d. h. für ein System $s = (s_1, \ldots, s_n)$ von n nichtnegativen ganzen Zahlen s_j, sei $|s| := s_1 + \ldots + s_n$ und $s! := s_1! \ldots s_n!$. Für $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \boldsymbol{R}^n$ sei $\xi^s := \xi_1^{s_1} \ldots \xi_n^{s_n}$. Ferner benutzen wir für die Ableitungsoperatoren die Bezeichnungen $D := (D_1, \ldots, D_n)$ und $D^s := D_1^{s_1} \ldots D_n^{s_n}$, wobei $D_j := -i\, \partial/\partial x_j$ ist.

Man schreibt für Elemente $f, g \in L^2 := L^2(\boldsymbol{R}^n)$

$$(f, g)_0 := \int_{\boldsymbol{R}^n} \overline{f(x)}\, g(x)\, dx$$

und $\|f\|_0 := (f, f)^{1/2}$. Für $\varphi, \psi \in C_0^\infty := C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ und $k = 0, 1, \ldots$ erklären wir

$$(\varphi, \psi)_k := \sum_{|s| \leq k} (D^s \varphi, D^s \psi)_0$$

und $\|\varphi\|_k := (\varphi, \varphi)_k^{1/2}$. Der Hilbertraum $H^k := H^k(\boldsymbol{R}^n)$ wird als die Abschließung von C_0^∞ in bezug auf die Norm $\|\,.\,\|_k$ definiert. Dann gilt $H^0 = L^2$ und $H^k \subset L^2$.

0.3. Wir untersuchen hier ausschließlich lineare partielle Differentialoperatoren

$$L(D) := \sum_{|s| \leqq r} a_s D^s \tag{0.1}$$

mit konstanten komplexen Koeffizienten a_s, wobei die Ordnung r ($\geqq 0$) die kleinste ganze Zahl ist, mit der $a_s = 0$ für $|s| > r$ gilt. (Im folgenden bezieht sich die kurze Bezeichnung »Differentialoperator« auf solche Operatoren.) In unseren Betrachtungen spielt auch das entsprechende Polynom

$$L(\xi) := \sum_{|s| \leqq r} a_s \xi^s \tag{0.2}$$

von $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ eine Rolle. Der Operator $L(D)$ heißt nichttrivial, wenn nicht $r = 0$ und $a_0 = 0$ ist.

Für alle $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ gilt

$$(L(D)\varphi, \psi)_0 = (\varphi, \bar{L}(D)\psi)_0,$$

wobei

$$\bar{L}(D) := \sum_{|s| \leqq r} \bar{a}_s D^s$$

der zu $L(D)$ formal adjungierte Operator ist.

1. Koerzitive partielle Differentialoperatoren in $C_0^\infty(\boldsymbol{R}^n)$

1.1. Grundlage der folgenden Betrachtungen bildet

Definition 1.1. *Seien r und t zwei positive ganze Zahlen mit $r \geqq 2t$. Ferner sei*

$$L(D) := \sum_{|s| \leqq r} a_s D^s$$

ein Differentialoperator der Ordnung r. Diesen Operator nennen wir $2t$-koerzitiv, falls zwei Konstanten $E > 0$ und $R \geqq 0$ so existieren, daß

$$|L(\xi)| = \Big| \sum_{|s| \leqq r} a_s \xi^s \Big| \geqq E\, |\xi|^{2t} \quad \textit{für alle} \quad \xi \in \boldsymbol{R}^n \quad \textit{mit} \quad |\xi| \geqq R \tag{1.1}$$

gilt. Er heißt stark $2t$-koerzitiv, falls es zwei Konstanten $E > 0$ und $R \geqq 0$ so gibt, daß

$$\operatorname{Re} L(\xi) = \operatorname{Re} \sum_{|s| \leqq r} a_s \xi^s \geqq E\, |\xi|^{2t} \quad \textit{für alle} \quad \xi \in \boldsymbol{R}^n \quad \textit{mit} \quad |\xi| \geqq R \tag{1.2}$$

ist.

Die $2t$-Koerzitivität kann man äquivalent definieren, indem man anstelle (1.1) die Existenz von zwei Konstanten $E' > 0$ und $R' \geqq 0$ fordert, für die

$$(1.3) \qquad \Big| \sum_{2t \leqq |s| \leqq r} a_s \xi^s \Big| \geqq E' |\xi|^{2t} \quad \text{für alle} \quad \xi \in \boldsymbol{R}^n \quad \text{mit} \quad |\xi| \geqq R'$$

gilt. Entsprechend kann man (1.2) umformulieren.

Jeder stark $2t$-koerzitive Differentialoperator ist auch $2t$-koerzitiv. Im Falle $r = 2t$ ist $L(D)$ elliptisch bzw. stark elliptisch, wenn (1.1) bzw. (1.2) gilt. Hingegen brauchen für $r > 2t$ nicht einmal alle stark $2t$-koerzitiven Differentialoperatoren hypoelliptisch zu sein: Für $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \boldsymbol{R}^2$ sei[1])

$$L_0(\xi) = L_0(\xi_1, \xi_2) := (1+\xi_1^2)(\xi_1^2+\xi_2^2) .$$

Dann gilt $\operatorname{Re} L_0(\xi) \geqq |\xi|^2$ für alle $\xi \in \boldsymbol{R}^2$, also ist der entsprechende Differentialoperator $L_0(D)$ stark 2-koerzitiv ($r = 4$, $t = 1$). Wäre $L_0(D)$ hypoelliptisch, so müßte der in $\boldsymbol{C}^2$ gemessene Abstand $d(\xi)$ von ξ ($\in \boldsymbol{R}^2$) und der Menge $\{ \zeta \in \boldsymbol{C}^2 \mid L_0(\zeta) = 0 \}$ für $|\xi| \to \infty$ gegen unendlich streben (man vergleiche Hörmander [10], S. 99). Bei beliebiger Wahl von ξ_2 ($\in \boldsymbol{R}$) ist $L_0(i, \xi_2) = 0$. Für $\xi^{(\nu)} := (0, \nu)$ ($\nu = 1, 2, \dots$) ist somit $d(\xi^{(\nu)}) \leqq 1$ und $|\xi^{(\nu)}| \to \infty$.

Falls $L_E(D)$ ein stark elliptischer Differentialoperator der Ordnung $2t$ ist und $L_S(D)$ einen Differentialoperator beliebiger Ordnung bezeichnet, für den mit einer reellen Konstanten c die Ungleichung $\operatorname{Re} L_S(\xi) \geqq c$ bei beliebiger Wahl von $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ gilt, so ist $L_{ES}(D) := L_E(D) + L_S(D)$ stark $2t$-koerzitiv. Folglich umfaßt die Klasse der stark $2t$-koerzitiven Differentialoperatoren auch Störungen stark elliptischer Operatoren durch geeignete Operatoren sogar höherer Ordnung.

1.2. Wir leiten nun eine Charakterisierung stark $2t$-koerzitiver bzw. $2t$-koerzitiver Differentialoperatoren her.

Satz 1.2. *Damit ein Differentialoperator $L(D)$ stark $2t$-koerzitiv ist, ist notwendig und hinreichend, daß zwei Konstanten $C_1 > 0$ und $C_2 \geqq 0$ existieren, mit denen die Ungleichung*

$$(1.4) \qquad \operatorname{Re} (L(D)\varphi, \varphi)_0 \geqq C_1 \|\varphi\|_t^2 - C_2 \|\varphi\|_0^2$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$ gilt[2]).

[1]) Dieses Beispiel verdanken wir Herrn H. O. Cordes.

[2]) Für stark elliptische Differentialoperatoren wurde Ungleichung (1.4) von L. Gårding [5] hergeleitet. Die Umkehrung, daß im Falle $r = 2t$ aus (1.4) die starke Elliptizität folgt, bewiesen M. Schechter [11] und S. Agmon [1] (man vergleiche auch [2], S. 86–90). Auch in dem hier betrachteten Fall nennen wir (1.4) eine Gårdingsche Ungleichung. In seiner Arbeit [8] über das verallgemeinerte Dirichletproblem für lineare partielle nicht notwendig elliptische Differentialgleichungen betrachtete P. Hess unter anderem auch Differentialoperatoren, für die Abschätzung (1.4) mit $r \neq 2t$ im Falle eines beschränkten Gebietes gilt.

Für die $2t$ *-Koerzitivität des Differentialoperators* $L(D)$ *ist notwendig und hinreichend, daß mit zwei Konstanten* $C_1' > 0$ *und* $C_2' \geqq 0$ *die Ungleichung*

$$\|L(D)\,\varphi\|_0 \geqq C_1'\,\|\varphi\|_{2t} - C_2'\,\|\varphi\|_0 \tag{1.5}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$ *gilt.*

Beweis. A. Man nehme zuerst an, daß $L(D)$ stark $2t$ -koerzitiv ist. Für $\varphi \in C_0^\infty$ ist dann

$$(\mathcal{F}[L(D)\,\varphi])(\xi) = L(\xi)\,(\mathcal{F}\,\varphi)(\xi)\,,$$

wobei [3])

$$(\mathcal{F}\,\varphi)(\xi) = (2\,\pi)^{-n/2}\int_{\boldsymbol{R}^n} \varphi(x)\exp\left(-\,i\,(\xi\,,x)\right)dx$$

die Fouriertransformierte von φ bedeutet. Nach der Parsevalschen Gleichung ist

$$\operatorname{Re}\,(L(D)\,\varphi\,,\varphi)_0 = \operatorname{Re}\int_{\boldsymbol{R}^n} \overline{L(\xi)}\,|\,(\mathcal{F}\,\varphi)(\xi)|^2\,d\xi$$

$$= \operatorname{Re}\int_{|\xi|\geqq R} \overline{L(\xi)}\,|(\mathcal{F}\,\varphi)(\xi)|^2\,d\xi + \operatorname{Re}\int_{|\xi|\leqq R} \overline{L(\xi)}\,|(\mathcal{F}\,\varphi)(\xi)|^2\,d\xi\,.$$

Weil für $|\xi| \leqq R$ der Ausdruck $|L(\xi)|$ durch eine endliche Konstante K beschränkt ist, folgt aus (1.2)

$$\operatorname{Re}\,(L(D)\,\varphi\,,\varphi)_0 \geqq E\int_{|\xi|\geqq R} |\xi|^{2t}\,|(\mathcal{F}\,\varphi)(\xi)|^2\,d\xi - K\int_{\boldsymbol{R}^n} |(\mathcal{F}\,\varphi)(\xi)|^2\,d\xi$$

$$\geqq E\int_{\boldsymbol{R}^n} |\xi|^{2t}\,|(\mathcal{F}\,\varphi)(\xi)|^2\,d\xi - (K + E\,R^{2t})\int_{\boldsymbol{R}^n} |(\mathcal{F}\,\varphi)(\xi)|^2\,d\xi\,.$$

Wegen

$$\|\varphi\|_t^2 = \sum_{|s|\leqq t} \|D^s\,\varphi\|_0^2 = \sum_{|s|\leqq t}\int_{\boldsymbol{R}^n} \xi^{2s}\,|(\mathcal{F}\,\varphi)(\xi)|^2\,d\xi$$

und

$$\sum_{|s|\leqq t} \xi^{2s} \leqq K'\,(|\xi|^{2t} + 1)\,,$$

[3]) Hier bezeichnet $(\xi\,,x)$ das euklidische Skalarprodukt in $\boldsymbol{R}^n$.

wobei K' eine nur von n und t abhängige Konstante bezeichnet, wird

$$\operatorname{Re}(L(D)\varphi, \varphi)_0 \geqq \frac{E}{K'}\|\varphi\|_t^2 - (K + E R_t^2 + E)\|\varphi\|_0^2 .$$

B. Sei umgekehrt (1.4) für alle $\varphi \in C_0^\infty$ erfüllt. Wir führen eine Funktion $j \in C_0^\infty$ derart ein, daß $j(x) \equiv 0$ für $|x| \geqq 1$ und $j(x) \geqq 0$ für $|x| < 1$ sowie

$$\int_{R^n} (j(x))^2\, dx = 1$$

gilt. Ferner erklären wir $j_k(x) := k^{-n/2} j(x/k)$ für $k = 1, 2, \ldots$. Dann ist

$$\int_{R^n} (j_k(x))^2\, dx = 1 ,$$

und es gilt

$$\|D^s j_k\|_0 \leqq k^{-|s|}\|D^s j\|_0 . \tag{1.6}$$

Für jedes feste $\xi \in R^n$ liegt die durch

$$\varphi_k(x) := j_k(x) \exp(i(\xi, x))$$

erklärte Funktion φ_k in C_0^∞. Nach der verallgemeinerten Leibnizregel von L. Hörmander ([9], S. 176—177, [10], S. 9—10; man vergleiche auch Yosida [14], S. 51—52) folgt [4])

$$\begin{aligned} L(D)\varphi_k(x) &= \sum_{0\leqq|s|\leqq r} (D^s j_k(x)) \frac{1}{s!} L^{(s)}(D_x) \exp(i(\xi, x)) \\ &= \exp(i(\xi, x)) \sum_{0\leqq|s|\leqq r} (D^s j_k(x)) \frac{1}{s!} L^{(s)}(\xi) , \end{aligned} \tag{1.7}$$

wobei $L^{(s)}(\xi) := i^{|s|} D^s L(\xi)$ ist und $L^{(s)}(D)$ den entsprechenden Differentialoperator bezeichnet. Folglich ist

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(L(D)\varphi_k, \varphi_k)_0 \\ &= \operatorname{Re}\int_{R^n} \overline{L(\xi)}\,(j_k(x))^2\, dx + \operatorname{Re}\sum_{0<|s|\leqq r}\int_{R^n} \frac{1}{s!}\overline{L^{(s)}(\xi)}\,(D^s j_k(x))\, j_k(x)\, dx . \end{aligned}$$

Wenn man auf den zweiten Term der rechten Seite die Schwarzsche Ungleichung anwendet und (1.6) beachtet, ergibt sich

[4]) In der Bezeichnung D_x bedeutet der Index x, daß der Ableitungsoperator D auf x wirkt.

$$\text{(1.8)} \qquad \operatorname{Re}\,(L(D)\,\varphi_k\,,\,\varphi_k)_0 \to \operatorname{Re}\,L(\xi)$$

für $k \to \infty$. Mit

$$P(D) := \sum_{|s| \leqq t} D^{2s}$$

gilt

$$\|\varphi\|_t^2 = (P(D)\,\varphi\,,\,\varphi)_0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$. Daher ist wieder nach der verallgemeinerten Leibnizregel

$$\|\varphi_k\|_t^2 = \int\limits_{R^n} \overline{P(\xi)}\,(j_k(x))^2\,dx + \sum_{0<|s|\leqq 2t} \int\limits_{R^n} \frac{1}{s!}\,\overline{P^{(s)}(\xi)}\,(D^s j_k(x))\,j_k(x)\,dx\,.$$

und für $k \to \infty$ folgt wegen (1.6)

$$\text{(1.9)} \qquad C_1\,\|\varphi_k\|_t^2 - C_2\,\|\varphi_k\|_0^2 \to C_1\,\overline{P(\xi)} - C_2\,.$$

Beim Grenzübergang erhält man aus (1.4) nach (1.8) und (1.9)

$$\operatorname{Re}\,L(\xi) \geqq C_1\,\overline{P(\xi)} - C_2$$

für jedes $\xi \in \boldsymbol{R}^n$. Weil

$$\overline{P(\xi)} = P(\xi) = \sum_{|s|\leqq t} \xi^{2s} \geqq |\xi|^{2t}$$

gilt, ergibt sich

$$\operatorname{Re}\,L(\xi) \geqq \frac{C_1}{2}\,|\xi|^{2t} \quad \text{für alle} \quad \xi \in \boldsymbol{R}^n \quad \text{mit} \quad |\xi| \geqq \left(\frac{2\,C_2}{C_1}\right)^{1/(2t)}.$$

C. Der Beweis des zweiten Teiles von Satz 1.2 verläuft analog.

1.3. Als eine Folgerung aus Satz 1.2 beweisen wir

Satz 1.3. *Sei $L(D)$ ein $2\,t$-koerzitiver Differentialoperator der Ordnung r $(\geqq 2\,t)$. Zu jedem $k = 0, 1, \ldots$ existieren dann zwei Konstanten $C_1(k) > 0$ und $C_2(k) \geqq 0$ derart, daß*

$$\text{(1.10)} \qquad \|L(D)\,u\|_k \geqq C_1(k)\,\|u\|_{2t+k} - C_2(k)\,\|u\|_0$$

für alle $u \in H^{r+k}$ gilt[5]).

[5]) Für $u \in H^r$ und

$$L(D) = \sum_{|s|\leqq r} a_s\,D^s$$

wird $L(D)\,u$ durch

$$L(D)\,u := \sum_{|s|\leqq r} a_s\,D^s\,u$$

definiert, wobei $D^s\,u$ die verallgemeinerte Ableitung von u bezeichnet (man vergleiche etwa Friedman [3], S. 11).

Beweis. Nach Satz 1.2 gibt es zwei Konstanten $C_1' > 0$ und $C_2' \geqq 0$ so, daß

$$\|L(D)\,\varphi\|_0^2 \geqq C_1' \,\|\varphi\|_{2t}^2 - C_2' \,\|\varphi\|_0^2$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$ ist. Mit $\varphi := D^s \psi$, $\psi \in C_0^\infty$, ergibt sich hieraus

$$(1.11) \qquad \sum_{|s| \leqq k} \|D^s L(D)\,\psi\|_0^2 \geqq C_1' \sum_{|s| \leqq k} \|D^s \psi\|_{2t}^2 - C_2' \sum_{|s| \leqq k} \|D^s \psi\|_0^2 .$$

Offenbar gibt es eine nur von n und k abhängige Konstante $C(n, k) > 0$ derart, daß

$$(1.12) \qquad \sum_{|s| \leqq k} \|D^s \psi\|_{2t}^2 \geqq C(n, k)\, \|\psi\|_{2t+k}^2$$

für alle $\psi \in C_0^\infty$ gilt.

Bekanntlich existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl $C(\varepsilon) \geqq 0$ so, daß

$$(1.13) \qquad \|\psi\|_k^2 \leqq \varepsilon\, \|\psi\|_{2t+k}^2 + C(\varepsilon)\, \|\psi\|_0^2$$

für alle $\psi \in C_0^\infty$ gilt (man vergleiche etwa Yosida [14], S. 176).

Setzt man (1.12) und (1.13) mit

$$\varepsilon = \varepsilon_0 := \frac{C_k' \, C(n, k)}{2\, C_2'}$$

in (1.11) ein, so ergibt sich

$$\|L(D)\,\psi\|_k^2 \geqq \frac{C_1' \, C(n, k)}{2} \, \|\psi\|_{2t+k}^2 - C_2' \, C(\varepsilon_0)\, \|\psi\|_0^2$$

für alle $\psi \in C_0^\infty$. Da $L(D)$ von der Ordnung r ist und C_0^∞ dicht in H^{r+k} liegt, folgt (1.10) durch Approximation.

2. Einige Hilfssätze

2.1. Ein wichtiges Hilfsmittel für unsere weiteren Überlegungen ist die Friedrichssche Glättung (K. O. Friedrichs [4], S. 138; man vergleiche auch Agmon [2], S. 4—5, und Friedman [3], S. 12). Sei ähnlich wie in Teil B des Beweises von Satz 1.2 j eine Funktion aus C_0^∞ derart, daß $j(x) \equiv 0$ für $|x| \geqq 1$ und $j(x) \geqq 0$ für $|x| < 1$, hier jedoch

$$\int_{R^n} j(x)\, dx = 1 .$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ setzen wir $j_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon)$. Ferner wird für $g \in L^2$ die *Friedrichssche Glättung* g_ε durch

$$(2.1) \qquad g_\varepsilon(x) := \int_{\boldsymbol{R}^n} j_\varepsilon(x-y)\, g(y)\, dy$$

erklärt. Bekanntlich ist dann $g_\varepsilon \in C^\infty \cap L^2$ mit $C^\infty := C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$. und es gilt

$$(2.2) \qquad \|g - g_\varepsilon\|_0 \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$. Ist speziell $g \in H^k$, so ist auch $g_\varepsilon \in H^k$, und es ist $D^s g_\varepsilon = (D^s g)_\varepsilon$ für $|s| \leqq k$.

Hilfssatz 2.1. *Für $g \in L^2$ ist $g_\varepsilon \in H^k$ bei beliebiger Wahl von $\varepsilon > 0$ und von $k = 0, 1, \ldots$.*

Beweis. Es gilt für jeden Multiindex s

$$|D^s j_\varepsilon(x)| \leqq \varepsilon^{-n-|s|} c_s \chi_\varepsilon(x)$$

mit

$$c_s := \max_{|y| \leqq 1} |D^s j\,(y)|\,, \qquad \chi_\varepsilon(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } |x| < \varepsilon \\ 0 & \text{für } |x| \geqq \varepsilon\,. \end{cases}$$

Gemäß der Schwarzschen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} |D^s g_\varepsilon(x)|^2 &\leqq \Big(\int_{\boldsymbol{R}^n} |D^s j_\varepsilon(x-y)|\, |g(y)|\, dy \Big)^2 \\ &\leqq \varepsilon^{-2(n+|s|)} c_s^2 \int_{\boldsymbol{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)\, dy \int_{\boldsymbol{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)\, |g(y)|^2\, dy \\ &\leqq n^{-1} \varepsilon^{-n-2|s|} c_s^2\, \omega_n \int_{\boldsymbol{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)\, |g(y)|^2\, dy\,, \end{aligned}$$

wobei ω_n den Oberflächeninhalt der Einheitskugel in $\boldsymbol{R}^n$ bezeichnet. Nach dem Satz von Fubini ist

$$\begin{aligned} \int_{\boldsymbol{R}^n} |D^s g_\varepsilon(x)|^2\, dx &\leqq n^{-1} \varepsilon^{-n-2|s|} c_s^2\, \omega_n \int_{\boldsymbol{R}^n} |g(y)|^2 \int_{\boldsymbol{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)\, dx\, dy \\ &\leqq n^{-2} \varepsilon^{-2|s|} c_s^2\, \omega_n^2 \int_{\boldsymbol{R}^n} |g(y)|^2\, dy\,. \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

Hilfssatz 2.2. *Sei $L(D)$ ein Differentialoperator, und seien $u, f \in L^2$ derart, daß*

$$(2.3)\qquad (u\,,\bar{L}(D)\,\varphi)_0 = (f\,,\varphi)_0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$ *ist. Dann gilt für die Friedrichsschen Glättungen*

$$L(D)\,u_\varepsilon = f_\varepsilon$$

und

$$(2.4)\qquad \|u - u_\varepsilon\|_0 + \|f - L(D)\,u_\varepsilon\|_0 \to 0$$

für $\varepsilon \to 0$.

Beweis. Für jedes feste $x \in \boldsymbol{R}^n$ und für jedes $\varepsilon > 0$ ist die durch $\varphi^{(\varepsilon)}(y) := j_\varepsilon(x-y)$ erklärte Funktion $\varphi^{(\varepsilon)}$ in C_0^∞, und nach (2.3) gilt [6])

$$(u\,,\bar{L}(D)\,\varphi^{(\varepsilon)})_0 = \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} \overline{u(y)}\,\bar{L}(D_y)\,j_\varepsilon(x-y)\,dy$$

$$= \int\limits_{\boldsymbol{R}^n} \overline{u(y)}\,\bar{L}(\bar{D}_x)\,j_\varepsilon(x-y)\,dy = \overline{L(D)\,u_\varepsilon(x)}\,;$$

ebenso ist $(f\,,\varphi^{(\varepsilon)})_0 = \overline{f_\varepsilon(x)}$. Folglich wird $L(D)\,u_\varepsilon = f_\varepsilon$. Aus (2.2) erhält man dann (2.4).

Man nennt jedes $u \in L^2$, das der Gleichung (2.3) für alle $\varphi \in C_0^\infty$ genügt, eine *schwache Lösung* der Differentialgleichung $L(D)\,u = f$ in $\boldsymbol{R}^n$. Jedes $u \in L^2$, zu dem eine Folge $\{u_\nu\} \subset C^\infty \cap L^2$ so existiert, daß $\|u - u_\nu\|_0 + \|f - L(D)\,u_\nu\|_0 \to 0$ für $\nu \to \infty$ gilt, heißt eine *starke Lösung* der Differentialgleichung $L(D)\,u = f$ in $\boldsymbol{R}^n$. Es ist leicht zu sehen, daß jede starke Lösung auch eine schwache Lösung ist. Nach Hilfssatz 2.2 ist im Falle eines linearen partiellen Differentialoperators mit konstanten Koeffizienten jede schwache Lösung der entsprechenden Differentialgleichung in $\boldsymbol{R}^n$ auch eine starke Lösung in $\boldsymbol{R}^n$. Von einem etwas anderen Begriff der starken Lösung ausgehend hat als erster K. O. Friedrichs [4] mit dieser von ihm ersonnenen Glättungsmethode die Äquivalenz schwacher und starker Lösungen bewiesen.

2.2. Wir brauchen auch ein allgemeines Resultat über Nullstellen eines Polynoms mehrerer reeller Veränderlicher.

Hilfssatz 2.3. *Sei*

$$P(\xi) = \sum_{|s| \leqq r} a_s\,\xi^s$$

ein Polynom von $\xi = (\xi_1\,,\ldots,\xi_n) \in \boldsymbol{R}^n$ *mit komplexen Koeffizienten* a_s, *das nicht identisch verschwindet. Dann hat die Nullstellenmenge*

[6]) Hier wird geschrieben $\bar{D} := (\bar{D}_1\,,\ldots,\bar{D}_n)$, wobei $\bar{D}_j := i\,\partial/\partial x_j$ ist.

$$N(P) := \{ \xi \in \boldsymbol{R}^n \mid P(\xi) = 0 \}$$

das Lebesguesche Maß $\mu(N(P)) = 0$.

Beweis. A. Es genügt, die Behauptung für Polynome mit reellen Koeffizienten zu beweisen: Sei $P(\xi)$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten, das nicht identisch verschwindet; dann können die Polynome $\operatorname{Re} P(\xi)$ und $\operatorname{Im} P(\xi)$, die reelle Koeffizienten haben, nicht beide identisch verschwinden; wegen $N(P) = N(\operatorname{Re} P) \cap N(\operatorname{Im} P)$ hat $N(P)$ das Lebesguesche Maß $\mu(N(P)) = 0$, falls $\mu(N(\operatorname{Re} P)) = 0$ oder $\mu(N(\operatorname{Im} P)) = 0$ gilt.

B. Wir führen den Beweis durch Induktion nach dem Grad r von P . Den Grad von P definiert man bekanntlich als die kleinste ganze Zahl $r \geqq 0$ derart, daß für $|s| > r$ alle $a_s = 0$ sind. Für $r = 0$ ist die Behauptung trivial.

Sei dann $r \geqq 0$; wir nehmen an, daß die Behauptung für alle Polynome vom Grade $\leqq r$ richtig ist; es sei $P(\xi)$ ein Polynom vom Grade $r+1$. Wir erklären

$$P_j(\xi) := \frac{\partial}{\partial \xi_j} P(\xi) \quad (j = 1, \ldots, n),$$

$$N_1 := \left\{ \xi \in \boldsymbol{R}^n \,\middle|\, P(\xi) = 0 \,,\ \sum_{j=1}^{n} |P_j(\xi)|^2 > 0 \right\},$$

$$N_2 := \left\{ \xi \in \boldsymbol{R}^n \,\middle|\, P(\xi) = 0 \,,\ \sum_{j=1}^{n} |P_j(\xi)|^2 = 0 \right\}.$$

So ist $N(P) = N_1 \cup N_2$.

Für jede positive ganze Zahl k ist

$$N_1 \cap \{ \xi \in \boldsymbol{R}^n \mid |\xi| \leqq k \}$$

Vereinigung von Hyperflächenstücken in $\boldsymbol{R}^n$ und daher vom Maß Null. Als Vereinigung von diesen abzählbar vielen Nullmengen ist auch N_1 vom Maß Null.

Die Polynome $P_j(\xi)$ sind höchstens vom Grade r . Wir werden indirekt zeigen, daß nicht alle von diesen identisch verschwinden. Man nehme als Antithese an, daß alle $P_j(\xi) \equiv 0$ sind. Daraus folgt

$$P(\xi) \equiv \text{const.} \neq 0 .$$

Sei s^0 ein fester Multiindex mit $|s^0| = r+1$. Es gilt

$$D^{s^0} P(\xi) = D^{s^0} \sum_{|s| \leqq r+1} a_s \xi^s = 0 .$$

Für $s \neq s^0$, $|s| = r+1$ ist

$$D^{s^0} \xi^s = 0 ;$$

denn mindestens für ein j_0 ist $s_{j_0} < s^0_{j_0}$, andernfalls würde $s = s^0$ aus $s_j \geqq s^0_j$ für $j = 1, \ldots, n$ wegen $|s| = r+1 = |s^0|$ folgen. Daher ist

$$0 = D^{s^0} P(\xi) = a_{s^0} (-i)^{r+1} s^0! \, .$$

Also gilt $a_{s^0} = 0$ für jedes s^0 mit $|s^0| = r+1$, und der Grad von $P(\xi)$ ist $\leqq r$. Somit existiert wenigstens ein j^* derart, daß $P_{j^*}(\xi)$ (ein Polynom vom Grade $\leqq r$) nicht identisch verschwindet. Nach der Induktionsannahme ist $\mu(N(P_{j^*})) = 0$. Wegen

$$N_2 \subset \bigcap_{j=1}^{n} N(P_j) \subset N(P_{j^*})$$

folgt $\mu(N_2) = 0$.

3. Wesentliche Maximalität partieller Differentialoperatoren in $L^2(\boldsymbol{R}^n)$

3.1. Zu einem Differentialoperator $L(D)$ erklärt man einen im Hilbertraum L^2 dicht definierten Operator L durch

(3.1) $D(L) := C_0^\infty \subset L^2$ und $L\varphi := L(D)\varphi$ für alle $\varphi \in D(L)$.

Weil

$$(\varphi, L\psi)_0 = (\varphi, L(D)\psi)_0 = (\bar{L}(D)\varphi, \psi)_0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$ und alle $\psi \in D(L)$ ($= C_0^\infty$) gilt, so ist $C_0^\infty \subset D(L^*)$ und $L^*\varphi = \bar{L}(D)\varphi$ für alle $\varphi \in C_0^\infty$. Daher ist $D(L^*)$ dicht in L^2, und L deshalb abschließbar mit der kleinsten abgeschlossenen Fortsetzung $\tilde{L} = L^{**}$. Man nennt $\tilde{L}$ *den von* $L(D)$ *erzeugten minimalen Operator in* L^2.

Sei ferner L' der von $\bar{L}(D)$ erzeugte minimale Operator in L^2. Für $\varphi, \psi \in C_0^\infty$ ist dann

$$(L\varphi, \psi)_0 = (L(D)\varphi, \psi)_0 = (\varphi, \bar{L}(D)\psi)_0 = (\varphi, L'\psi)_0 \, .$$

Es gilt

(3.2) $D(L'^*) =$

$\{ u \in L^2 \mid$ zu u existiert $f \in L^2$: $(u, \bar{L}(D)\varphi)_0 = (f, \varphi)_0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty \}$.

Hieraus folgt insbesondere $L \subset L'^*$ und damit auch $\tilde{L} \subset L'^*$. Man nennt L'^* *den von* $L(D)$ *erzeugten maximalen Operator in* L^2.

Der Operator L heißt *wesentlich maximal in* L^2, falls $\tilde{L} = L'^*$ gilt. Ist speziell $L(D)$ *formal selbstadjungiert*, d. h. ist $L(\xi) \equiv \bar{L}(\xi)$, so ist L

symmetrisch in L^2. Ein symmetrischer Operator L ist *wesentlich selbstadjungiert in* L^2, d. h. $\tilde{L} = L^*$, genau dann, wenn er wesentlich maximal ist.

3.2. P. Hess [7] gab einen einfachen Beweis für die Tatsache, daß der von einem in $\boldsymbol{R}^n$ gleichmäßig stark elliptischen linearen Differentialoperator $L_E(D)$ (mit variablen, gewissen Regularitätsforderungen unterliegenden Koeffizienten) erzeugte Operator L_E mit der Definitionsmenge $D(L_E) = C_0^\infty$ wesentlich maximal in L^2 ist. R. A. Goldstein [6] bewies die wesentliche Maximalität im Falle allgemeinerer Differentialoperatoren (mit konstanten Koeffizienten). Wir geben für diesen Fall hier einen verwandten, vielleicht etwas vereinfachten Beweis:

Satz 3.1. *Der von einem Differentialoperator* $L(D)$ *gemäß (3.1) erzeugte Operator* L *ist wesentlich maximal in* L^2.

Beweis. Wegen $\tilde{L} \subset L'^*$ bleibt zu zeigen, daß $L'^* \subset \tilde{L}$ ist. Für $u \in D(L'^*)$ folgt nach Hilfssatz 2.2 aus (3.2), daß für $\varepsilon \to 0$

$$\|u - u_\varepsilon\|_0 + \|f - L(D)\, u_\varepsilon\|_0 \to 0$$

gilt. Ist r die Ordnung von $L(D)$, so gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ wegen $u_\varepsilon \in H^r$ (Hilfssatz 2.1) eine Folge $\{u_\nu^{(\varepsilon)}\} \subset C_0^\infty$ derart, daß $\|u_\varepsilon - u_\nu^{(\varepsilon)}\|_r$ für $\nu \to \infty$ gegen Null strebt. Also existiert eine geeignete »Diagonalfolge« $\{u_\nu\} \subset C_0^\infty$ so, daß

$$\|u - u_\nu\|_0 + \|f - L(D)\, u_\nu\|_0 \to 0$$

für $\nu \to \infty$ gilt, d. h. es ist $u \in D(\tilde{L})$ und $\tilde{L}\, u = f = L'^*\, u$.

4. Spektren, Definitions- und Wertemengen partieller Differentialoperatoren in $L^2(\boldsymbol{R}^n)$

4.1. Über das Spektrum eines Differentialoperators beweisen wir

Satz 4.1. *Sei* $L(D)$ *ein nichttrivialer Differentialoperator, und* $\tilde{L}$ *bezeichne den (gemäß 3.1 erklärten) von* $L(D)$ *erzeugten minimalen Operator in* L^2. *Das Spektrum* $\sigma(\tilde{L})$ *des Operators* $\tilde{L}$ *ist rein kontinuierlich, und es gilt*

$$\sigma(\tilde{L}) = \overline{\{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \}}\,. \tag{4.1}$$

Falls $\lambda \in \boldsymbol{C}$ *zur Resolventenmenge* $\varrho(\tilde{L})$ *von* $\tilde{L}$ *gehört, so gilt*

$$\|(\tilde{L} - \lambda\, I)^{-1}\| = \frac{1}{d(\lambda\,,\, \sigma(\tilde{L}))}\,, \tag{4.2}$$

wobei

$$d(\lambda, \sigma(\tilde{L})) := \inf_{z \in \sigma(\tilde{L})} |\lambda - z|$$

ist.

Beweis. A. Seien $\lambda \in \boldsymbol{C}$ und $u \in L^2$ so gegeben, daß $(u, (L - \lambda) v)_0 = 0$ für alle $v \in D(\tilde{L})$ gilt. Insbesondere ist dann $(u, (L(D) - \lambda) \varphi)_0 = 0$ für alle $\varphi \in C_0^\infty$. Mittels Hilfssatz 2.2 folgern wir hieraus

$$(\bar{L}(D) - \bar{\lambda}) u_\varepsilon(x) = 0$$

für jedes $\varepsilon > 0$ und für alle $x \in \boldsymbol{R}^n$. Nach Hilfssatz 2.1 gilt $u_\varepsilon \in H^k$ für jedes $k = 0, 1, \ldots$. Also ist auch

$$\overline{(L(\xi) - \lambda)}\, (\mathcal{F} u_\varepsilon)(\xi) = 0$$

für alle $\xi \in \boldsymbol{R}^n$. Falls ξ nicht zur Nullstellenmenge des Polynoms $\overline{L(\xi) - \lambda}$ gehört, so folgt $(\mathcal{F} u_\varepsilon)(\xi) = 0$. Nach Hilfssatz 2.3 ist somit $(\mathcal{F} u_\varepsilon)(\xi) = 0$ fast überall, also gilt $\|\mathcal{F} u_\varepsilon\|_0 = \|u_\varepsilon\|_0 = 0$. Für $\varepsilon \to 0$ ersieht man $\|u\|_0 = 0$. Folglich ist das Punktspektrum von $\tilde{L}$ leer, und für jedes $\lambda \in \boldsymbol{C}$ liegt die Wertemenge von $\tilde{L} - \lambda I$ dicht in L^2. Also ist auch das Restspektrum von $\tilde{L}$ leer.

B. Sei $\lambda \in \varrho(\tilde{L})$. Dann gilt

$$\|(\tilde{L} - \lambda) v\|_0 \geqq \frac{1}{\|(\tilde{L} - \lambda I)^{-1}\|} \|v\|_0 \quad \text{für alle} \quad v \in D(\tilde{L}). \tag{4.3}$$

Mit den in Teil B des Beweises von Satz 1.2 verwendeten Funktionen j und j_k seien $\varphi_k(x) := j_k(x) \exp(i(\xi, x))$ für $k = 1, 2, \ldots$ und für festes $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ erklärt. Weil $L(D)\varphi = \tilde{L}\varphi$ für alle $\varphi \in C_0^\infty$ ist, folgt aus (4.3) und (1.6) nach der verallgemeinerten Leibnizregel für jedes k

$$\frac{1}{\|(\tilde{L} - \lambda I)^{-1}\|} \leqq |L(\xi) - \lambda| + \sum_{|s|>0} \frac{1}{s!} |L^{(s)}(\xi)|\, k^{-|s|}\, \|D^s j\|_0 .$$

Durch Grenzübergang $k \to \infty$ ergibt sich hieraus für jedes $\xi \in \boldsymbol{R}^n$

$$|L(\xi) - \lambda| \geqq \frac{1}{\|(\tilde{L} - \lambda I)^{-1}\|} . \tag{4.4}$$

C. Sei jetzt $\lambda \in \{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \}$. Wäre $\lambda \in \varrho(\tilde{L})$, so würde nach B (4.4) für alle $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ folgen, was nicht möglich ist. Also ist

$$\{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \} \subset \sigma(\tilde{L})$$

und wegen der Abgeschlossenheit von $\sigma(\tilde{L})$ auch

$$\overline{\{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \}} \subset \sigma(\tilde{L}) .$$

Falls $\lambda \notin \overline{\{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \}}$, so ist

$$\delta := d\big(\lambda , \overline{\{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \}}\big) > 0 .$$

Weil $|L(\xi) - \lambda| \geqq \delta$ für alle $\xi \in \boldsymbol{R}^n$ ist, folgt bei beliebiger Wahl von $\varphi \in C_0^\infty$

$$\text{(4.5)} \qquad \|(L(D) - \lambda) \varphi\|_0^2 = \int_{\boldsymbol{R}^n} |L(\xi) - \lambda|^2 \, |(\mathcal{F} \varphi)(\xi)|^2 \, d\xi$$

$$\geqq \delta^2 \int_{\boldsymbol{R}^n} |(\mathcal{F} \varphi)(\xi)|^2 \, d\xi = \delta^2 \, \|\varphi\|_0^2 .$$

Aus den Definitionen von L und $\tilde{L}$ folgt $\|(\tilde{L} - \lambda) v\|_0 \geqq \delta \|v\|_0$ für alle $v \in D(\tilde{L})$. Berücksichtigt man A, so folgt $\lambda \in \varrho(\tilde{L})$; also ist

$$\sigma(L) \subset \overline{\{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \}} .$$

Damit haben wir (4.1) bewiesen.

D. Wegen (4.1) folgt aus (4.5), daß

$$\|(\tilde{L} - \lambda I)^{-1}\| \leqq \frac{1}{d(\lambda , \sigma(\tilde{L}))}$$

gilt. Gemäß (4.4) ist

$$d(\lambda , \sigma(\tilde{L})) = \inf_{\xi \in \boldsymbol{R}^n} |L(\xi) - \lambda| \geqq \frac{1}{\|(\tilde{L} - \lambda I)^{-1}\|} .$$

Aus den beiden letzten Ungleichungen erhält man (4.2).

Bemerkung. *Ist* $L(D)$ *insbesondere* $2t$*-koerzitiv* $(t > 0)$, *so gilt sogar* $\sigma(\tilde{L}) = \{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \}$. Dann ist nämlich die Menge $\{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \}$ abgeschlossen: Für einen $2t$-koerzitiven Operator $L(D)$ schreiben wir

$$\text{(4.6)} \qquad \{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \} = \{ L(\xi) \mid |\xi| \leqq R \} \cup \{ L(\xi) \mid |\xi| \geqq R \} ,$$

wobei R wie in (1.1) erklärt ist. Die erste Menge der rechten Seite von (4.6) ist als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt. Falls $\{z_j\} \subset \{ L(\xi) \mid |\xi| \geqq R \}$, so existieren ξ_j mit $|\xi_j| \geqq R$ und $L(\xi_j) = z_j$; aus $z_j \to z$ $(\in \boldsymbol{C})$ folgt mittels (1.1), daß die Folge $\{\xi_j\}$ eine Cauchyfolge in $\boldsymbol{R}^n$ ist. Also existiert ein $\xi^* \in \boldsymbol{R}^n$ derart, daß $\xi_j \to \xi^*$; daher hat man $z_j = L(\xi_j) \to L(\xi^*)$, und folglich ist $L(\xi^*) = z$. Somit ist auch die zweite Menge der rechten Seite von (4.6) abgeschlossen. Im allgemeinen Fall ist die Menge $\{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \}$ nicht notwendig abgeschlossen. Dies sieht man einfach durch das folgende Beispiel [7]): Für $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \boldsymbol{R}^2$ sei

$$L_0(\xi) = L_0(\xi_1, \xi_2) := (1+\xi_2^2)\, \xi_1^2\, \xi_2^2 + 2\, \xi_1\, \xi_2 + 1 .$$

Der entsprechende Differentialoperator $L_0(D)$ ist sogar formal selbstadjungiert. Insbesondere ist $L_0(\xi) > 0$ für alle $\xi \in \boldsymbol{R}^2$. Für festes $\xi_0 \neq 0$ hat $L_0(\xi) = L_0(\xi_1, \xi_2)$, als Funktion von $\xi_1 \in \boldsymbol{R}$ aufgefaßt, ein Minimum für $\xi_1^* := -1 / ((1+\xi_2^2)\, \xi^2)$ mit Wert $L_0(\xi_1^*, \xi_2) = \xi_2^2 / (1+\xi_2^2)$. Somit strebt $L_0(\xi_1^*, \xi_2)$ für $\xi_2 \to 0$ gegen Null. Wäre $0 \in \varrho(\tilde{L}_0)$, so wäre nach (4.4) $|L_0(\xi)| \geqq 1 / \|\tilde{L}_0^{-1}\| > 0$ für alle $\xi \in \boldsymbol{R}^2$, was also nicht möglich ist. Folglich ist $0 \in \sigma(\tilde{L}_0)$, aber $0 \notin \{ L_0(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^2 \}$. [8])

4.2. Wir geben jetzt eine Charakterisierung der Definitionsmenge $D(\tilde{L})$ und der Wertemenge $R(\tilde{L})$ des in 3.1 erklärten Operators $\tilde{L}$.

Satz 4.2. *Sei* $L(D)$ *ein nichttrivialer Differentialoperator, und* $\tilde{L}$ *bezeichne den von* $L(D)$ *erzeugten minimalen Operator in* L^2.

Dann fällt die Definitionsmenge $D(\tilde{L})$ *von* $\tilde{L}$ *mit der Menge derjenigen Funktionen* $u \in L^2$ *zusammen, für die die durch* $U(\xi) := (\mathcal{F} u)(\xi)\, L(\xi)$ *erklärten Funktionen* U *zu* L^2 *gehören.*

Ferner besteht die Wertemenge $R(\tilde{L})$ *von* $\tilde{L}$ *genau aus denjenigen Funktionen* $f \in L^2$, *für die die durch*

$$F(\xi) := \begin{cases} \dfrac{(\mathcal{F} f)(\xi)}{L(\xi)} & \textit{für } L(\xi) \neq 0 \\ 0 & \textit{für } L(\xi) = 0 \end{cases}$$

erklärten Funktionen F *in* L^2 *liegen.*

Beweis. A. Seien zuerst $u \in D(\tilde{L})$ und $f := \tilde{L}\, u$. Wir werden zeigen, daß dann $U \in L^2$ und $F \in L^2$ gilt. Zu u gibt es eine Folge $\{u_j\} \subset C_0^\infty$ mit

$$\|u - u_j\|_0 + \|f - L(D)\, u_j\|_0 \to 0$$

[7]) Dieses Beispiel verdanken wir Herrn K. Stein.

[8]) *Zusatz bei der Korrektur (Juni 1972).* Nachdem diese Arbeit vorgelegt war, wurde den Verfassern bekannt, daß M. Schechter schon im Jahre 1968 Resultate veröffentlicht hat, die ähnlich den Resultaten von 4.1 sind (man vergleiche [12] sowie auch [13], S. 63—65 und 251—254). Er hat z. B. Identität (4.1) bewiesen. Es sei auch erwähnt, daß die in der Bemerkung erwähnte Beschreibung des Spektrums eines $2\,t$-koerzitiven Operators ein Korollar von seinem folgenden Ergebnis ist: *Die Menge* $\{ L(\xi) \mid \xi \in \boldsymbol{R}^n \}$ *ist abgeschlossen, falls* $L(\xi) \to \infty$ *für* $|\xi| \to \infty$ *gilt.*

für $j \to \infty$, daher gilt auch

$$\|\mathcal{F} u - \mathcal{F} u_j\|_0 + \|\mathcal{F} f - (\mathcal{F} u_j) L(\,.\,)\|_0 \to 0 \,.$$

Also existiert eine Teilfolge $\{u_{j'}\} \subset \{u_j\}$ derart, daß

$$(\mathcal{F} u_{j'})(\xi) \to (\mathcal{F} u)(\xi) \quad \text{f. ü. (fast überall)}$$

und

$$(\mathcal{F} u_{j'})(\xi)\, L(\xi) \to (\mathcal{F} f)(\xi) \quad \text{f. ü.}$$

gilt. Somit haben wir

$$U(\xi) = (\mathcal{F} u)(\xi)\, L(\xi) = (\mathcal{F} f)(\xi) \quad \text{f. ü.}$$

Folglich ist $U \in L^2$. Da $L(D)$ nichttrivial ist, ist

$$N(L) := \{\, \xi \in \boldsymbol{R}^n \mid L(\xi) = 0 \,\}$$

nach Hilfssatz 2.3 eine Nullmenge. Also ist

$$F(\xi) = (\mathcal{F} u)(\xi) \quad \text{f. ü.,}$$

und es gilt $F \in L^2$.

B. Sei $u \in L^2$ derart, daß $U \in L^2$ gilt. Wir zeigen, daß u in $D(\tilde{L})$ ist. Die Funktion $f := \mathcal{F}^{-1} U$ ist in L^2, also gilt

$$U(\xi) = (\mathcal{F} u)(\xi)\, L(\xi) = (\mathcal{F} f)(\xi) \quad \text{f. ü.}$$

Für jedes $\varphi \in C_0^\infty$ ist

$$\begin{aligned}(u\,, \bar{L}(D)\,\varphi)_0 &= \int_{\boldsymbol{R}^n} \overline{(\mathcal{F} u)(\xi)}\, \overline{L(\xi)}\, (\mathcal{F} \varphi)(\xi)\, d\xi \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^n} \overline{(\mathcal{F} f)(\xi)}\, (\mathcal{F} \varphi)(\xi)\, d\xi = (f\,, \varphi)_0\,,\end{aligned}$$

und gemäß (3.2) hat man $u \in D(L'^*)$. Nach Satz 3.1 ist $u \in D(\tilde{L})$.

C. Sei $f \in L^2$ so beschaffen, daß $F \in L^2$. Dann ist $u := \mathcal{F}^{-1} F \in L^2$ und daher

$$U(\xi) := (\mathcal{F} u)(\xi)\, L(\xi) = (\mathcal{F} f)(\xi) \quad \text{f. ü.,}$$

also ist $U \in L^2$. Nach B folgt, daß $u \in D(\tilde{L})$ und $f = \tilde{L}\, u \in R(\tilde{L})$ gilt.

5. Regularitätssätze

5.1. Es gilt

Satz 5.1. *Sei* $L(D)$ *ein Differentialoperator, und sei* $\tilde{L}$ *der (in 3.1 erklärte) von* $L(D)$ *erzeugte minimale Operator in* L^2. *Falls es für ein* $\lambda \in \varrho(\tilde{L})$

und für eine ganze Zahl $k > 0$ *zwei Funktionen* $f \in H^k$ *und* $u \in D(\tilde{L})$ *so gibt, daß*

$$(\tilde{L} - \lambda)\, u = f$$

ist, so gilt $u \in H^k$ *und*

$$\|u\|_k \leqq \gamma(\lambda)\, \|f\|_k\,, \tag{5.1}$$

wobei $\gamma(\lambda) := \|(\tilde{L} - \lambda\, I)^{-1}\|$ *(mit der Operatorennorm in* L^2*) ist.*

Beweis. Weil $\lambda \in \varrho(\tilde{L})$ ist, so gilt

$$\|(\tilde{L} - \lambda)\, v\|_0 \geqq \frac{1}{\gamma(\lambda)}\, \|v\|_0 \quad \text{für alle} \quad v \in D(\tilde{L})\,.$$

Da $\tilde{L}\, \varphi = L(D)\, \varphi$ für alle $\varphi \in C_0^\infty$ ist, folgt

$$\begin{aligned}
\|(L(D) - \lambda)\, \varphi\|_k^2 &= \sum_{|s| \leqq k} \|D^s\, (L(D) - \lambda)\, \varphi\|_0^2 \\
&= \sum_{|s| \leqq k} \|(L(D) - \lambda)\, D^s\, \varphi\|_0^2 \\
&\geqq \frac{1}{(\gamma(\lambda))^2} \sum_{|s| \leqq k} \|D^s\, \varphi\|_0^2 \\
&= \frac{1}{(\gamma(\lambda))^2}\, \|\varphi\|^2 \quad \text{für alle} \quad \varphi \in C_0^\infty\,.
\end{aligned}$$

Sei r die Ordnung von $L(D)$. Dann folgt durch Approximation, daß auch

$$\|(L(D) - \lambda)\, v\|_k \geqq \frac{1}{\gamma(\lambda)}\, \|v\|_k \quad \text{für alle} \quad v \in H^{r+k} \tag{5.2}$$

ist. Wegen $C_0^\infty \subset D(L^*)$ und $L^*\, \varphi = L(D)\, \varphi$ für alle $\varphi \in C_0^\infty$ gilt

$$(f\,, \varphi)_0 = ((\tilde{L} - \lambda)\, u\,, \varphi)_0 = (u\,, (\bar{L}(D) - \bar{\lambda})\, \varphi)_0\,.$$

Nach Hilfssatz 2.2 ist $(L(D) - \lambda)\, u_\varepsilon = f_\varepsilon$ für jedes $\varepsilon > 0$. Ferner hat man

$$(L(D) - \lambda)\, D^s\, u_\varepsilon = D^s f_\varepsilon \tag{5.3}$$

für jedes s mit $|s| \leqq k$. Gemäß Hilfssatz 2.1 ist $u_\varepsilon \in H^{r+k}$, und aus (5.2) folgt für $\varepsilon'\,, \varepsilon'' > 0$

$$\|f_{\varepsilon'} - f_{\varepsilon''}\|_k \geqq \frac{1}{\gamma(\lambda)}\, \|u_{\varepsilon'} - u_{\varepsilon''}\|_k\,. \tag{5.4}$$

Da $f \in H^k$ gilt, so folgt wegen $D^s f_\varepsilon = (D^s f)_\varepsilon$ nach (2.2) $\|f - f_\varepsilon\|_k \to 0$

für $\varepsilon \to 0$. Hieraus und aus (5.4) ergibt sich die Konvergenz von $\{u_\varepsilon\}$ in H^k. Also existiert ein $v \in H^k$ derart, daß

$$\|v - u_\varepsilon\|_k \to 0 .$$

Wegen

$$\|u - u_\varepsilon\|_0 \to 0$$

ergibt sich $u(\xi) = v(\xi)$ f. ü., folglich ist $u \in H^k$. Wenn wir $v = u_\varepsilon$ in (5.2) einsetzen und (5.3) beachten, erhalten wir (5.1) durch den Grenzübergang $\varepsilon \to 0$.

5.2. Eine schärfere Aussage gilt für $2t$-koerzitive Differentialoperatoren:

Satz 5.2. *Der Differentialoperator $L(D)$ der Ordnung r sei $2t$-koerzitiv ($r \geqq 2t$, $t > 0$), und $\tilde{L}$ bezeichne den (in 3.1 erklärten) von $L(D)$ erzeugten minimalen Operator in L^2. Falls es für eine ganze Zahl $k \geqq 0$ zwei Funktionen $f \in H^k$ und $u \in D(\tilde{L})$ so gibt, daß $L u = f$ ist, so ist $u \in H^{2t+k}$, und es existiert eine (nicht von f oder u abhängige) Konstante $C(k) > 0$ derart, daß*

$$\|u\|_{2t+k} \leqq C(k)\,(\|f\|_k + \|u\|_0) \tag{5.5}$$

ist.

Beweis. Weil $\tilde{L}\, u = f$ gilt und $L^*\varphi = \bar{L}(D)\,\varphi$ für alle $\varphi \in C_0^\infty$ ist, folgt

$$(f, \varphi)_0 = (u, \bar{L}(D)\,\varphi)_0$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$. Nach Hilfssatz 2.2 ist daher für jedes $\varepsilon > 0$

$$L(D)\, u_\varepsilon = f_\varepsilon . \tag{5.6}$$

Da gemäß Hilfssatz 2.1 $u_\varepsilon \in H^{r+k}$ ist, existieren nach Satz 1.3 zwei Konstanten $C_1(k) > 0$ und $C_2(k) \geqq 0$ derart, daß für alle $\varepsilon', \varepsilon'' > 0$

$$\begin{aligned} C_1(k)\, \|u_{\varepsilon'} - u_{\varepsilon''}\|_{2t+k} &\leqq \|L(D)\,(u_{\varepsilon'} - u_{\varepsilon''})\|_k + C_2(k)\, \|u_{\varepsilon'} - u_{\varepsilon''}\|_0 \\ &= \|f_{\varepsilon'} - f_{\varepsilon''}\|_k + C_2(k)\, \|u_{\varepsilon'} - u_{\varepsilon''}\|_0 \end{aligned} \tag{5.7}$$

ist. Wegen $f \in H^k$ gilt $\|f - f_\varepsilon\|_0 \to 0$ für $\varepsilon \to 0$ und wegen $u \in L^2$ auch

$$\|u - u_\varepsilon\|_0 \to 0 . \tag{5.8}$$

Aus (5.7) folgert man deshalb die Existenz eines $v \in H^{2t+k}$ derart, daß

$$\|v - u_\varepsilon\|_{2t+k} \to 0 \tag{5.9}$$

gilt. Nach (5.8) und (5.9) ist $v(\xi) = u(\xi)$ f. ü., und es gilt $u \in H^{2t+k}$.

Wenn wir $u = u_\varepsilon$ in (1.10) einsetzen, (5.6) beachten und zur Grenze $\varepsilon \to 0$ übergehen, erhalten wir Abschätzung (5.5), wobei

$$C(k) := \frac{1}{C_1(k)} \max\{1 , C_2(k)\}$$

ist.

Korollar 5.3. *Sei $L(D)$ ein $2t$-koerzitiver Differentialoperator. Die Funktionen $f \in H^k$ und $u \in L^2$ seien so beschaffen, daß*

$$(u , \bar{L}(D) \varphi)_0 = (f , \varphi)_0 \tag{5.10}$$

für alle $\varphi \in C_0^\infty$ gilt. Dann ist $u \in H^{2t+k}$, und es gilt

$$\tilde{L} u = f .$$

Beweis. Aus (5.10) folgt nach (3.2) und Satz 3.1, daß $u \in D(\tilde{L})$ und $\tilde{L} u = f$ gilt. Aus Satz 5.2 folgt dann die Behauptung.

5.3. Falls für einen Differentialoperator $L(D)$ und für ein $\lambda \in \varrho(\tilde{L})$ zwei Funktionen $f \in H^\infty := \bigcap_{k=1}^\infty H^k$ und $u \in D(L) \subset L^2$ derart existieren, daß $(\tilde{L} - \lambda) u = f$ gilt, so ist nach Satz 5.1 $u \in H^\infty$. Aus einem Lemma von Sobolev folgt $u \in C^\infty$ und $f \in C^\infty$ (man vergleiche etwa Friedman [3], S. 30, und Yosida [14], S. 174—175); also gilt

$$(L(D) - \lambda) u = f ,$$

d. h. u ist eine »klassische« Lösung dieser Differentialgleichung.

Wenn es im Falle eines $2t$-koerzitiven Differentialoperators $L(D)$ zwei Funktionen $f \in H^\infty$ und $u \in D(L)$ derart gibt, daß $\tilde{L} u = f$ ist, so folgt aus Satz 5.2 $u \in H^\infty$. Daher hat man $u \in C^\infty$, $f \in C^\infty$ und

$$L(D) u = f .$$

Es sei betont, daß wir aus *globalen* Regularitätseigenschaften der »Daten» f ($f \in H^k$) auf *globale* Regularitätseigenschaften der schwachen Lösungen u der Differentialgleichung schließen konnten. Im allgemeinen Fall kann man aus *lokalen* Regularitätseigenschaften von f jedoch *nicht* entsprechend *lokale* Regularitätseigenschaften der schwachen Lösungen u folgern. Dies kan man nur, falls der Differentialoperator hypoelliptisch ist (man vergleiche L. Hörmander [9] und insbesondere [10], S. 96—114).

Universität Jyväskylä
Mathematisches Institut
SF-40100 Jyväskylä 10
Finnland

Ludwig-Maximilians-Universität
Mathematisches Institut
D-8000 München 2
Deutschland

Literatur

[1] AGMON, S.: The coerciveness problem for integro-differential forms. - J. Analyse math. 6, 1958, S. 183–223.

[2] —»— Lectures on elliptic boundary value problems. - Van Nostrand mathematical studies 2. D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton (N. J.) / Toronto / New York / London, 1965.

[3] FRIEDMAN, A.: Partial differential equations. - Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York / Chicago / San Francisco / Atlanta / Dallas / Montreal / Toronto / London / Sydney, 1969.

[4] FRIEDRICHS, K. O.: The identity of weak and strong extensions of differential operators. - Trans. Amer. math. Soc. 55, 1944, S. 132–151.

[5] GÅRDING, L.: Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations. - Math. Scandinav. 1, 1953, S. 55–72.

[6] GOLDSTEIN, R. A.: Equality of minimal and maximal extensions of partial differential operators in $L_p(R^n)$. - Proc. Amer. math. Soc. 17, 1966, S. 1031–1033.

[7] HESS, P.: Über die wesentliche Maximalität gleichmäßig stark elliptischer Operatoren in $L^2(R^n)$. - Math. Z. 107, 1968, S. 67–70.

[8] —»— Über das verallgemeinerte Dirichletproblem für lineare partielle Differentialgleichungen. - Ann. Acad. Sci. Fennicæ A. I. 434, 1969.

[9] HÖRMANDER, L.: On the theory of general partial differential operators. - Acta math. 94, 1955, S. 161–248.

[10] —»— Linear partial differential operators. - [Third revised printing.] Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 116. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1969.

[11] Schechter, M.: Coerciveness of linear partial differential operators for functions satisfying zero Dirichlet-type boundary data. - Commun. pure appl. Math. 11, 1958, S. 153–174.

[12] —»— The spectra of non-elliptic operators. - Israel J. Math. 6, 1968, S. 387–397.

[13] —»— Spectra of partial differential operators. - North-Holland series in applied mathematics and mechanics 14. North-Holland Publishing Company, Amsterdam / London, 1971.

[14] YOSIDA, K.: Functional analysis. - [Third edition.] Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 123. Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1971.

Gedruckt Oktober 1972