ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

502

EINSCHLIESSUNG VON NULLSTELLEN BEI OPERATOREN MIT MONOTON ZERLEGBARER STEIGUNG DURCH ÜBERLINEAR KONVERGENTE ITERATIONSVERFAHREN

VON

J. W. SCHMIDT

HELSINKI 1972
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1972.502

ISBN 951-41-0019-0

Am 13. September 1971 vorgelegt von PENTTI LAASONEN

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1972

1. Einleitung

Eine Klasse von Näherungsverfahren kann durch die folgenden beiden Eigenschaften charakterisiert werden. Zur Bestimmung einer Zahl oder allgemeiner eines Elementes x^* eines normierten halbgeordneten Raumes werden zwei Folgen (x_n) und (y_n) ermittelt, für welche erstens die monotone Einschliessung

$$x_n \leqq x_{n+1} \leqq x^* \leqq y_{n+1} \leqq y_n \; (n = 1\,,\, 2\,,\, \ldots) \tag{1}$$

besteht und zweitens die Konvergenz

$$\lim x_n = \lim y_n = x^* \tag{2}$$

zutrifft. Die Vorteile derartiger Verfahren liegen auf der Hand. Unter anderem entfallen zusätzliche Bemühungen zur Aufstellung einer Fehlerabschätzung; mit dem Vorliegen von x_n und y_n kann deren Güte unmittelbar erfasst werden. Eine Fortsetzung der Verfahren ergibt höchstens bessere Werte. Andererseits bedingen die günstigen Eigenschaften, dass es bei konkreten Problemen nicht immer einfach ist, solche Verfahren anzugeben.

Das aufgezeigte Prinzip ist schon von Archimedes bei der Berechnung der Zahl π verwirklicht worden, indem er für y_n den halben Umfang des dem Einheitskreis umbeschriebenen n-Ecks und für x_n diesen vom einbeschriebenen n-Eck genommen hat. Es gelten (1) und (2). Gut bekannt ist das Ergebnis im Falle des 96-Ecks:

$$3{,}1408 \leqq 3 + \frac{10}{71} \leqq \pi \leqq 3 + \frac{10}{70} \leqq 3{,}1429\,.$$

Für die Zielstellung sei weiter auf die Arbeiten von J. Albrecht [1], R. Bulirsch und J. Stoer [3], J. W. Schmidt [12] und R. Nicolovius [8] hingewiesen, in denen mit Hilfe des Extrapolationsverfahrens oder des δ^2-Prozesses Folgen (x_n) und (y_n) mit den Eigenschaften (1) und (2) konstruiert werden, wobei jedoch (1) teilweise erst von einem Index ab gilt.

Über Ergebnisse der Arbeit hat der Verfasser am 13.5.71 an der TU Helsinki auf freundliche Einladung ihres Rektors, Prof. Dr. Laasonen, vorgetragen.

Bei der Aufgabe der Lösung von linearen und nichtlinearen Operatorgleichungen ist das obige Prinzip wiederholt verfolgt worden. Im Zusammenhang mit der Fixpunktgleichung sei die Arbeit von L. W. Kantorowitsch [6] erwähnt. Hier werden monotone Operatoren vorausgesetzt. J. Schröder [15], s. auch [4], gelingt darüber hinaus die Verwirklichung von (1) (und (2)) bei monoton zerlegbaren Operatoren. Die Grundlage bilden das gewöhnliche Iterationsverfahren und Erweiterungen davon. Auch Untersuchungen mit überlinear konvergenten Verfahren wie dem Newtonschen Verfahren und der Regula falsi treten in neuerer Zeit stärker in den Vordergrund des Interesses. Genannt seien unter anderem die Arbeiten bzw. Monographien von A. N. Baluev [2], L. Collatz [4], J. S. Vandergraft [16], J. M. Ortega und W. C. Rheinboldt [9, 10], J. W. Schmidt und H. Leonhardt [14], W. Hofmann [5] und J. W. Schmidt [13]. Generell trifft man hier die Voraussetzung an, dass die betreffenden Operatoren in einem bestimmten Sinne konvex sind bzw. eine monotone Ableitung oder Steigung besitzen.

Das Anliegen der jetzigen Arbeit ist es nun, diesen Typ von Voraussetzungen abzuschwächen. Es wird lediglich die monotone Zerlegbarkeit der Steigung verlangt. Um dennoch die Eigenschaften (1) und (2) zu sichern, sind die Vorschriften aus [16], [14] und [13], worauf hier besonders Bezug genommen wird, entsprechend abzuwandeln; dies geschieht durch die Verfahren (6) und (7). Es kann die überlineare Konvergenz der Einschliessungsfolgen nachgewiesen werden.

2. Hilfsmittel und Beschreibung der Verfahren

Den Betrachtungen ist ein Raum R zugrunde zu legen, in dem neben einem Konvergenzbegriff eine Halbordnung erklärt ist. Konkret seien R ein linearer, normierter Raum, teilweise sogar ein Banachraum, und $K \subset R$ ein Kegel, d.h. aus $x, y \in K$, $\alpha \geqq 0$ folgen $x + y, \alpha x \in K$, und im Falle $x, -x \in K$ ist $x = 0$. Durch die Festsetzung, dass $x \leqq y$ für $x, y \in R$ genau für $y - x \in K$ zutrifft, wird R zu einem halbgeordneten Raum. Die Menge $[x, y] = \{z \in R : x \leqq z \leqq y\}$ wird Intervall genannt; sie ist konvex. Falls K abgeschlossen ist, folgt aus $x_n \geqq 0$ für alle n und $\lim x_n = x$ stets $x \geqq 0$; und Intervalle sind abgeschlossen. Der Kegel K heisst *normal*, wenn eine Konstante $\alpha > 0$ existiert, mit der sich $\|x\| \leqq \alpha \|y\|$ aus $0 \leqq x \leqq y$ ergibt. Aus der Normalität von K folgt die Beschränktheit von Intervallen im Sinne der Norm. Der Raum R heisst *regulär*, wenn monotone und beschränkte Folgen aus R konvergent sind; Regularität liegt also vor, wenn die Ungleichungskette

$$x_1 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq x_{n+1} \leqq \ldots \leqq z$$

das Vorhandensein von $\lim x_n$ nach sich zieht.

Es sei F ein Operator von R bzw. $V \subset R$ in R. Ein bei festen $u, v \in V$ linearer, beschränkter Operator $\delta F(u, v)$ von R in sich heisst *Steigung* von F, wenn für $u, v, w \in V$ mit einer Konstanten β gilt (s. J. W. Schmidt [11]):

$$F(u) - F(v) = \delta F(u, v)(u - v), \tag{3}$$

$$\|\delta F(u, v) - \delta F(v, w)\| \leqq \beta\{\|u - v\| + \|v - w\|\}. \tag{4}$$

Falls der Operator F eine Steigung besitzt, ist er im Fréchetschen Sinne differenzierbar, und es gilt

$$F'(u) = \delta F(u, u);$$

dies lässt sich leicht mit Hilfe von (3) und (4) bestätigen. Der Operator F heisst *monoton wachsend* auf V, falls $F(x) \leqq F(y)$ aus $x \leqq y$ und $x, y \in V$ folgt. Für Operatoren G, H von R in sich bedeute $G \leqq H$, dass $G(x) \leqq H(x)$ für $x \geqq 0$ zutrifft. H wird als *positiv* bezeichnet, sofern $H \geqq 0$ ist, d.h. $H(x) \geqq 0$ für $x \geqq 0$ gilt. Falls F auf V eine Steigung besitzt, wird diese dort *monoton wachsend* genannt, wenn im Falle $u, v, w, z \in V$ gilt:

$$\delta F(u, v) \leqq \delta F(w, z) \quad \text{für} \quad u \leqq w, v \leqq z;$$

wenn

$$\delta F(u, v) \geqq \delta F(w, z) \quad \text{für} \quad u \leqq w, v \leqq z$$

zutrifft, heisst die Steigung *monoton fallend*. Wegen $F'(u) = \delta F(u, u)$ ist hiermit die Monotonie auch für die Fréchetableitung erklärt.

Für einen Operator F von $V \subset R$ in R wird die Aufgabe

$$F(x) = 0 \tag{5}$$

betrachtet. Es lasse sich F darstellen als $F = F^+ + F^-$, wobei F^+ eine monoton wachsende und F^- eine monoton fallende Steigung auf V habe; es sei also, wie abkürzend gesagt werden soll, F ein Operator mit *monoton zerlegbarer* Steigung. Zur monotonen Eingrenzung einer Nullstelle von F sind die folgenden Verfahren geeignet:

$$\begin{aligned} &F(x_n) + \{F^{+\prime}(x_n) + F^{-\prime}(y_n)\}(x_{n+1} - x_n) = 0 \\ &F(y_n) + \{F^{+\prime}(x_n) + F^{-\prime}(y_n)\}(y_{n+1} - y_n) = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

und

$$\begin{aligned} &F(x_n) + \{\delta F^+(x_n, x_{n-1}) + \delta F^-(y_n, y_{n-1})\}(x_{n+1} - x_n) = 0 \\ &F(y_n) + \{\delta F^+(x_n, x_{n-1}) + \delta F^-(y_n, y_{n-1})\}(y_{n+1} - y_n) = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

Das Verfahren (6) ist vom Typ des Newtonschen Verfahrens und eine Erweiterung einer Vorschrift, welche für Funktionen mit monoton wachsender Ableitung bereits von J. B. J. Fourier im Jahre 1818 angegeben worden ist. Das Verfahren (7) ist vom Typ der Regula falsi; ein wesentlicher Vorläufer für Operatoren mit monoton wachsender Steigung ist in [14] betrachtet worden. Die Untersuchung der Verfahren (6) und (7) kann weitgehend parallel erfolgen. Daher ist es zweckmässig, von dem umfassenden Verfahren

$$F(x_n) + \{\delta F^+(x_n, u_n) + \delta F^-(y_n, v_n)\}(x_{n+1} - x_n) = 0 \tag{8}$$
$$F(y_n) + \{\delta F^+(x_n, u_n) + \delta F^-(y_n, v_n)\}(y_{n+1} - y_n) = 0$$

auszugehen; für $u_n = x_n$ und $v_n = y_n$ entsteht (6), während man (7) für $u_n = x_{n-1}$ und $v_n = y_{n-1}$ erhält. Allgemein genügt es für die monotone Einschliessung, $u_n \leqq x_n$, $v_n \geqq y_n$ und u_n, $v_n \in V$ zu verlangen.

3. Einschliessungssätze

Es werden für das Verfahren (8) mehrere Einschliessungssätze bewiesen; sie sind insbesondere für die wichtigen Sonderfälle (6) und (7) gültig.

Satz 1.

(a) *Es sei* R *ein linearer, normierter Raum, halbgeordnet durch einen abgeschlossenen Kegel* $K \subset R$;[1])

(b) R *sei regulär;*

(c) *der Operator* F *von* $V \subset R$ *in* R *besitze auf* V *eine monoton zerlegbare Steigung:*[2]) $F = F^+ + F^-$ *und* δF^+ *monoton wachsend,* δF^- *monoton fallend auf* V;

(d) *es gelten:* $x_1, y_1, u_1, v_1 \in V$, $u_1 \leqq x_1 \leqq y_1 \leqq v_1$, $F(x_1) \geqq 0$, $F(y_1) \leqq 0$ *und* $[u_1, v_1] \subset V$;

(e) *es existiere ein Operator* G *von* R *in sich mit*
$-2\delta F^+(u, v) \leqq G$, $-2\delta F^-(u, v) \leqq G$ *für* $u, v \in V$,
und es sei G^{-1} *vorhanden, linear, beschränkt und positiv.*[3])

Unter diesen Voraussetzungen gelten folgende Aussagen:

(A) *Die linearen Gleichungen* (8) *haben*[4]) *für jedes* n *mindestens eine Lösung* x_{n+1} *bzw.* y_{n+1};

---

[1]) Die Voraussetzung (a) kann in dem in [14] vorgeführten Sinne etwas abgeschwächt werden.

[2]) Die Eigenschaft (4) der Steigung wird in den Sätzen 1 und 2 nicht ausgenutzt, doch ist dann die Stetigkeit von F aufzunehmen.

[3]) Aus der Linearität von G^{-1} folgt die von G.

[4]) Im Falle von $u_n \leqq x_n$, $v_n \geqq y_n$ und u_n, $v_n \in V$

(B) *die Folgen* (x_n) *und* (y_n) *sind gegen Nullstellen* x^* *und* y^* *von* F *konvergent;*

(C) *es besteht die monotone Einschliessung*

$$x_n \leqq x_{n+1} \leqq x^* \leqq y^* \leqq y_{n+1} \leqq y_n \quad (n = 1\,, 2, \ldots)\,.$$

Beweis. Es wird zunächst die folgende Aussage A_n durch Induktion bestätigt:

$$x_1 \leqq \cdot\cdot \leqq x_n \leqq x_{n+1} \leqq y_{n+1} \leqq y_n \leqq \cdot\cdot \leqq y_1\,;$$

$$F(x_{n+1}) \geqq 0\,,\; F(y_{n+1}) \leqq 0\,.$$

A_0 is vorausgesetzt worden. Um A_n aus A_{n-1} zu folgern, wird zuerst der Hilfsoperator

$$\begin{aligned} H(x) &= x + G^{-1}\{F(x_n) + (\delta F^+(x_n\,, u_n) + \delta F^-(y_n\,, v_n))\,(x)\} \\ &= G^{-1}\{G(x) + \delta F^+(x_n\,, u_n)\,(x) + \delta F^-(y_n\,, v_n)\,(x) + F(x_n)\} \end{aligned}$$

eingeführt; mit seiner Hilfe wird die Existenz einer Lösung $x_{n+1} \in [x_n\,, y_n]$ der ersten Gleichung von (8) nachgewiesen. Es gilt im einzelnen

$$H(0) = G^{-1}\,F(x_n) \geqq 0$$

und

$$\begin{aligned} H(y_n - x_n) &= y_n - x_n + G^{-1}\{F(x_n) + (\delta F^+(x_n\,, u_n) + \delta F^-(y_n\,, v_n))\,(y_n - x_n)\} \\ &\leqq y_n - x_n + G^{-1}\{F^+(x_n) + \delta F^+(x_n\,, y_n)\,(y_n - x_n) + \\ &\qquad + F^-(x_n) + \delta F^-(y_n\,, x_n)\,(y_n - x_n)\,\} \\ &= y_n - x_n + G^{-1}F(y_n) \leqq y_n - x_n\,. \end{aligned}$$

Ausserdem ist H stetig sowie monoton wachsend, denn aus $x \leqq y$ folgt mit (e) die Ungleichung

$$\begin{aligned} H(y) - H(x) &= \frac{1}{2}\{I + 2G^{-1}\,\delta F^+(x_n\,, u_n)\,\}\,(y - x) + \\ &\quad + \frac{1}{2}\{I + 2G^{-1}\,\delta F^-(y_n\,, v_n)\,\}\,(y - x) \geqq 0\,. \end{aligned}$$

Nach einem Hilfssatz aus [6] (s.z.B. [14] oder [10], S. 442), für welchen die Regularität von R wesentlich ist, besitzt H einen Fixpunkt $x \in [0\,, y_n - x_n]$. Das Element $x_{n+1} = x_n + x$ erfüllt somit die erste Gleichung von (8) und die Ungleichung $x_n \leqq x_{n+1} \leqq y_n$. Weiterhin ist $F(x_{n+1}) \geqq 0$, wie sich aus

$$\begin{aligned} F(x_n) &= \{\delta F^+(x_n\,, u_n) + \delta F^-(y_n\,, v_n)\}\,(x_n - x_{n+1}) \\ &\geqq \{\delta F^+(x_n\,, x_{n+1}) + \delta F^-(x_n\,, x_{n+1})\}\,(x_n - x_{n+1}) = F(x_n) - F(x_{n+1}) \end{aligned}$$

ergibt.

Um die y_{n+1} betreffenden Aussagen von A_n zu bestätigen, sei

$$\tilde{H}(x) = x - G^{-1}\{F(y_n) - (\delta F^+(x_n, u_n) + \delta F^-(y_n, v_n))(x)\}.$$

Auch dieser Operator ist stetig und monoton wachsend. Es gelten

$$\tilde{H}(0) = - G^{-1}F(y_n) \geqq 0$$

und

$$\tilde{H}(y_n - x_{n+1}) = y_n - x_{n+1} - G^{-1}\{F(y_n) - (\delta F^+(x_n, u_n) + \delta F^-(y_n, v_n))$$
$$(y_n - x_{n+1})\} \leqq y_n - x_{n+1} - G^{-1}\{F^+(y_n) - \delta F^+(y_n, x_{n+1})(y_n - x_{n+1}) +$$
$$+ F^-(y_n) - \delta F^-(y_n, x_{n+1})(y_n - x_{n+1})\}$$
$$= y_n - x_{n+1} - G^{-1} F(x_{n+1}) \leqq y_n - x_{n+1},$$

so dass nach dem erwähnten Hilfssatz ein Fixpunkt $\tilde{x} \in [0, y_n - x_{n+1}]$ von $\tilde{H}$ vorhanden ist. Die zweite Gleichung von (8) hat $y_{n+1} = y_n - \tilde{x}$ als Lösung, und es ist $x_{n+1} \leqq y_{n+1} \leqq y_n$. Schliesslich gilt wegen

$$F(y_n) = \{\delta F^+(x_n, u_n) + \delta F^-(y_n, v_n)\}(y_n - y_{n+1})$$
$$\leqq \{\delta F^+(y_n, y_{n+1}) + \delta F^-(y_n, y_{n+1})\}(y_n - y_{n+1}) = F(y_n) - F(y_{n+1})$$

noch $F(y_{n+1}) \leqq 0$. Damit ist der induktive Beweis der Aussage A_n vollständig.

Die Regularität des Raumes R sichert die Existenz der Grenzwerte $x^* = \lim x_n$ und $y^* = \lim y_n$, während mit Hilfe der Abgeschlossenheit des Kegels die Ungleichung $x_n \leqq x^* \leqq y^* \leqq y_n$ gefolgert werden kann. Dass x^* und y^* Nullstellen von F sind, ergibt sich über

$$0 \leqq F(x_n) = -\{\delta F^+(x_n, u_n) + \delta F^-(y_n, v_n)\}(x_{n+1} - x_n) \leqq G(x_{n+1} - x_n),$$
$$0 \geqq F(y_n) = -\{\delta F^+(x_n, u_n) + \delta F^-(y_n, v_n)\}(y_{n+1} - y_n) \geqq G(y_{n+1} - y_n)$$

aus

$$0 \leqq G^{-1} F(x_n) \leqq x_{n+1} - x_n, \quad 0 \geqq G^{-1} F(y_n) \geqq y_{n+1} - y_n$$

durch Grenzübergang. Das war zu zeigen.

Während z.B. die Räume R^m und L_2 regulär sind, trifft dies für den bei Anwendungen ebenfalls wichtigen Raum C nicht zu. Dabei ist es von Interesse, dass die Voraussetzung (b) vom Satz 1 entbehrlich ist, wenn dafür die Forderungen an den Operator F und seine Steigung verschärft werden. Es wird die Vollstetigkeit verlangt, d.h. die Eigenschaft, dass die Bilder von beschränkten Mengen kompakt sind. Auf diese Möglichkeit der Verlagerung der Voraussetzungen ist von W. Mönch [7] im Zusammenhang mit den Verfahren aus [14] für Operatoren mit monoton wachsender Steigung hingewiesen worden.

Satz 2.

(a) *Es sei* R *ein Banachraum, der durch einen abgeschlossenen Kegel* $K \subset R$ *halbgeordnet ist;*

(b) *die Voraussetzungen* (c), (d) *und* (e) *von Satz* 1 *seien erfüllt;*

(c) *der Kegel* K *sei normal;*

(d) *die Operatoren*

$$G + F \quad \text{und} \quad G + \delta F^+(u\,,v) + \delta F^-(w\,,z)$$

seien für $u\,,v\,,w\,,z \in V$ *vollstetig.*

Dann erhält man für das Verfahren (8)[4]:

(A) *Die linearen Gleichungen* (8) *sind für jedes* n *durch ein* x_{n+1} *bzw.* y_{n+1} *lösbar;*

(B) *es gilt die monotone Einschliessung*

$$x_n \leqq x_{n+1} \leqq x^* \leqq y_{n+1} \leqq y_n \; (n = 1\,,2,\ldots)\,,$$

wobei x^* *eine Nullstelle von* F *ist.*

Beweis. Die Änderungen gegenüber dem Beweis zum Satz 1 bestehen im wesentlichen darin, dass an die Stelle des Hilfssatzes aus [6] jetzt der Fixpunktsatz von Schauder tritt. Zum induktiven Nachweis der dort formulierten Aussage A_n wird die Definition des Operators H übernommen. Er ist wieder monoton wachsend und bildet das Intervall $[0\,,y_n - x_n]$ in sich ab, denn aus $0 \leqq x \leqq y_n - x_n$ folgt

$$0 \leqq H(0) \leqq H(x) \leqq H(y_n - x_n) \leqq y_n - x_n\,.$$

Die Stetigkeit von G^{-1} und die Vollstetigkeit von $G + \delta F^+(x_n\,,u_n) + \delta F^-(y_n\,,v_n)$ ziehen die Vollstetigkeit von H nach sich. Ausserdem ist H stetig, so dass mit dem Schauderschen Satz auf die Existenz eines Fixpunktes $x \in [0\,,y_n - x_n]$ von H geschlossen werden kann. Es erfüllt $x_{n+1} = x_n + x$ die erste Gleichung (8) und $x_n \leqq x_{n+1} \leqq y_n$. Wie vorhin zeigt man $F(x_{n+1}) \geqq 0$. Analog beweist man mit Hilfe von $\tilde{H}$ die restlichen Teile von A_n.

Der Operator

$$H^*(x) = x + G^{-1}F(x) = G^{-1}\{G(x) + F(x)\}$$

ist vollstetig, da dies für $G + F$ vorausgesetzt worden ist und G^{-1} stetig ist. Es gilt

$$H^*(x_n) = x_n + G^{-1}F(x_n) \geqq x_n\,,\; H^*(y_n) = y_n + G^{-1}F(y_n) \leqq y_n\,.$$

Ausserdem ist H^* stetig sowie monoton wachsend auf $[x_n\,,y_n]$, denn für $x \leqq y$ und $x\,,y \in [x_n\,,y_n]$ erhält man

$$H^*(y) - H^*(x) = y - x + G^{-1}\{ F(y) - F(x) \}$$

$$= \frac{1}{2}\{I + 2G^{-1}\delta F^+(y\,,x)\}(y-x) + \frac{1}{2}\{I + 2G^{-1}\delta F^-(y\,,x)\}(y-x) \geqq 0.$$

Somit bildet H^* das Intervall $[x_n\,, y_n]$ in sich ab und besitzt nach dem Schauderschen Satz einen Fixpunkt $x^* \in [x_n\,, y_n]$; für ihn gilt $F(x^*) = 0$, q.e.d.

Zu den Sätzen 1 und 2 gibt es weitere gleichwertige Varianten; sie unterscheiden sich lediglich in der Richtung der vorkommenden Ungleichungen. Die durch die Sätze 1 und 2 erfasste erste Variante kann im R^1 etwa durch das Bild 1 skizziert werden, während sich eine zweite Version durch das Bild 2 andeuten lässt.[5]) Weitere ergeben sich, indem man F durch $-F$ ersetzt. In der folgenden Tabelle entspricht die erste Spalte der ersten Variante, usw.:

1. Variante	2. Variante
$x_1 \leqq y_1$	$x_1 \geqq y_1$
$F(x_1) \geqq 0\,, F(y_1) \leqq 0$	$F(x_1) \geqq 0\,, F(y_1) \leqq 0$
δF^+ wachsend	δF^+ wachsend
δF^- fallend	δF^- fallend
$-2\delta F^+ \leqq G$	$2\delta F^+ \leqq G$
$-2\delta F^- \leqq G$	$2\delta F^- \leqq G$
$x_n \leqq x^* \leqq y_n$	$y_n \leqq x^* \leqq x_n$

4. Konvergenzgeschwindigkeit der Einschliessungsfolgen

Es wird nach Hinzunahme von weiteren Voraussetzungen für die Verfahren (6) und (7) überlineare Konvergenz nachgewiesen.

Satz 3.

(a) *Es seien alle Voraussetzungen* (a) *bis* (e) *von Satz* 1 *erfüllt;*

(b) *der Kegel* K *sei normal;*

(c) *mit einem Operator* S *von* R *in sich, für den* S^{-1} *vorhanden, linear, beschränkt und positiv sei, gelte*

---

[5]) Im R^1 liegt für F die Konvexität genau dann vor, wenn die Steigung δF — wie üblich sei $\delta F(u\,, v) = (F(u) - F(v))/(u - v)$ — monoton wachsend ist. In anderen Räumen gilt diese Äquivalenz im allgemeinen nicht mehr. Im R^m $(m > 1)$ ist die Monotonie der Steigung weder hinreichend noch notwendig für die Konvexität (vgl. [10], Kapitel 13).

$$S \leqq -2\delta F^+(u, v), \quad S \leqq -2\delta F^-(u, v) \text{ für } u, v \in V .$$

Neben den Aussagen vom Satz 1 *erhält man dann, dass die Folgen* (x_n) *und* (y_n) *im Falle des Verfahrens* (6) *bzw.* (7) *mit der Geschwindigkeit* 2 *bzw.* $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ *gegen die Nullstelle* $x^* = y^*$ *von* F *konvergieren.*

Beweis. Aus dem Satz 1 sind für die Grenzwerte $x^* = \lim x_n$ und $y^* = \lim y_n$ die Beziehungen

$$x^* \leqq y^*, \quad F(x^*) = F(y^*) = 0$$

bekannt. Nun gilt

$$0 = F(y^*) - F(x^*) = \{\delta F^+(y^*, x^*) + \delta F^-(y^*, x^*)\}(y^* - x^*) \leqq -S(y^* - x^*)$$

und somit $0 \leqq -S^{-1} S(y^* - x^*) = x^* - y^*$; also ist $y^* = x^*$.

Aus der ersten Zeile von (8) findet man nacheinander

$$-\{\delta F^+(x_n, u_n) + \delta F^-(y_n, v_n)\}(x^* - x_{n+1}) =$$

$$F(x^*) - F(x_n) - \{\delta F^+(x_n, u_n) + \delta F^-(y_n, v_n)\}(x^* - x_n),$$

$$S(x^* - x_{n+1}) \leqq \{\delta F^+(x^*, x_n) - \delta F^+(x_n, u_n)\}(x^* - x_n) +$$

$$+ \{\delta F^-(x^*, x_n) - \delta F^-(y_n, v_n)\}(x^* - x_n),$$

$$0 \leqq x^* - x_{n+1} \leqq S^{-1}\{(\delta F^+(x^*, x_n) - \delta F^+(x_n, u_n)) +$$

$$+ (\delta F^-(x^*, x_n) - \delta F^-(x_n, y_n)) + (\delta F^-(x_n, y_n) - \delta F^-(y_n, v_n))\}(x^* - x_n).$$

Die Normalität des Kegels K und die Eigenschaft (4) der Steigung lassen damit die folgende Ungleichung zu:

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqq \alpha\beta\|S^{-1}\|\{\|x_n - x^*\| + \|x_n - u_n\| +$$

$$+ \|x_n - x^*\| + 2\|x_n - y_n\| + \|y_n - v_n\|\}\|x_n - x^*\| .$$

Ebenso erhält man aus der zweiten Zeile von (8)

$$\|y_{n+1} - x^*\| \leqq \alpha\beta\|S^{-1}\|\{\|y_n - x^*\| + 2\|y_n - x_n\| + \|x_n - u_n\| +$$

$$+ \|y_n - x^*\| + \|y_n - v_n\|\}\|y_n - x^*\| .$$

Mit den Abkürzungen

$$r_n = \max\{\|x_n - x^*\|, \|y_n - x^*\|\} \text{ und } \gamma = \alpha\beta\|S^{-1}\|$$

ergibt sich aus den letzten beiden Ungleichungen

$$r_{n+1} \leqq \gamma\{8r_n + \|u_n - x^*\| + \|v_n - x^*\|\} r_n . \tag{9}$$

Für das Verfahren (6) geht (9) über in die Ungleichung

$$r_{n+1} \leqq 10\gamma\, r_n^2 \, .$$

Sie beinhaltet die quadratische Konvergenz der Folge (r_n) und damit auch die der Folgen (x_n) und (y_n). Im Falle des Verfahrens (7) entsteht aus (9)

$$r_{n+1} \leqq 8\gamma r_n^2 + 2\gamma r_n r_{n-1} \, .$$

Hier gibt der letzte Summand auf der rechten Seite den Ausschlag für die Konvergenzgeschwindigkeit. Man erhält den Wert $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Auch der Satz 2 kann als Grundlage zur Angabe der Konvergenzgeschwindigkeit dienen. Neben der Voraussetzung (c) vom Satz 3 ist dann noch die Konvergenz der Folgen (x_n) und (y_n) zu fordern.

5. Einige Bemerkungen zu Anwendungen

Auf die Frage der Anwendung der abstrakten Ergebnisse auf Probleme in konkreten Räumen wie z.B. in den Räumen R^m und C ist bei Operatoren mit monoton wachsender Steigung (Ableitung) wiederholt eingegangen worden. Besonders sei in diesem Zusammenhang auf die Arbeiten [16], [14] und [5] verwiesen; in der Regel bereitet die Übertragung auf Operatoren mit monoton zerlegbarer Steigung keine Schwierigkeiten. Über numerische Ergebnisse bei grösseren nichtlinearen Gleichungssystemen wird in [14] und [13] berichtet.

Falls F eine zweimal stetig differenzierbare Funktion des R^1 in sich ist, kann eine Darstellung mit monoton zerlegbarer Steigung in einfacher Weise angegeben werden. Auf Grund der Taylorschen Formel

$$F(x) = F(a) + F'(a)\,(x-a) + \int_a^x (x-t)\, F''(t) dt$$

bietet sich z.B. die Zerlegung $F = F^+ + F^-$ mit

$$F^+(x) = F(a) + F'(a)\,(x-a) + \int_a^x (x-t)\, [F''(t)]^+ \, dt$$

und

$$F^-(x) = \int_a^x (x-t)\, [F''(t)]^- \, dt$$

an. Dabei bedeuten $[F''(t)]^+ = F''(t)$ für $F''(t) \geqq 0$ und $[F''(t)]^+ = 0$

für $F''(t) \leqq 0$ sowie $[F''(t)]^- = F''(t) - [F''(t)]^+$. Die Steigung von F^+ ist dann monoton wachsend, während die von F^- monoton fällt.

Es sei $F(x) = -3x + x^3$. Die Steigung (Ableitung) von F hat in keiner Umgebung der Nullstelle $x = 0$ ein einheitliches Monotonieverhalten. Daher sind die Verfahren aus den zitierten früheren Arbeiten nicht anwendbar; die Verfahren (6) und (7) dagegen führen unmittelbar zum Ziel.

Es ist mit $F = F^+ + F^-$,

$$F^+(x) = \begin{cases} -3x + x^3 & \text{für } x \geqq 0 \\ -3x & \text{für } x \leqq 0 \end{cases}, \quad F^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geqq 0 \\ x^3 & \text{für } x \leqq 0 \end{cases}$$

eine Darstellung mit monoton zerlegbarer Steigung gegeben. Alle Voraussetzungen der Sätze 1 und 3 sind z.B. im Falle $x_1 = u_1 = -1$ und $y_1 = v_1 = 1$ erfüllt. Nach dem Verfahren (6) erhält man folgende Näherungswerte, welche sowohl die monotone Einschliessung als auch die überlineare Konvergenz bestätigen:

n	$y_n = -x_n$	$F(y_n) = -F(x_n)$
1	1	-2
2	0,333 333 333	$-0{,}962$ 962 962
3	0,012 345 679	$-0{,}036$ 986 232
4	0,000 016 935	$-0{,}000$ 050 805
5	0,000 000 000	0,000 000 000

Für einen Operator F des R^m in sich ist eine monotone Zerlegung der Steigung ebenfalls leicht möglich, sofern F quadratisch ist:

$$(F(x))_i = a_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}(x)_j + \sum_{j,k=1}^{m} c_{ijk}(x)_j\,(x)_k \quad (i = 1, \ldots, m);$$

hier bezeichne $(x)_i$ die i-te Komponente des Vektors $x \in R^m$, usw. Man setze z.B.

$$(F^+(x))_i = a_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\,(x)_j + \sum_{j,k=1}^{m} c_{ijk}^+\,(x)_j\,(x)_k\,,$$

$$(F^-(x))_i = \sum_{j,k=1}^{m} c_{ijk}^-\,(x)_j\,(x)_k\,,$$

wobei

$$c_{ijk}^+ = \begin{cases} c_{ijk} & \text{für } c_{ijk} \geqq 0 \\ 0 & \text{für } c_{ijk} \leqq 0 \end{cases}, \quad c_{ijk}^- = \begin{cases} 0 & \text{für } c_{ijk} \geqq 0 \\ c_{ijk} & \text{für } c_{ijk} \leqq 0 \end{cases}$$

seien. Dass F^+ eine monoton wachsende und F^- eine monoton fallende Steigung besitzen, ergibt sich sofort mit den in [14] zusammengestellten Hilfsmitteln. Bei beliebigen Operatoren, deren zweite partielle Steigungen jeweils ein einheitliches Vorzeichen haben, kann unmittelbar wie bei quadratischen Operatoren verfahren werden.

Technische Universität
Dresden

Literatur

[1] ALBRECHT, J.: Fehlerschranken und Konvergenzbeschleunigung bei einer monotonen oder alternierenden Iterationsfolge. - Numer. Math. 4, 196—208 (1962).

[2] BALUEV, A. N.: Zur Methode von Chaplygin (russ.). - Dokl. Akad. Nauk SSSR 83, 781—784 (1952).

[3] BULIRSCH, R. and J. STOER: Asymptotic upper and lower bounds for results of extrapolation methods. - Numer. Math. 8, 93—104 (1966).

[4] COLLATZ, L.: Funktionalanalysis und numerische Mathematik. Berlin-Göttingen-Heidelberg. - Springer-Verlag 1964.

[5] HOFMANN, W.: Regula-falsi-Verfahren in Banachräumen. - Diss. Univ. Hamburg 1970 und Computing 7, 106—112 (1971).

[6] KANTOROWITSCH, L. W.: The method of successive approximations for functional equations. - Acta Math. 71, 63—97 (1939).

[7] MÖNCH, W.: Monotone Einschliessung von Nullstellen. Zwischenbericht im Forschungsstudium, TU Dresden 1971 (nicht veröffentlicht).

[8] NICOLOVIUS, R.: Extrapolation bei monoton zerlegbaren Operatoren. - ISNM 9, Numerische Mathematik Differentialgleichungen Approximationstheorie Oberwolfach 1966, 305—316 (1968).

[9] ORTEGA, J. M. and W. C. RHEINBOLDT: Monotone iterations for nonlinear equations with application to Gauss-Seidel methods. - SIAM J. Numer. Anal. 4, 171—190 (1967).

[10] —»— —»— Iterative solution of nonlinear equations in several variables. - New York-London. - Academic Press 1970.

[11] SCHMIDT, J. W.: Eine Übertragung der Regula falsi auf Gleichungen in Banachräumen. - Z. Angew. Math. Mech. 43, 1—8, 97—110 (1963).

[12] —»— Asymptotische Einschliessung bei konvergenzbeschleunigenden Verfahren. - Numer. Math. 8, 105—113 (1966).

[13] —»— Eingrenzung von Lösungen nichtlinearer Gleichungen durch Verfahren mit höherer Konvergenzgeschwindigkeit. - Computing 8, 208-215 (1971).

[14] —»— und H. LEONHARDT: Eingrenzung von Lösungen mit Hilfe der Regula falsi. - Computing 6, 318—329 (1970).

[15] SCHRÖDER, J.: Anwendung von Fixpunktsätzen bei der numerischen Behandlung nichtlinearer Gleichungen in halbgeordneten Räumen. - Arch. Rat. Mech. Anal. 4, 177—192 (1960).

[16] VANDERGRAFT, J. S.: Newton's method for convex operators in partially ordered spaces. - SIAM J. Numer. Anal. 4, 406—432 (1967).

Printed May 1972