ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

489

LINEARE EXTREMALPROBLEME BEI SCHLICHTEN FUNKTIONEN

VON

ALBERT PFLUGER

HELSINKI 1971
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1971.489

Am 13 November 1970 vorgelegt von P. J. MYRBERG

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1971

Einleitung

Wir bezeichnen mit S die Klasse der auf dem Einheitskreis $E = \{z\,,\, |z| < 1\}$ definierten, *normierten schlichten* Funktionen

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots . \tag{1}$$

Versehen mit der Topologie der lokal gleichmässigen Konvergenz ist S kompakt. Der *n-te* Koeffizient von f

$$a_n(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz \tag{2}$$

ist ein stetiges Funktional auf S. Allgemeiner, ist $K(z)$ eine im Aeussern eines Kreises $|z| = r < 1$ holomorphe Funktion, die in ∞ verschwindet, d.i.

$$K(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_n}{z^{n+1}}\,, \quad \lim\sup |K_n|^{1/n} < 1\,, \tag{3}$$

und C eine Jordankurve, die im Ring $\mathrm{R}(r, 1) = \{z\,,\, r < |z| < 1\}$ den Nullpunkt einmal im positiven Sinn umschliesst, so ist

$$L(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C K(z) f(z) dz = \sum_1^{\infty} K_n a_n \tag{4}$$

auf S stetig.[1] Für ein a in E ist $f^{(n)}(a)$ ein solches Funktional $\left(\text{mit } K(z) = \dfrac{n!}{(z-a)^{n+1}}\right)$ und Linearkombinationen von solchen sind wieder Funktionale der Form (4). Da S kompakt ist, nimmt $Re\, L$ in S ein Maximum an, d.h. *es gibt eine extremale Funktion* $f_0 \in S$ mit der Eigenschaft

$$Re\, L(f) \leq Re\, L(f_0)\,, f \in S\,. \tag{5}$$

Ziel dieser Arbeit ist, notwendige Bedingungen für Extremalität zu finden. Es stellt sich heraus, dass eine ganze Reihe von Bedingungen, die für das Funktional (2) bekannt sind, sich in analoger Weise ganz allgemein auch für die Funktionale (4) als notwendig erweisen. Sehr wesentliche

Anregungen verdanke ich der Abhandlung von P. L. Duren und M. Schiffer [2].

Bei den nachfolgenden Variationsmethoden sind zu einer extremalen Funktion f Scharen f_ε von Funktionen in S zu konstruieren, derart, dass

(6) $$f_\varepsilon = f + \varepsilon f_1 + o(\varepsilon)$$

ist. Dabei soll f_1 in E holomorph sein und $o(\varepsilon)/\varepsilon$ für $\varepsilon \to o$ in E lokal gleichmässig gegen Null konvergieren. Von einer solchen Schar f_ε werden wir fortan als einer »*Variation* f_ε *von* f *in* S» sprechen. Dabei kann der Parameter ε komplex, oder nur reell oder auch nur positiv sein. Aus (5) und (6) folgt dann $Re\{\varepsilon \cdot L(f_1) + o(\varepsilon)\} \leq 0$ und schliesslich durch Grenzübergang $(\varepsilon \to 0)$:

a) Re $L(f_1) \leq 0$ für ε positiv, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

b) Re $L(f_1) = 0$ für ε reell, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ und

c) $L(f_1) = 0$ für ε komplex, $|\varepsilon| < \varepsilon_0$.

In dem Fall, dass L von reellem Typus ist, d.h. $L(f)$ reell ist für »reelle» f, werden die erhaltenen notwendigen Bedingungen alle auch durch die Koebe-Funktion

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n$$

erfüllt sein, ohne dass die letztere immer auch Extremale sein müsste. In diesem Zusammenhang sei auch auf die Untersuchung von L. Brickman, T. H. MacGregor and D. R. Wilken [5] hingewiesen.

§ 1. Die erste Variation in S.

1.1. Um zu einem beliebigen f in S eine möglichst allgemeine Variation f_ε zu konstruieren, betrachten wir in der üblichen Weise zunächst eine Variation von f im Kreisring $R(r, 1) = \{z \,|r < |z| < 1\}$. Es sei also F_ε eine Schar von univalenten (holomorphen und schlichten) Funktionen im Kreisring $R(r, 1)$ derart, dass

(7) $$F_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon q(z)$$

ist, wobei q in $R(r, 1)$ holomorph ist. Eine Möglichkeit, solche Funktionen $F_\varepsilon(z)$ zu konstruieren, liefert das folgende wohlbekannte

Lemma 1: *Es sei die Menge K in* $\mathbf{C}$ *kompakt, C eine Jordankurve, welche K in ihrem Innern enthält und v eine auf* $\mathbf{C}^* - K$ *holomorphe*

Funktion.[2] *Dann gibt es ein* $\varepsilon_0 > 0$ *so, dass für alle komplexen* ε *mit* $|\varepsilon| < \varepsilon_0$ *die Funktion* $V_\varepsilon(w) = w + \varepsilon v(w)$ *ausserhalb* C *univalent ist.*

Es sei nun f in S, $\Omega = f(E)$, K eine kompakte Teilmenge in Ω, v in $\mathbf{C}^*-K$ holomorph und C die Bildkurve $f(C_r)$ einer Kreislinie $C_r = \{z \mid |z| = r\}$, deren Radius nahegenug bei 1 ist. Dann ist

$$F_\varepsilon = V_\varepsilon \circ f = f + \varepsilon v \circ f \quad (|\varepsilon| < \varepsilon_0) \tag{8}$$

eine der Bedingung (7) genügende Variation von f im Ring $R(r, 1)$.

Die Konstruktion einer Variation von f in S mit Hilfe von F_ε beruht nun auf folgender Idee:

F_ε bildet den Kreisring $R(r, 1)$ auf ein zweifachzusammenhängendes Gebiet ab, dessen Komplement in $\mathbf{C}^*$ aus zwei Komponenten besteht, von denen die eine nicht beschränkt ist. Das Komplement dieser nicht beschränkten Komponente ist ein einfachzusammenhängendes Gebiet Ω_ε in $\mathbf{C}$, das (für genügend kleine ε) den Nullpunkt enthält. Nach dem Riemann'schen Abbildungssatz gibt es eine (nicht eindeutig bestimmte) Funktion $f_\varepsilon^*(z)$, welche den Einheitskreis E konform auf Ω_ε abbildet und den Nullpunkt festhält. Durch Normierung, $f_\varepsilon(z) = f_\varepsilon^*(z) / f_\varepsilon^{*\prime}(o)$, erhalten wir eine Variation von f in S. Dass f_ε tatsächlich eine Variation im Sinne von (7) ist, beruht auf dem folgenden

Lemma 2: *Bei reellem Parameter* ε *und* $f_\varepsilon^*(0) > 0$ *gilt für die Variation* f_ε^*

$$f_\varepsilon^*(z) = f(z) + \varepsilon f_1^*(z) + o(\varepsilon), \tag{9}$$

wobei f_1^* *in* E *holomorph ist und* $o(\varepsilon)/\varepsilon$ *in* E *lokal gleichmässig gegen Null geht.*

Beweis. Dieses Lemma ist ein unmittelbares Korollar eines Satzes, der von M. Schiffer (vgl. z. Bsp. [2]) und G. M. Golusin ([3], s. 96–102) auf verschiedene Art und Weise bewiesen wurde, und wonach f_ε^* reell-analytisch von ε abhängig ist, sobald F_ε (und $f_\varepsilon'(o)$) reell-analytisch von ε abhängt. Aus (9) folgt unmittelbar (6)

1.2. Zur expliziten Berechnung von f_1^* aus F_ε bzw. q benützen wir

Lemma 3. *Für die im Kreisring* $R(r, 1)$ *schlichten Funktionen* $\Phi_\varepsilon = F_\varepsilon^{-1} \circ \mathrm{f}_\varepsilon^*$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ *gilt*

$$\Phi_\varepsilon(z) = z + \varepsilon \Phi_1(z) + o(\varepsilon), \tag{10}$$

wobei Φ_1 *in* $R(r, 1)$ *holomorph ist.*

Beweis. Sei w_0 ein beliebiger Punkt in $f(R(r, 1))$. Für genügend kleine ε liegt w_0 auch in $F_\varepsilon(R(r, 1))$. Folglich gibt es einen Kreis C mit Mittelpunkt w_0, der für alle genügend kleinen ε in $F_\varepsilon(R(r, 1))$

enthalten ist. Es sei C_z die Urbildkurve von C unter der Abbildung F_ε. Für die inverse Funktion $z = F_\varepsilon^{-1}(w)$ gilt dann

$$F^{-1}(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{F_\varepsilon^{-1}(w)}{w - w_0}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_z} \frac{zF_\varepsilon'(z)dz}{F_\varepsilon(z) - w_0} .$$

Mit (7) erhält man

$$F_\varepsilon^{-1}(w_0) = f^{-1}(w_0) + \varepsilon \cdot \Phi_1(w_0) + o(\varepsilon) ,$$

wo Φ_1 innerhalb C holomorph ist. Zusammen mit Lemma 2 folgt dann

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(z) = F_\varepsilon^{-1} \circ f_\varepsilon^*(z) &= f^{-1}(f_\varepsilon^*(z)) + \varepsilon \cdot \Phi_1(f_\varepsilon^*(z)) + o(\varepsilon) \\ &= z + \varepsilon[f_1^*(z) / f'(z) + \Phi_1(f(z))] + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

und daraus die Behauptung von Lemma 3.

Die Funktion Φ_ε bildet den Kreisring $R(r, 1)$ konform so auf ein Ringgebiet ab, dass dabei die Kreislinie $|z| = 1$ sich selbst entspricht. Es kann also Φ_ε durch Spiegelung an dieser Kreislinie analytisch fortgesetzt werden und es gilt

$$\overline{\Phi_\varepsilon(z)} \cdot \Phi_\varepsilon\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) = 1 \text{ für } r < |z| < \frac{1}{r} .$$ Wegen (10) folgt daraus

$$1 + \varepsilon \cdot \left(\bar{z} \cdot \Phi_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \frac{1}{\bar{z}} \cdot \overline{\Phi_1(z)}\right) + o(\varepsilon) \equiv 1$$

und somit

$$\bar{z} \cdot \Phi_1\left(\frac{1}{\bar{z}}\right) + \frac{1}{\bar{z}} \cdot \overline{\Phi_1(z)} = o .$$

Mit $q_1(z) = \dfrac{\Phi_1(z)}{z}$ ergibt dies $q_1\left(\dfrac{1}{\bar{z}}\right) = -\overline{q_1(z)}$,

d.h. q_1 *ist auf der Kreislinie* $|z| = 1$ *rein imaginär.*

1.3. Nach diesen Vorbemerkungen ergibt sich nun leicht ein Zusammenhang zwischen $f_1^*(z)$ und $q(z)$. Nach Definition ist $f_\varepsilon^* = F_\varepsilon \circ \Phi_\varepsilon$, wegen (7) und (10) ist

$$f_\varepsilon^* = f \circ \Phi_\varepsilon + \varepsilon q \circ \Phi_\varepsilon + o(\varepsilon) \text{ und}$$
$$f \circ \Phi_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon \cdot z \cdot q_1(z) \cdot f'(z) + o(\varepsilon) ,$$

somit

$$f_\varepsilon^*(z) = f(z) + \varepsilon(q(z) + zf'(z)q_1(z)) + o(\varepsilon) ,$$

und ein Vergleich mit (9) ergibt schliesslich

$$f_1^*(z) = q(z) + zf'(z)q_1(z)\ , r < |z| < 1\ . \tag{11}$$

Wir legen fest:

1. Die Funktion $\bar{g}$ ist definiert durch $\bar{g}(z) = \overline{g(\bar{z})}$.
2. Ist g irgend eine im Ring $R(r\ , 1)$ holomorphe Funktion, so bezeichnet $s\{g(z)\}$ den singulären Teil ihrer Laurententwicklung in diesem Ring.

Es bezeichne nun S den singulären Teil von $\dfrac{q(z)}{zf'(z)}$, es sei also

$$S(z) = s\left\{\frac{q(z)}{zf'(z)}\right\}. \tag{12}$$

Da wegen Lemma 2 $f_1^*(z)$ und somit auch $f_1^*(z)/zf'(z)$ in E holomorph ist, so muss

$$s\{q_1\} = -S \tag{13}$$

sein. Für die Laurententwicklung $q_1(z) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ im Ring $R(r, 1)$ muss überdies $a_{-n} = -\bar{a}_n$ sein, da q_1 auf der Kreislinie $|z| = 1$ imaginär ist. Dies ergibt zusammen mit (13)

$$q_1(z) = \bar{S}\left(\frac{1}{z}\right) - S(z) + a_0\ .$$

Die imaginäre Konstante a_0 ist beliebig. Denn durch Superposition von f_ε^* mit der Variation $f_\varepsilon(z) = f(e^{i\alpha\varepsilon}z) = f(z) + \varepsilon i\alpha zf'(z) + o(\varepsilon)\ , \alpha \in \mathbf{R}$, geht q_1 in $q_1 + i\alpha$ über. Man darf also annehmen, dass $a_0 = 0$ sei. Dies erreicht man in der Tat durch eine geeignete Normierung von $\dfrac{d}{dz} f_\varepsilon^*(0)$, die früher noch offen gelassen wurde. Setzt man nämlich $f_1^*(z) = a_1^* z + \ldots$ und bezeichnet c_0 das konstante Glied der Laurententwicklung

$$\frac{q(z)}{zf'(z)} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n \tag{14}$$

im Ring $R(r, 1)$, so folgt aus $\dfrac{f_1^*(z)}{zf'(z)} = \dfrac{q(z)}{zf'(z)} + q_1(z)$ die Gleichchung $a_1^* = c_0 + a_0$ und durch die Bedingung $a_1^* = c_0$ erreicht man dann, dass a_0 verschwindet. Es soll also jetzt f_ε^* im Nullpunkt auf diese Weise normiert

d.i. $$f_\varepsilon^*(z) = (1 + \varepsilon c_0)z + \ldots$$

sein. Dann ist $q_1(z) = \bar{S}\left(\dfrac{1}{z}\right) - S(z)$ und

$$f_1^*(z) = q(z) + zf'(z)\left(\bar{S}\left(\frac{1}{z}\right) - S(z)\right). \tag{15}$$

f_ε^* ist im allgemeinen nicht in S . Durch Division mit $(1 + \varepsilon c_0)$ gelangt aber sofort zu einer Variation f_ε in S . Dies gibt

$$f_1(z) = q(z) + zf'(z)\left(\bar{S}\left(\frac{1}{z}\right) - S(z)\right) - c_0 f(z) .$$

Dieses f_1 heisst die (zu q gehörige) *erste Variation* von f in S . Zusammenfassend haben wir folgenden (vgl. M. G. Golusin [3])

Satz 1. *Für die Variation* f_ε $(\varepsilon \in \mathbf{R})$ *von* f *in* S *, die in der beschriebenen Weise erzeugt wird durch eine Variation* F_ε *von* f *im Ring* $R(r, 1)$ *gemäss* (7), *gilt*

$$\begin{gathered} f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon f_1(z) + o(\varepsilon) \quad \text{mit} \\ f_1(z) = q(z) + zf'(z)\left(\bar{S}\left(\frac{1}{z}\right) - S(z)\right) - c_0 f(z) . \end{gathered} \tag{16}$$

Dabei bezeichnet S *den singulären Teil der Laurententwicklung von* $\dfrac{q(z)}{zf'(z)}$ *im Ring* $R(r, 1)$, c_0 *bezeichnet den konstanten Term in dieser Entwicklung und es ist* $\bar{S}(z) = \overline{S(\frac{1}{\bar z})}$.

Bemerkung 1. Ist ε komplex, so setzen wir $\varepsilon = |\varepsilon|\, e^{i\Phi}$ und betrachten an Stelle von q die Funktion $e^{i\Phi}q$. Damit ist f_ε von der Form

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon(q(z) - zf'(z)S(z) - c_0 f(z)) + \bar{\varepsilon} zf(z)\bar{S}\left(\frac{1}{z}\right) + o(\varepsilon) .$$

Bemerkung 2. Wenn F_ε in ganz E holomorph und $F_\varepsilon(o) = o$ ist, so folgt aus (16) $f_1(z) = q(z) - c_0 f(z)$, was man leicht direkt verifizieren kann. Ist F_ε in S , so verschwindet überdies c_0 und es ist $f_1 = q$.

1.4. Einige Biespiele von Variationen

1. *Variation vom Typus I*: $f_\varepsilon(z) = e^{-i\varepsilon} f(e^{i\varepsilon} z)$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Hier ist

$$f_1(z) = i(zf(z) - f(z)) = q(z) .$$

2. *Variation vom Typus II*: $f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon$, $\varepsilon \in \mathbf{C}$. Hier ist

$$q(z) \equiv 1 \, , \, S(z) = \frac{1}{z} \, , \, c_0 = 2a_2 \quad \text{und somit}$$

$$f_\varepsilon(z) = f(z) - \varepsilon(f'(z) - 1 - 2a_2 f(z)) - \bar{\varepsilon} z^2 f'(z) + o(\varepsilon) . \tag{17}$$

Diese Variation ist identisch mit $f_\varepsilon(z) = \dfrac{f\left(\dfrac{z+\varepsilon}{1+\bar{\varepsilon}z}\right) - f(\varepsilon)}{f'(\varepsilon)\,(1-\varepsilon\bar{\varepsilon})}$.

$f_\varepsilon(z) = F(z\,,\varepsilon\,,\bar{\varepsilon})$ lässt sich nach Potenzen von ε und $\bar{\varepsilon}$ entwickeln,

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + A(z)\varepsilon + B(z)\bar{\varepsilon} + \text{ höh. Glieder in } \varepsilon \text{ und } \bar{\varepsilon}\,.$$

Aus $A(z) = \dfrac{\partial F}{\partial \varepsilon}(z\,,o\,,o)$ und $B(z) = \dfrac{\partial F}{\partial \bar{\varepsilon}}(z\,,o\,,o)$ ergibt sich wiederum (17), wobei sich dieses ε von jenem $-\varepsilon$ nur um $o(\varepsilon)$ unterscheidet.

3. *Variation vom Typus III*: Da die Koebefunktion $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ den Einheitskreis E auf die von $-\frac{1}{4}$ längs der negativen reellen Achse aufgeschnittene Ebene abbildet, vermittelt

$$\varphi_\varepsilon(z) = k^{-1}((1-\varepsilon)k(z))\ (o < \varepsilon < 1) \tag{18}$$

eine konforme Abbildung von E auf einen von -1 her eingeschnittenen Einheitskreis. Für jedes komplexe $\varkappa$ mit $|\varkappa| = 1$ wird demnach durch $z \mapsto -\bar{\varkappa}\varphi_\varepsilon(-\varkappa z)$ der Einheitskreis auf den von $\bar{\varkappa}$ her eingeschnittenen Einheitskreis abgebildet, und zwar mit positiver Ableitung im Nullpunkt. Für $f \in S$ und $|\varkappa| = 1$ ist

$$f_\varepsilon(z) = \frac{1}{1-\varepsilon} f(-\bar{\varkappa}\varphi_\varepsilon(-\varkappa z)) \quad (o < \varepsilon < 1)$$

eine Variation von f in S. Aus (18) folgt

$$\bar{\varkappa}\varphi_\varepsilon(-\varkappa z) = z - \varepsilon z\,\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z} + o(\varepsilon)$$

und daher

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon f_1(z) + o(\varepsilon) \text{ mit}$$

$$f_1(z) = f(z) - zf'(z)\,\frac{1+\varkappa z}{1-\varkappa z}\,. \tag{19}$$

4. *Variation vom Typus IV*: Für ω in $\Omega = f(E)$ wird in Lemma 1 $v(w) = \dfrac{1}{w-\omega}$ gesetzt, d.h. es ist $q(z) = \dfrac{1}{f(z)-\omega}$ und $\varepsilon \in \mathbf{C}$.

5. *Variation vom Typus V*: In dem Fall, dass $\Omega = f(E)$ einen äussern Punkt a besitzt, ist die Abbildung $w \mapsto V_\varepsilon(w) = w + \varepsilon\,\dfrac{w^2}{a-w}$ $(\varepsilon \in \mathbf{C})$ von Ω in $\mathbf{C}$ in 0 normiert und für genügend kleines ε schlicht. Deshalb ist

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon \frac{f^2(z)}{a - f(z)}, \ |\varepsilon| < \varepsilon_0$$

eine Variation von f in S.

§ 2. Die erste Variation des Funktionals Re L.

2.1. Wir bestimmen zunächst die erste Variation des Funktionals $Re\, a_n$, die einer Variation f_ε von f in S entspricht. Wegen seiner Linearität ist

$$a_n(f_\varepsilon) = a_n + \varepsilon \cdot \delta a_n + o(\varepsilon) \quad \text{und}$$

$$\delta a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f_1(z)}{z^{n+1}} dz .$$

Auf Grund der Laurententwicklung (14) und Satz 1 ist

$$f_1(z) = \sum_{n=2}^{\infty} [(n-1)a_n c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} k a_k (c_{n-k} + \bar{c}_{k-n})] z^n ,$$

$$\delta a_n = (n-1)a_n c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} k a_k (c_{n-k} + \bar{c}_{k-n})$$

und schliesslich

$$Re\, \delta a_n = Re \{(n-1)a_n c_0 + \sum_{k=1}^{n-1} (c_{n-k} k a_k + c_{k-n} k \bar{a}_k)\} .$$

Nun ist

$$c_{n-k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{q(z)}{z \cdot f'(z)} \cdot \frac{dz}{z^{n-k+1}} ,$$

und deshalb

$$Re\, \delta a_n = Re \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{q(z)}{z f'(z)} \left\{ (n-1)a_n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{k a_k}{z^{n-k}} + k \bar{a}_k z^{n-k} \right) \right\} \frac{dz}{z} ,$$

wenn der Weg C in E den Nullpunkt einmal im positiven Sinne umschliesst. Wir setzen

$$R_n(z) = \frac{1}{z^{n-1}} + \frac{2a_2}{z^{n-2}} + \ldots + \frac{(n-1)a_{n-1}}{z} + (n-1)a_n +$$

$$+ (n-1)\bar{a}_{n-1} z + \ldots + 2\bar{a}_2 z^{n-2} + z^{n-1}$$

und erhalten

$$Re\ \delta a_n = Re \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{R_n(z)}{z^2 f'(z)} \cdot q(z)\, dz .$$

Wir können nun R_n so umformen, dass seine Beziehung zum Kern $K(z) = 1/z^{n+1}$ besser sichtbar wird. Hiefür benützen wir *den singulären Teil* $s(z)$ *der in einem Kreisring* $R(r, 1)$ *holomorphen Funktion*

$$f'(z) \cdot \frac{1}{z^{n+1}} = z^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-n} , \text{ d.i.}$$

$$s(z) = s\left\{ z^2 f'(z) \cdot \frac{1}{z^{n+1}} \right\} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k a_k}{z^{n-k}} .$$

Da das Integral

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C (z f'(z) - f(z)) \cdot \frac{1}{z^{n+1}}\, dz$$

den Wert $(n-1)a_n$ hat, folgt dann

$$R_n(z) = s(z) + \overline{s\left(\frac{1}{\bar z}\right)} + I_n . \tag{20}$$

2.2. Zur Bestimmung der ersten Variation des Realteils eines beliebigen Funktionals der Form (4) benützen wir analog zu 2.1. den singulären Teil s der im Ring $R(r, 1)$ holomorphen Funktion $z^2 f'(z) K(z)$:

$$s(z) = s\,\{z^2 f'(z) K(z)\} .$$

Dieser ist in $|z| > 1/r$ holomorph. Setzen wir

(21) $\quad I_K = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\oint_C (z f'(z) - f(z))\, K(z) dz$, und $\bar s(z) = \overline{s(\bar z)}$, so wird durch

$$R_K(z) = s(z) + \bar s\left(\frac{1}{z}\right) + I_K \tag{22}$$

eine im Kreisring $R\left(r , \frac{1}{r}\right) = \left\{ z \mid r < |z| < \frac{1}{r} \right\}$ holomorphe Funktion R_K definiert, welche (20) verallgemeinert. Sie besitzt folgende *Eigenschaften*:

a) Die Differenz $R_K^0 = R_K - I_K$ genügt der Gleichung

$$\overline{R_K^0(z)} = R_K^0\left(\frac{1}{\bar z}\right) . \tag{23}$$

b) Für $|z| < 1$ gilt

$$\frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)} = K(z) - L(f) \cdot z^{-2} + r \cdot z^{-1} + \text{ reguläre Terme.} \tag{24}$$

a) folgt unmittelbar aus der Definitionsgleichung (22). Um b) zu beweisen, schreiben wir

$$R_K(z) = s(z) + I_K + 0(z)$$

$$= z^2 f'(z) K(z) - \frac{1}{2\pi i} \oint_C z f'(z)\, K(z) dz + I_K + 0(z)\ ; \quad \text{es ist also}$$

$$R_K(z) = z^2 f'(z)\, K(z) - L(f) + 0(z) \quad \text{für} \quad |z| < 1\,. \tag{25}$$

Aus (24) folgt: Für beliebige Funktionen $g \in S$ ist

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, g(z) dz = L(g) - L(f)\,, \tag{26}$$

und insbesondere $(g = f)$

$$\oint \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, f(z) dz = 0\,. \tag{27}$$

Es sei nun $f_\varepsilon = f + \varepsilon f_1 + o(\varepsilon)$ eine Variation von f in S. Dann ergeben (26) und (27) mit $g = f_\varepsilon$

$$L(f_\varepsilon) - L(f) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, f_1(z) dz + o(\varepsilon)\,.$$

Anderseits ist

$$L(f_\varepsilon) - L(f) = \frac{\varepsilon}{2\pi i} \oint_C K(z) f_1(z) dz + o(\varepsilon)\,.$$

Die beiden Gleichungen ergeben

Lemma 4: *Die einer Variation $f_\varepsilon = f + \varepsilon f_1 + o(\varepsilon)$ von f in S entprechende erste Variation des Funktionals L ist gegeben durch*

$$\delta L(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C K(z) f_1(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, f_1(z) dz\,. \tag{28}$$

Bemerkung. Wie (15) und (16) zeigen, unterscheiden sich die ersten Variationen f_1 und f_1^* von f_ε bzw. f_ε^* nur um den Term $c_0 f(z)$. Dieser hat wegen (27) auf das zweite Integral in (28) keinen Einfluss und deshalb ist im folgenden der Uebergang von f_ε^* zur normierten Variation f_ε nicht mehr nötig.

Satz 2: *Es sei das Funktional* L *gemäss* (4) *durch einen Kern* K *definiert,* f *irgend eine Funktion in* S *und* R_K *die zu* K *und* f *gehörige Funktion* (22). *Ist* $f_\varepsilon = f + \varepsilon f_1 + o(\varepsilon)$ *die zu* (7) *gehörige Variation von* f *in* S, *so gilt für die erste Variation* $\delta L(f)$ *die Gleichung*

$$Re\, \delta L(f) = Re\, \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, q(z)\, dz \,. \tag{29}$$

Beweis. Nachzuweisen ist die Gleichung

$$Re \oint \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, f_1(z) dz = Re \oint \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, q(z) dz \,. \tag{30}$$

Gemäss (16) ist

$$f_1(z) = q(z) + z f'(z) \left(\bar{s}\left(\frac{1}{z}\right) - s\,(z) \right) - c_0 f(z) \,.$$

Der letzte Summand liefert keinen Beitrag zum Integral auf der linken Seite von (30). Wählt man für C die Kreislinie $|z| = 1$, also $z = e^{i\varphi}$ und $\frac{dz}{z} = i d\varphi$, so bleibt wegen $R_K = R_K^0 + I_K$ nur die Gleichung

$$Re \left\{ \oint_C (R_K^0(z) + I_K) \left(\bar{s}\left(\frac{1}{z}\right) - s(z) \right) d\varphi \right\} = 0$$

zu verifizieren. Nun gibt es in der Laurententwicklung von $\bar{s}\left(\frac{1}{z}\right) - s(z)$ keinen konstanten Term, also verschwindet das Glied mit dem Faktor I_K. Das andere Glied im Integral ist imaginär, denn es ist $R_K^0(e^{i\varphi})$ reell und $\bar{s}(e^{-i\varphi}) - s(e^{i\varphi})$ imaginär, und damit ist die obige Gleichung bewiesen.

Bemerkung. Ist der Parameter ε der Variation $f_\varepsilon = f + \varepsilon \cdot f_1 + o(\varepsilon)$ komplex, so setzen wir $\varepsilon = |\varepsilon|\, e^{i\varphi}$, halten φ fest bei $|\varepsilon| \mapsto 0$ und ersetzen q durch $q e^{i\varphi}$. Damit erhält man an Stelle von (29) für komplexe ε die Formel

$$Re\, \delta L(f) = Re\, \frac{e^{i\varphi}}{2\pi i} \oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, q(z) dz \,. \tag{31}$$

§ 3. Einige notwendige Bedingungen für die Extremale

3.1. Wir wenden die Ergebnisse des vorangehenden § zunächst auf die in Nr. 1.4. definierten Variationen vom Typus I, II und III an. Bei der Variation vom Typus I ist $q(z) = 1$ und $\varepsilon \in \mathbf{C}$. (31) ergibt dann

$$\delta\, Re\, L(f) = Re \frac{e^{i\varphi}}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, dz \,. \tag{32}$$

Bei Variationen vom Typus II ist $f_1(z) = i(zf'(z) - f(z))$ und $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Nach (21) ist dann

$$\delta\, L(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C K(z) f_1(z) dz = i\, I_K \,. \tag{33}$$

Für die Variationen vom Typus III ist $f_1(z) = f(z) - zf'(z) \dfrac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z}$ und $\varepsilon > 0$. Aus (27) und Lemma 4 folgt dann

$$\delta\, L(f) = - \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C R_K(z) \frac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} \frac{dz}{z} \,. \tag{34}$$

Nun ist $\dfrac{1 + \varkappa z}{1 - \varkappa z} = 1 + 2 \sum\limits_{\gamma=1}^{\infty} \varkappa^\gamma z^\gamma$ und in der Laurententwicklung

$$R_K(z) = \sum \frac{b_\gamma}{z^\gamma}\,, \quad r < |z| < \frac{1}{r}$$

ist $b_0 = I_K$ und $\sum\limits_{\gamma=1}^{\infty} \dfrac{b_\gamma}{z^\gamma} = s(z)$. Die Berechnung des Integrals in (34) ergibt dann

$$- \delta\, L(f) = b_0 + 2 \sum_1^\infty b_\gamma \varkappa^\gamma = I_K + 2 s(\bar{\varkappa}) \,.$$

Wegen $Re\, s(\bar{\varkappa}) = Re\, \bar{s}(\varkappa)$ und (22) gibt dies

$$\delta\, Re\, L(f) = - Re\, R_K(\bar{\varkappa}) \,. \tag{35}$$

3.2. Wir nehmen jetzt an, die *Funktion f maximiere in S das Funktional $Re\, L$*:

$$Re\, L(g) \leqq Re\, L(f)\,, \quad g \in S \,.$$

Dann folgt mit der in der Einleitung erwähnten Schlussweise:

1. $\oint\limits_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, dz = 0$ (nach (32), ε ist ein komplexer Parameter).

2. $R_K(e^{i\varphi})$ ist reell. Denn wegen (33) ist $Re\, i I_K = 0$ (ε ist ein reeller Parameter), ferner ist $R_K = I_K + R_K^0$ und $R_K^0(e^{i\varphi})$ ist reell.

3. Es ist $R_K(e^{i\varphi})$ nicht negativ. Dies folgt aus (35), da $|\varkappa| = 1$ und somit $R_K(\bar{\varkappa})$ reell ist (ε ist hier ein positiver Parameter).

Dies gibt

Satz 3. *Wenn f das Funktional $Re\, L$ (vgl. (4)) in S maximiert, so ist die zu K und f gehörige Funktion R_K auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ reell und nicht negativ und es verschwindet das Residuum r von $\frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}$ in der Entwicklung* (24).

3.3. *Die Schiffersche Differentialgleichung.*

Nun untersuchen wir den Effekt von Variationen des Typus IV. Lediglich zur Vereinfachung der Sprechweise wollen wir uns auf solche Kerne K beschränken, deren Singularitäten Pole sind. Diese Beschränkung ist aber für die folgenden Betrachtungen völlig unwesentlich. Diese können für ganz beliebige Kerne K der Form (3) durchgeführt werden, und sind dem bekannten Fall $L = a_n$ ganz analog (vgl. [2]). Mit Hilfe der einem solchen K und einem f aus S zugeordneten Funktion R_K und mit Hilfe der Abbildung $\varphi = f^{-1}$ definieren wir die Funktion

$$Q(w) = \frac{R_K(\varphi(w))\,(\varphi'(w))^2}{\varphi^2(w)} \,. \tag{36}$$

Wegen (24) ist Q in $\Omega = f(E)$ bis auf Pole holomorph. Vermittels der Abbildung φ entsprechen diese Pole denjenigen von R_K in E.

Wir nehmen nun an, dass f das Funktional $Re\, L$ maximiere und wir wählen eine Variation vom Typus IV, d.i. $q(z) = \frac{1}{f(z) - \omega}$ mit $\omega \in \Omega$ und ε als komplexen Parameter. Aus (31) folgt dann

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)} \frac{dz}{f(z) - \omega} = 0\,, \quad \omega \in \Omega\,. \tag{37}$$

Dies hat zur Konsequenz, dass Q ausser den Polen in Ω überall auf $\mathbf{C}^*$ holomorph ist und in ∞ eine mindestens dreifache Nullstelle besitzt. Ist nämlich $\omega \in \Omega$ kein Pol für Q und ist $\varphi(\omega) = Z$, so wählen wir in E eine einfache geschlossene Kurve C_0, welche die Pole von R_K einmal im positiven Sinn umschliesst, aber Z nicht umschliesst. Dann folgt aus (37) und dem Residuensatz, dass

$$(38) \qquad \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\frac{dz}{f(z)-\omega} = \frac{R_K(Z)}{Z^2 f'(Z)^2} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_0} \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\cdot\frac{dz}{f(z)-\omega}$$

$$= Q(\omega) + \frac{1}{2\pi i}\oint_{f(C_0)} \frac{Q(w)}{w-\omega}\, dw = 0\,.$$

ω liegt ausserhalb der Kurve $f(C_0)$ und deshalb stellt das Integral $\frac{1}{2\pi i}\oint_{f(C_0)} \frac{Q(w)}{w-\omega}\, dw$ eine ausserhalb $f(C_0)$ holomorphe Funktion $F(\omega)$ dar. Wegen (38) ist aber $F(\omega) = -Q(\omega)$ für ω in Ω und ausserhalb $f(C_0)$. Es lässt sich also Q in das Aeussere von $f(C_0)$, inklusive ∞, holomorph fortsetzen, und es ist $Q(\infty) = 0$. Wegen (27) und Satz 3 gilt

$$\oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, dz = \oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\, f(z)\, dz = 0\,.$$

Mittels der Abbildung $\varphi = f^{-1}$ in die w-Ebene verpflanzt, lauten diese Gleichungen wegen (36)

$$\oint_{f(C)} Q(w) dw = \oint_{f(C)} Q(w) w dw = 0\,.$$

Also hat Q in ∞ eine Entwicklung der Form

$$(39) \qquad Q(w) = \frac{A_2}{w^3} + \frac{A_3}{w^4} + \dots\,.$$

Satz 4. *Wenn die Funktion f das Funktional $Re\, L$ (vgl. (4)) in S maximiert, so genügt f einer Differentialgleichung*

$$(40) \qquad R_K(z)\left(\frac{dz}{z}\right)^2 = Q(w) dw^2\,,\ \ w = f(z)\,.$$

R_K und Q sind rationale Funktionen. R_K bestimmt sich aus K und f durch (22). *Bis auf die Pole, welche gemäss* (36) *denjenigen von R_K im Einheitskreis entsprechen, ist Q überall auf* **C*** *holomorph und hat in ∞ eine mindestens dreifache Nullstelle.*

3.4. Wir wollen nun die Bedeutung der Differentialgleichung (40) etwas untersuchen. Dazu wählen wir ein rationales K gemäss (3) und ein f in S. Durch (36) ist ein Q definiert, das bis auf gewisse Pole in Ω holomorph ist. Die Hauptteile dieser Pole sind durch K und f eindeutig bestimmt. Es sei Q_1 die Summe dieser Hauptteile. Dann hat Q_1 in ∞ eine Entwicklung

$$Q_1(w) = \frac{A_0}{w} + \frac{A_1}{w^2} + \ldots \quad \text{und}$$

$Q_1 - Q$ ist in Ω holomorph. Gemäss der Konstruktion von R_K und Q ist immer $A_1 = 0$ (vgl. (27). $Q_0 = Q_1 - Q$ ist im Allgemeinen nicht die Konstante null. Wenn aber f das Funktional $Re\, L$ maximiert, so gilt nach der vorangehenden Betrachtung

$$A_0 = 0 \quad \text{und} \quad Q_0(w) \equiv 0\,. \tag{41}$$

Nicht so sehr, dass f das Funktional $Re\, L$ maximiert ist für diese Gleichungen verantwortlich. Diese folgen schon daraus, dass bei jeder Variation vom Typus IV eines f aus S die erste Variation $\delta\, L(f)$ verschwindet. Umgekehrt, hat bei gegebenem K ein f aus S die Eigenschaft, dass die zugehörigen Grössen A_0 und Q_0 verschwinden, so wird $\delta\, L(f)$ für jede Variation vom Typus IV verschwinden. Die Gleichungen (41) sind aber gleichbedeutend mit

$$\oint_{f(C)} Q(w) w^{-k} dw = o \quad \text{für} \quad k = 0\,, 1\,, \ldots \quad \text{oder mit}$$

$$\oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)} f^{-k}(z) dz = 0\,, k = 0\,, 1\,, \ldots \tag{42}$$

und daher sind folgende drei Aussagen äquivalent:

1. *f genügt der Differentialgleichung* (40) *in Satz* 4.
2. *$\delta\, L(f)$ verschwindet für jede Variation vom Typus IV.*
3. *Es gilt* (42).

Zur Auswertung der Integrale in (42) ist es zweckmässig, die Faberpolynome von f heranzuziehen. $\frac{1}{f}$ habe in 0 die Entwicklung

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{z} + \alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_\gamma z^\gamma + \ldots$$

Das Faberpolynom F_k ist das eindeutig bestimmte Polynom k-ten Grades in $\frac{1}{f}$ derart, dass

$$F_k\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{z^k} + (z)$$

wird, $k = 1, 2, \ldots$. Setzt man

(43) $$F_k\left(\frac{1}{f(z)}\right) = \frac{1}{z^k} + \sum_{\gamma=1}^{\infty} \alpha_{k\gamma} z^{\gamma},$$

so heisst $(\alpha_{k\gamma})_{\gamma=1,2,\ldots}^{k=1,2,\ldots}$ die zu f gehörige Fabermatrix.

Setzt man noch $F_0 = 1$, so wird (42) äquivalent mit

(44) $$\oint \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)} F_k\left(\frac{1}{f(z)}\right) dz = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Für $k = 0$ bedeutet dies, dass in (24) $r = 0$ ist. Zur Berechnung von r setzen wir

$$z^2 f'(z) K(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} M_n z^n ,$$

also $s(z) = \sum_1^{\infty} \frac{M_{-n}}{z^n}$ und $\bar{s}\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_1^{\infty} \bar{M}_{-n} z^n$. Mit (22) ergibt dies

$$R_K(z) = z^2 f'(z) K(z) + (I_K - M_0) + (\bar{M}_{-1} - M_1) z + \ldots$$

Wegen $I_K - M_0 = L(f)$ und $\frac{1}{z^2 f'(z)} = \frac{1}{z^2} - \frac{2a_2}{z} + (4a_2^2 - 3a_3) + \ldots$ folgt dann

$$\frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)} = K(z) - L(f)\frac{1}{z^2} + (\bar{M}_{-1} - M_1 + 2a_2 L(f))\frac{1}{z} + \ldots$$

Für $k = 0$ gibt (44) also die Gleichung

(45) $$\bar{M}_{-1} - M_1 + 2a_2 L(f) = 0 .$$

Falls $K(z) = \frac{1}{z^{n+1}}$, also $L(f) = a_n$ ist, liefert dies die sogenannte Marty-Relation.

Für die andern Fälle $k = 1, 2, \ldots$ beachten wir, dass in (24) $r = 0$ ist und somit eine Entwicklung der Form

$$\frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)} = K(z) - L(f)\frac{1}{z^2} + C_0 + C_1 z + \ldots$$

gilt. (43) ergibt dann die Gleichungen

$$(46) \qquad C_{k-1} - L(f)\alpha_{k1} + \sum_{\gamma=1}^{\infty} K_\gamma \alpha_{k\gamma} = 0 \, , \, k = 1 \, , 2 \, , \ldots \, ,$$

die sich für $L(f) = a_n$ auf

$$C_{k-1} - a_n \alpha_{k1} + \alpha_{kn} = 0 \, , \, k = 1 \, , 2 \, , \ldots$$

reduzieren.

Diese Schritte lassen sich umkehren. Es gilt also: Die Gleichungen (45) und (46) sind mit jeder der drei obgenannten Aussagen äquivalent.

3.5. *Der Fall der Koebefunktion.* Es ist nun sehr bemerkenswert, dass bei sehr vielen Kernen K die Gleichungen (45) und (46) für die Koebefunktion $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ erfüllt sind. Ist nämlich K reell, d.h. sind in (3) alle Koeffizienten K_n reell, so gilt für die zu K und der Koebefunktion f zugeordnete Funktion R_K:

$$(47) \quad \oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)} f(z) dz = 0 \quad \text{und} \quad \oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)} \frac{dz}{f(z) - \omega} = 0 \, , \quad \omega \in \Omega = f(E) \, ,$$

d.h. aber, f genügt der Differentialgleichung (40) in Satz 4 und damit den Gleichungen (45) und (46).

Um (47) zu beweisen bemerken wir zunächst, dass mit K und f auch R_K von reellen Typus ist und daher der Gleichung $R_K\left(\dfrac{1}{z}\right) = R_K(z)$ genügt. Ferner ist $f\left(\dfrac{1}{z}\right) = f(z)$ und somit auch $f'(z) = -f'\left(\dfrac{1}{z}\right) \cdot \dfrac{1}{z^2}$. Dies ergibt, dass die Differentiale

$$\Theta(z) = \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)} \frac{dz}{f(z) - \omega} \quad \text{und} \quad \Theta(z) = \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)} f(z) dz$$

bei der Abbildung $z \mapsto \left(\dfrac{1}{z}\right)$ invariant bleiben, also $\Theta\left(\dfrac{1}{z}\right) = \Theta(z)$ ist. Es sei $f(Z) = \omega$ und C ein Kreis $|z| = r \; (< 1)$, der Z und die Singularitäten von K im positiven Sinn umschliesst und C' der negativ orientierte Kreis $|z| = \dfrac{1}{r}$. Durchläuft z den Kreis C, so $\dfrac{1}{z}$ den Kreis C'. Daher gilt für die obgenannten Differentiale

$$\int_C \Theta = \int_{C'} \Theta \, .$$

Nun sind aber die Θ, wie wir anschliessend zeigen werden, zwischen C und C' holomorph. Es folgt dann

$$\int_C \Theta + \int_{C'} \Theta = 0 .$$

Zusammen ergibt dies aber $\int_C \Theta = 0$, d.i. (47).

Um zu sehen, dass die Θ zwischen C und C' holomorph sind, zeigen wir zunächst, dass R_K in $z = -1$ eine Nullstelle hat. Wir berechnen dieses R_K für den Fall dass $K(z) = \frac{1}{z^{n+1}} \left(\text{und } f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\right)$ ist. Gemäss (25) ist $R_K(z) = R_n(z) = zf'(z)z^{-n} - n + 0(z)$. Wegen $R_n(z) = R_n\left(\frac{1}{z}\right)$ muss dann $R_n(z) = zf'(z)z^{-n} - n + \frac{1}{z} f'\left(\frac{1}{z}\right) \cdot z^n$ sein. Nun ist $zf'(z) = -\frac{1}{z} f'\left(\frac{1}{z}\right)$ und somit (vgl. auch [2])

$$R_n(z) = zf'(z)\,(z^{-n} - n - z^n) = \frac{z(1+z)}{(1-z)^3}\,(z^{-n} - z^n - n)$$

$$R_n(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2 \left(\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} - n\right). \tag{48}$$

Es hat also R_n bei -1 eine zweifache Nullstelle. Mit $K(z) = \sum_2^\infty \frac{K_n}{z^{n+1}}$ ist aber $R_K(z) = \sum_2^\infty K_n R_n(z)$. Wir untersuchen die Konvergenz dieser Reihe in der Umgebung von -1, d.i. für $|z+1| \leqq \eta$. Aus $\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1}$ mit $a = z$, $b = \frac{1}{z}$, also $|a| \leqq 1 + \eta$ und $|b| \leqq \frac{1}{1-\eta} < 1 + 2\eta$ folgt $\left|\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}}\right| < n(1 + 2\eta)^n$. Nun ist $\sum_2^\infty \frac{K_n}{z^{n+1}}$ für $|z| > 1 - \delta$, $\delta > o$ absolut konvergent, also $\sum |K_n|\,(1+\delta)^n < \infty$. Mit $0 < 2\eta < \delta$ ist dann $\sum_2^\infty K_n \left(\frac{z^n - z^{-n}}{z - z^{-1}} - n\right)$ gleichmässig konvergent für $|z+1| < \eta$, also die Summe holomorph. Wegen (48) ist

$$R_K(z) = \sum_2^\infty K_n R_n(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 h(z) \text{ und } h \text{ holomorph für } |z+1| < \eta.$$

Es hat also R_K in -1 eine Nullstelle.

Zurückkehrend zu den Differentialen Θ können wir also feststellen: $\dfrac{1}{f(z)-\omega}$ ist holomorph zwischen C und C', da C den Punkt Z umschliesst. f' hat bei -1 eine einfache Nullstelle und daher ist $\dfrac{R_n(z)}{z^2 f'(z)}$ zwischen C und C' holomorph. $\dfrac{f(z)}{f'(z)}$ ist bis auf einen einfachen Pol in -1 zwischen C und C' holomorph. Damit ist gezeigt, dass die Θ zwischen C und C' holomorph sind, womit alles bewiesen ist.

3.6. In den vorangehenden Betrachtungen war K als rational angenommen. Sie lassen sich jedoch ganz allgemein für beliebige K durchführen und die Resultate sind analog, sofern man statt der Pole jetzt von den Singularitäten spricht, die durch jene von K bestimmt sind, nämlich durch (25) für R_K und durch (36) für Q. R_K ist immer noch holomorph in $R\left(r, \dfrac{1}{r}\right)$ und Q ist holomorph ausserhalb einer kompakten Teilmenge von Ω, die vermittels f der Singularitätenmenge von K entspricht. Ebenso bleibt richtig, dass Q in ∞ eine Entwicklung der Form $Q(w) = \dfrac{A_2}{w^3} + \dfrac{A_3}{w^4} + \dots$ besitzt.

§ 4. Eigenschaften des Extremalbegietes

4.1. Die Extremale f für ein Funktional $Re\, L$ genügt gemäss Satz 4 der Differentialgleichung (40). Da R_K in einem Ring $R\left(r, \dfrac{1}{r}\right)$ und Q in einer Umgebung von $\mathbf{C}^* - f(E)$ holomorph ist, ergibt die gleiche Methode wie in [1] (p. 88), dass die Extremale f bis auf endlichviele Punkte $e^{i\alpha}$ über den Einheitskreis $|z| = 1$ analytisch fortsetzbar ist und in der Umgebung der Ausnahmepunkte $e^{i\alpha}$ eine Entwicklung $f(z) = \sum_\gamma c_\gamma\, (z - e^{i\alpha})^{\gamma/m}$ besitzt, worin nur endlichviele Glieder mit negativem γ auftreten und m eine positive ganze Zahl ist. Daraus folgt, dass der Rand $\partial\Omega$ aus endlichvielen analytischen Bogen besteht, nämlich aus den Bildern der Kreisbogen, die zwischen benachbarten Ausnahmepunkten liegen. In den Bildern der Ausnahmepunkte stossen zwei oder mehrere Randbogen zusammen oder sie sind der eine Endpunkt eines einzigen solchen Bogens. Ein Punkt, in dem ein einziger Randbogen endet, wird aber im allgemeinen nicht Bild eines Ausnahmepunktes sein. Für $z = e^{i\varphi}$ ist $R_K(z) \geqq 0$ (nach

Satz 3) und $\left(\frac{dz}{z}\right)^2 = -d\varphi^2$. Daraus folgt nach (40), dass $Q(w)dw^2 \leqq 0$ ist längs des Randes $\partial\Omega$. Innerhalb der analytischen Randbogen ist $Q(w)dw^2 < 0$. Damit haben wir das Resultat:

Der Rand $\partial\Omega$ des Bildgebiets der Extremalen besteht aus endlichvielen analytischen Bogen, längs denen $Q(w)dw^2 < 0$ ist.

4.2. *Das Extremalgebiet $\Omega = f(E)$ ist ein Schlitzgebiet,* d.h. es ist $\partial\Omega = \mathbf{C}^* - \Omega$. Für diese Behauptung geben wir zwei Beweise. Wir führen sie indirekt, indem wir annehmen, Ω besitze äussere Punkte a und dann zeigen, dass K trivial ist. Beim ersten Beweis benützen wir eine Variation vom Typus V (in Nr. 1):

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon \frac{f^2(z)}{a - f(z)}, \quad \varepsilon \text{ komplex und genügend klein.}$$

Wenn f das Funktional $Re\, L$ maximiert, so muss $\delta L(f)$ für diese Variation verschwinden, da ε komplex ist. Wenn also die positiv orientierte Kreislinie $C(|z| = r < 1)$ alle Singularitäten von K umschliesst, so gilt

$$\delta L(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C K(z) \frac{f^2(z)}{f(z) - a} = 0 \tag{49}$$

für jeden äussern Punkt a. Nun ist aber das Integral ausserhalb $f(C)$ eine holomorphe Funktion der Variabeln a und deshalb gilt die Gleichung (49) für alle a ausserhalb $f(C)$. Es sei nun $|a| > \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$. Setzt man

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C K(z) f^n(z) dz, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

so folgt aus der Entwicklung $\dfrac{f^2}{a - f} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{f^{n+1}}{a^n}$ und aus (49), dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_{n+1}\, a^n \equiv 0$ ist. Zusammen mit (3) und (4) ergibt dieses $C_n = 0$ für $n = 0, 2, 3, 4, \ldots$ und $C_1 = L(f)$. Mit $K^*(z) = K(z) - L(f)\dfrac{1}{z^2}$ an Stelle von $K(z)$ folgt dann, dass die zu K^* gehörigen C_n für alle $n = 0$, $1, 2, \ldots$ verschwinden. Es gilt also $\oint_C K^*(z) P(f(z)) dz = 0$ für jedes Polynom $P(w) = \alpha_0 + \alpha_1 w + \ldots + \alpha_k w^k$.

Da nun Ω einfachzusammenhängend und $z^n = (\varphi(w))^n$, $\varphi = f^{-1}$ in Ω holomorph ist, so lässt sich z^n längs $f(C)$ beliebig genau durch Polynome approximieren. Aus

$$|2\pi i K_n^*| = \left|\oint K^*(z) z^n dz\right| = \left|\oint K^*(z)\,(z^n - P(w))dz\right|$$
$$< \varepsilon \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

folgt dann $K^*(z) \equiv 0$ oder $K(z) = \dfrac{K_1}{z^2}$. Dieses K ist trivial, denn das zugehörige Funktional L ist auf S konstant.

Der zweite Beweis beruht darauf, dass alle Singularitäten von Q im Gebiet Ω gelegen sind. Besitzt dieses äussere Punkte, so besteht $\mathbf{C}^* - \bar{\Omega}$ aus endlich vielen einfachzusammenhängenden (weil $\partial\Omega$ zusammenhängend ist) Komponenten, deren Rand je aus Teilstücken von $\partial\Omega$ besteht. Es sei Ω_1 eine solche. Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $Q(w)dw^2$ ist holomorph in $\bar{\Omega}_1$
2. $Q(w)dw^2$ hat in Ω_1 oder auf $\partial\Omega_1$ einen einfachen Pol (d.i. in ∞) und ist sonst holomorph auf $\bar{\Omega}_1$. In beiden Fällen ist $Q(w)dw^2 \leqq 0$ längs $\partial\Omega$. Wir bilden Ω konform auf den Einheitskreis E ab, im Fall 1 beliebig, im Fall 2 so, dass ∞ in 0 *bzw.* $z = 1$ übergeht. Dabei wird $Q(w)dw^2$ in ein quadratisches Differential $g(z)dz^2$ transformiert, das in $\bar{E}$ holomorph ist oder höchstens in 0 einen einfachen Pol hat. In jedem Fall ist $g(z)dz^2 \leqq 0$ längs der Kreislinie $|z| = 1$. Wir setzen $f(z) = z^2 g(z)$. Dann ist f reell, sogar $\geqq 0$ auf $|z| = 1$. Nach dem Spiegelungsprinzip ist f eine ganze Funktion, die in 0 verschwindet, die beschränkt ist und deshalb die Konstante Null ist. Dass aber Q identisch verschwindet bedeutet, dass K trivial ist. Es kann also Ω keine äussern Punkte haben.

4.3. Wir nehmen wiederum an, dass f das Funktional $Re\,L$ in S maximiert. f genügt also der Differentialgleichung (40) in Satz 4. L ist auch für jede Funktion g definiert, die in einer Umgebung U des Ursprungs holomorph ist, sofern die Singularitäten von K in U enthalten sind und die Jordankurve C in U die Singularitäten von K im positiven Sinn umschliesst. Mit $g(z) = z + b_2 z^2 + \ldots$ folgt dann genau wie in Nr. 2.2 die Gleichung (26). Es sei nun $g = \dfrac{\omega f}{\omega - f} = \tilde{f}_\omega = \tilde{f}$ und der komplexe Parameter ω im Holomorphiegebiet von Q. Wegen (36) folgt dann aus (26)

$$L(\tilde{f}) - L(f) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{f(C)} Q(w) \frac{\omega w}{\omega - w}\, dw$$

und wegen $Q(w) = 0\left(\dfrac{1}{w^3}\right)$ in ∞ schliesslich

$$L(\tilde{f}_\omega) - L(f) = \omega^2 Q(\omega)\,. \tag{50}$$

Dies ist eine Identität. Für $\omega \in \partial \Omega$ ist nun f in S und da $Re\, L$ von f maximiert wird so gilt $Re\, L(\tilde{f}) \leqq Re\, L(f)$ und daher

$$Re\,\{\omega^2 Q(\omega)\} \leqq 0\,, \quad \omega \in \partial\,\Omega\,. \tag{51}$$

Dies ist eine weitere notwendige Bedingung für den Rand des Bildgebietes Ω.

Enthält Q auf dem Rand $\partial\Omega$ eine Nullstelle ω_0, so ist gemäss (50) auch das zugehörige

$$\tilde{f} = \frac{\omega_0 f}{\omega_0 - f} \tag{52}$$

Extremale für $Re\, L$. Dies hat eine bemerkenswerte Konsequenz:

Wir betrachten die Abbildung

$$w \mapsto \frac{\omega_0\, w}{\omega_0 - w} = \tilde{w} \tag{53}$$

und setzen mit (52)

$$f_1 = \frac{wf}{w - f} \quad \text{und} \quad \tilde{f}_1 = \frac{\tilde{w}f}{\tilde{w} - \tilde{f}}\,,$$

wo die w und $\tilde{w}$ einander gemäss (53) entsprechen.
Es ist

$$\tilde{f}_1 = f_1\,. \tag{54}$$

Für $w \in \partial\,\Omega$ sind die Funktionen $\tilde{f}, f_1$ und $\tilde{f}_1$ alle in S. Da f extremal ist, gilt gemäss (50)

$$L(f_1) = L(f) + Q(w)w^2 \quad \text{für} \quad w \in \partial\,\Omega\,. \tag{55}$$

Wegen $Q(\omega_0) = 0$ ist auch $\tilde{f}$ extremal für $Re\, L$; für das zu L und $\tilde{f}$ gehörige $\tilde{Q}$, und für $\tilde{\Omega} = \tilde{f}(E)$ gilt dann entsprechend

$$L(\tilde{f}_1) = L(\tilde{f}) + \tilde{Q}(\tilde{w})\tilde{w}^2\,, \tag{56}$$

wo jetzt $\tilde{w}$ zum Rand von $\tilde{\Omega}$ gehört. Aus (54), (55) und (56) folgt dann

$$Q(w)w^2 = \tilde{Q}(\tilde{w})\tilde{w}^2\,.$$

Nun ist $Q(w)dw^2 \leqq 0$ längs $\partial\Omega$ und $\tilde{Q}(\tilde{w})\,(d\tilde{w})^2 \leqq 0$ längs $\partial\tilde{\Omega}$. Aus

$$\tilde{Q}(\tilde{w})d\tilde{w}^2 = \left(\frac{w}{\tilde{w}}\right)^2 \left(\frac{d\tilde{w}}{dw}\right)^2 Q(w)dw^2 = (1 - w/\omega_0)^{-2}\, Q(w)dw^2 \leqq 0$$

folgt dann, dass $(1 - w/\omega_0)^2 \geqq 0$ und somit $1 - w/\omega_0$ reell sein muss längs $\partial\Omega$. Dies ist jedoch nur möglich, wenn $\partial\Omega$ auf der Geraden durch 0 und ω_0 liegt. Damit ist das folgende Resultat bewiesen[3]): *Wenn das Gebiet Ω für $Re\, L$ extremal ist und wenn sein Rand $\partial\Omega$ nicht auf einer Geraden durch 0 gelegen ist, so enthält $\partial\Omega$ keine Nullstelle von Q.*

4.4. In [4] hat Max Schiffer bewiesen, dass im Fall des Funktionals $L = a_n$ der Koeffizient A_2 in der Entwicklung (39) für die Extremale f nicht verschwinden kann. Dieses Resultat gilt auch für beliebige Funktionale der Form (4): *Wenn die Funktion f den Realteil eines Funktionals L der Form* (4) *maximiert, so kann der Koeffizient A_2 in der Entwicklung* (39) *der gemäss* (22) *und* (36) *zu f und K gehörigen Funktion Q nicht verschwinden. Das quadratische Differential hat also in ∞ einen einfachen Pol.*

Der Beweis gelingt mit einer in [4] verwendeten Variation. Da f das Funktional $Re\, L$ in S maximiert, so gilt wegen (26) und (27)

$$Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{R_K(z)}{z^2 f'(z)}\,(g(z) - f(z))dz\right\} \leqq 0\,,\quad g \in S\,,$$

wo C einen positiv orientierten Kreis $|z| = r < 1$ bezeichnet, mit r genügend nahe bei 1. In die w-Ebene verpflanzt ergibt dies

$$Re\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint_{f(C)} Q(w)\,(V(w) - w)\,dw\right\} \leqq 0 \tag{57}$$

für jede konforme Abbildung V von $\Omega = f(E)$ in $\mathbf{C}$ mit $V(o) = 0$ und $V'(o) = 1$.

Zur Konstruktion eines geeigneten V benützen wir die uns schon zur Verfügung stehende Kenntnis, dass der Rand $\partial\Omega$ in $\mathbf{C}$ aus endlich vielen fremden analytischen Bogen besteht. Denn wegen des soeben bewiesenen Resultats in Nr. 4.3. kann dieser Rand keine Nullstellen von Q enthalten, wenn er nicht schon auf einer Geraden durch 0 liegt. In beiden Fällen muss daher jede Komponente von $\partial\Omega$ in $\mathbf{C}$ aus einem analytischen Bogen bestehen. Entsprechend einer in [1] (p. 147 ff) beschriebenen Methode wollen wir nun den Rand $\partial\Omega$, den wir im folgenden mit Γ bezeichnen, verkleinern indem wir jeden der endlich vielen fremden analytischen Bogen stetig verkürzen. Den so verkürzten Rand Γ_ϱ denken wir uns von einem Parameter ϱ abhängig, den wir folgendermassen festlegen: Es ist $\dfrac{1}{\varrho}$ $(\geqq 1)$

der Abbildungsradius des Gebiets $\mathbf{C} - \Gamma_\varrho = \Omega_\varrho$. Es hängt also Γ_ϱ stetig von ϱ ab. Durch die Abbildung (ϱ): $w \mapsto \varrho w$ werden Γ_ϱ in Γ_ϱ^* und Ω_ϱ in Ω_ϱ^* transformiert: $(\varrho)(\Omega_\varrho) = \Omega_\varrho^*$. Ω_ϱ^* hat wiederum den Abbildungsradius 1 und deshalb existiert in S ein eindeutig bestimmtes f_ϱ, das E auf Ω_ϱ^* abbildet. Aus dem Konvergenzsatz von Caratheodory folgt, dass f_ϱ stetig von ϱ bzw. der Verkürzung $\Gamma \mapsto \Gamma_\varrho$ abhängig ist, d.h. aus $\varrho' \to \varrho$ folgt $f_{\varrho'} \to f_\varrho$ in S. Für $\varrho \to 0$ entsteht eine Grenzfunktion f_0, die wiederum in S liegt. Durch $\varrho \mapsto f_\varrho$, $1 \geqq \varrho \geqq 0$ wird in S ein Weg definiert, der $f_1 = f$ mit f_0 verbindet. Da jeder Bogen von Γ eine Asymptote besitzt, so folgt aus dem soeben beschriebenen Prozess $\Gamma \mapsto \Gamma_\varrho^*$, dass jede Komponente in Γ_ϱ^* für $\varrho \to 0$ gegen eine Halbgerade konvergiert, deren Verlängerung durch 0 geht. Die »Länge» dieser Halbgeraden (sofern Γ mehrere Komponenten enthält) hängt davon ab, in welcher Weise die Verkürzung $\Gamma \mapsto \Gamma_\varrho$ vorgenommen wurde. Dadurch, dass man gegenüber einem ausgewählten Randbogen alle andern Randbogen (sofern solche vorhanden sind) sehr viel rascher verkürzt, kann man erreichen, dass die letzteren bei dem Prozess $\Gamma \mapsto \Gamma_\varrho^*$, $\varrho \to 0$, in ∞ verschwinden und deshalb Γ_0^* aus einer einzigen Halbgeraden $w = -xe^{i\beta}$, $x \geqq \frac{1}{4}$ besteht. f_0 ist dann die Koebefunktion k_β. Wir setzen $\varphi_\varrho = f_\varrho^{-1}$.

Dann ist

$$\varphi_\varrho(w) = w + C_2 w^2 + \ldots + C_n w^n + \ldots ,$$

wo die C_n noch von ϱ abhängen. Nach dem Konvergenzsatz von Caratheodory strebt φ_ϱ lokal gleichmässig gegen die Umkehrfunktion der Koebefunktion

$$k_\beta(z) = \frac{z}{(1 - \varkappa' z)^2}, \quad \varkappa' = e^{-i\beta}:$$

$$\varphi_\varrho(w) \to \bar{\varkappa}' \frac{\sqrt{1 + 4\varkappa' w} - 1}{\sqrt{1 + 4\varkappa' w} + 1} \quad \text{für } \varrho \to 0 \tag{58}$$

Durch $V = (\varrho)^{-1} \circ k_\alpha \circ \varphi_\varrho \circ (\varrho)$, d.i.

$$V(w) = \frac{\varrho^{-1}\varphi(\varrho w)}{(1 - \varkappa\varphi(\varrho w))^2}, \quad \varkappa = e^{i\alpha}, \ \varphi = \varphi_\varrho \tag{59}$$

wird nun eine konforme Abbildung von Ω in $\mathbf{C}$ definiert, für die $V(o) = 0$ und $V'(o) = 1$. Wir setzen $a = \varkappa/\varkappa' = e^{i(\alpha - \beta)}$ und

$$V(w) = w + B_2 \varrho w^2 + \ldots + B_n \varrho^{n-1} \cdot w^n + \ldots , \tag{60}$$

wo die B_n von ϱ und a abhängig sind. Wegen (58) gilt für $\varrho \to 0$, $\varphi_\varrho = \varphi$:

$$(61) \qquad \frac{\varphi(\omega)}{(1-\varkappa\varphi(\omega))^2} \to \frac{4\omega}{(1+a+(1-a)\sqrt{1+4\varkappa'\omega})^2}$$

lokalgleichmässig in Ω.

Für $a = -1$ wird aus dem Limes in (61)

$$\frac{\omega}{1+4\varkappa'\omega} = \omega + \sum_{n=2}^{\infty} (-4\varkappa')^{n-1} \cdot \omega^n \quad \text{und somit}$$

$$\lim_{\varrho \to 0} B_n(\varrho) = (-4\varkappa')^{n-1} \quad \text{für} \quad a = -1 .$$

Für $a \neq -1$ wird aus der Grenzfunktion in (61)

$$\frac{4\omega}{(a+1)^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{a-1}{a+1}\sqrt{1+4\varkappa'\omega}\right)^2} = \frac{4\omega}{(a+1)^2} \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{a-1}{a+1}\sqrt{1+4\varkappa'\omega}\right)^{k-1}$$

$$= \omega + \frac{a-1}{(a+1)^3} 8\omega \sum_{l=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{l} (4\varkappa'\omega)^l + \frac{(a-1)^2}{(a+1)^5} 48\,\varkappa'\omega^2 + 0((a-1)^3) ,$$

also

$$(62) \qquad \lim_{\varrho\to 0} B_2(\varrho) = 16\varkappa' \frac{a-1}{(a+1)^3} + 48\varkappa' \frac{(a-1)^2}{(a+1)^5} + 0((a-1)^3) \quad \text{und}$$

$$\lim_{\varrho\to 0} B_n(\varrho) = \frac{a-1}{(a+1)^3}\, 8 \binom{(1/2)}{n-1} (4\varkappa')^{n-1} + 0((a-1)^3) , \qquad n > 2 ,$$

für $a \to 1$.

Nun sind alle Vorbereitungen für die Anwendung der Ungleichung (57) auf das V in (59) getroffen. Aus der Entwicklung $Q(w) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{A_n}{w^{n+1}}$ in ∞ und aus (60) ergibt (57)

$$Re \sum_{n=2}^{\infty} A_n B_n\, \varrho^{n-1} \leqq 0 , \ \varrho > 1 .$$

Ist $\qquad A_2 = \ldots = A_m = 0$ für ein $m \geqq 2$, so folgt

$$Re\, A_{m+1} \lim B_{m+1}(\varrho) \leqq 0 \quad \text{für alle } a \text{ vom Betrag } 1 .$$

Für $a = -1$ heisst dies

$$(63) \qquad Re(-1)^m \cdot (4\varkappa')^m A_{m+1} \geqq 0 .$$

Wir setzen $a = e^{i\varepsilon}$, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ und nahe bei null. Dann wird

$$\frac{a-1}{(a+1)^3} = \frac{i\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon^2}{8} + 0(\varepsilon^3) \quad \text{und} \tag{64}$$
$$\frac{(a-1)^2}{(a+1)^5} = -\frac{\varepsilon^2}{32} + 0(\varepsilon^3)\,.$$

Unter Berücksichtigung des Gliedes erster Ordnung in ε folgt aus (62)

$$Re\; i(4\varkappa')^m A_{m+1} = 0\,. \tag{65}$$

Da die Glieder erster Ordnung in ε verschwinden, liefern die Glieder 2-ter Ordnung in ε, berechnet auf Grund von (64),

$$Re(-1)^m(4\varkappa')^m A_{m+1} = 0\,. \tag{66}$$

(63), (65) und (66) ergeben $A_{m+1} = 0$.

Ist $A_2 = 0$, so verschwinden daher alle A_j und Q verschwindet identisch und L ist trivial.

4.5. Das eben bewiesene Resultat, dass $Q(w)dw^2$ in ∞ einen einfachen Pol besitzt, hat die bemerkenswerte Konsequenz, dass von ∞ nur ein einziger (analytischer) Bogen ausgehen kann, längs dem $Q(w)dw^2 \leqq 0$ ist. Der Rand des Extremalgebietes Ω in **C** besteht also aus einem einzigen Kontinuum, das aus endlich vielen analytischen Bogen zusammengesetzt ist. Wie in Nr. 4.3. gezeigt wurde, kann aber Q auf diesem Randbogen keine Nullstellen haben, wenn dieser nicht schon aus einer Halbgeraden besteht. Daher gilt: *Der Rand des Extremalgebietes Ω besteht aus einem einzigen analytischen Bogen.* Dieses für die Funktionale $\lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ wohl bekannte Resultat (vgl. [1]) gilt also ganz allgemein.

Auf diesem analytischen Randbogen $\partial\Omega$ gilt neben $Q(w)dw^2 < 0$ noch die Ungleichung (51). Divieren wir die letztere durch $Q(w)dw^2$, so folgt $Re\left\{\dfrac{w^2}{dw^2}\right\} \geqq 0$ und dies impliziert $Re\left\{\left(\dfrac{dw}{w}\right)^2\right\} \geqq 0$. Schreiben wir $w = Re^{i\Phi}$, so heisst dies $\left(\dfrac{dR}{R}\right)^2 - (d\Phi)^2 \geqq 0$ oder

$$(dR)^2 - R^2(d\Phi)^2 \geqq 0 \quad \text{längs} \quad \partial\Omega\,. \tag{67}$$

Mit der Bogenlänge s als Kurvenparameter gibt dies zusammen mit $ds^2 = dR^2 + R^2 d\Phi^2$ die Ungleichung

$$dR^2 \geqq \tfrac{1}{2}\, ds^2\,.$$

Daher ist $R(s)$ im strikten Sinne wachsend und kein Kreis $|w| = R$ kann den Randbogen in mehr als einem Punkt schneiden. Schreibt man

(67) in der Form $\frac{d\Phi}{dR} \leqq \frac{1}{R}$, so sieht man, dass der Variation des Winkelargumentes Φ genaue Schranken gesetzt sind. Verpflanzt man den Randbogen mit der Abbildung $w \mapsto \log w = Z$ in die logarithmische Ebene, so bedeutet (67), dass der Bogen dort in einem Winkelraum $|\arg(Z - Z_0)| \leqq \frac{\pi}{4}$ verlaufen muss.

Die Extremale f genügt nach Satz 4 der Differentialgleichung (40). Nach den vorangehenden Resultaten kann Q auf dem Randbogen nicht verschwinden, ausser eventuell wenn f eine Koebefunktion k_α ist. Wenn wir von dem letzteren Fall im Moment absehen, so hat dies zur Folge, *dass* R_K *auf dem Einheitskreis genau eine und zwar eine doppelte Nullstelle hat.* Ist nämlich $f(z_0)$ der im Endlichen gelegene Endpunkt des Randbogens, so hat f' in z_0 eine einfache Nullstelle. Aus $R_K(z) = z^2(f'(z))^2Q(f(z))$ folgt dann, dass R_K in z_0 eine doppelte Nullstelle hat. Ist $z \neq z_0$, $|z| = 1$ und $f(z)$ endlich, so muss $f'(z) \neq 0$ sein und wegen $Q(f(z)) \neq 0$ ist dann auch $R_K(z) \neq 0$. Es bleibt noch, den Punkt $\varkappa$ auf $|z| = 1$ zu betrachten, für den $f(\varkappa) = \infty$ ist. Hier ist $f(z) = A(z-\varkappa)^{-2} + 0((z-\varkappa)^{-3})$, $A \neq 0$, also $f'(z) = -2A(z-\varkappa)^{-3} + 0((z-\varkappa)^{-4}$, und wegen $A_2 \neq 0$ ist dann

$$R_K(z) = 4\,\varkappa^2 \frac{A_2}{A} + 0((z-\varkappa)) \quad \text{für} \quad z \to \varkappa\,, \quad \text{also} \quad R_K(\varkappa) \neq 0\,.$$

Zusammenfassend haben wir

Satz 5. *Wenn* f *den Realteil eines Funktionals* L *der Form* (4) *maximiert, so wird das Extremalgebiet* $f(E)$ *von einem einzigen analytischen Bogen berandet, längs dem* $Re\{w^2Q(w)\} \leqq 0$ *und* (*abgesehen eventuell von den Endpunkten*) $Q(w)dw^2 < 0$ *ist.*

Die Funktion R_K *ist auf dem Einheitskreis* $|z| = 1$ *positiv bis auf einen einzigen Punkt, in dem sie eine doppelte Nullstelle besitzt* (*sofern* f *nicht eine Koebefunktion ist*).

4.6. Die konvexe Hülle des n-ten Koeffizientenkörpers V_n (vgl. [1]) hat mit dem Rand von V_n eine Menge K_n gemeinsam, die sogenannte *Stützmenge.* Es sind solche Randpunkte von V_n, die ein lineares Funktional der Form $Re\{\lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n\}$, $(\lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{C}^{n-2}$, maximieren. In [1] (Chapter X) wurde bewiesen, dass K_n zusammenhängend ist und die Koebe-Kurve $\varphi \mapsto (2e^{i\varphi}, 3e^{2i\varphi}, \ldots, ne^{(n-1)i\varphi})$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$, enthält.

Mit der gleichen Methode beweisen wir jetzt ein ganz analoges Resultat für die Realteile der Funktionale (4). Wir nennen ein $f \in S$ eine *Extremale*, wenn es ein Funktional der Form (4) gibt, dessen Realteil von f in S maximiert wird. Es gilt: *Die Menge der Extremalen ist in* S *zusammenhängend* *und enthält die Koebe-Funktionen* $k_\varphi(z) = e^{-i\varphi} k(e^{i\varphi} z)$, $0 \leqq \varphi < 2\pi$, $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$. Natürlich bezieht sich der Zusammenhangsbegriff in S auf die Topologie der in E lokal gleichmässigen Konvergenz. Dass die k_φ extremal sind, ist klar; denn k_φ maximiert $Re\{e^{-i\varphi} a_2\}$.

Wir zeigen nun, dass sich jede Extremale f durch einen Weg in der Menge der Extremalen mit einer Koebefunktion verbinden lässt. Dazu verwenden wir den in Nr. 4.4 beschriebenen Prozess: Wir verkürzen den Randbogen Γ zu einem Randbogen Γ_ϱ derart, dass $\mathbf{C} - \Gamma_\varrho$ den Abbildungsradius $\frac{1}{\varrho}$ hat, und transformieren Γ_ϱ alsdann mit der Abbildung $(\varrho): w \mapsto \varrho w$ in Γ_ϱ^*, sodass $\Omega_\varrho^* = \mathbf{C} - \Gamma_\varrho^*$ wieder den Abbildungsradius 1 hat. Es gibt dann in S eine Funktion f_ϱ, die E auf Ω_ϱ^* abbildet. Es ist $f_1 = f$, f_0 ist eine Koebefunktion k_β und der Weg $\varrho \to f_\varrho$, $1 \geqq \varrho \geqq 0$, verbindet in S die Extremale f mit k_β. Es bleibt zu zeigen, dass die f_ϱ alles Extremale sind.

Verpflanzt man (26) mit Hilfe von f in die w-Ebene, so wird die Extremalität von f ausgedrückt durch die Ungleichung

$$(68) \qquad Re\{L(g) - L(f)\} = Re\left\{\frac{1}{2\pi i} \oint Q(w) V(w) dw\right\} \leqq 0$$

für jede konforme Abbildung V von Ω in $\mathbf{C}$ mit $V(o) = 0$ und $V'(o) = 1$. Wir setzen $Q_\varrho(w) = Q\left(\dfrac{w}{\varrho}\right)$. Dieses Q_ϱ bestimmt zusammen mit f_ϱ eine Funktion $R_\varrho(z) = z^2 Q_\varrho(f_\varrho(z))(f_\varrho'(z))^2$, zunächst in E. Da f_ϱ aber damit der Differentialgleichung $R_\varrho(z)\left(\dfrac{dz}{z}\right)^2 = Q_\varrho(w) dw^2$ genügt, f_ϱ auf der Peripherie $|z| = 1$ stückweise analytisch ist und $Q_\varrho(w) dw^2 \leqq 0$ ist längs Γ_ϱ^*, so ist R_ϱ auf dem Einheitskreis reell und daher $\overline{R_\varrho(z)} = R_\varrho\left(\dfrac{1}{\bar z}\right)$. Die Singularitäten von R_ϱ bestimmen zusammen mit f_ϱ gemäss (24) einen Kern $K_\varrho(z)$; denn K enthält definitionsgemäss kein Glied mit $\dfrac{1}{z}$ und der Koeffizient K_1 in der Entwicklung von $K(z)$ ist ohne Einfluss auf die Extremale. Dieses K_ϱ zusammen mit f_ϱ bestimmt also gemäss (22) das R_ϱ und mit (36) das obige Q_ϱ. Es gilt also nach (26) und (36)

$$(69) \quad L_\varrho(g) - L_\varrho(f_\varrho) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{R_\varrho(z)}{z^2 f_\varrho'(z)} g(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \oint Q_\varrho(w) V_\varrho(w) dw\,.$$

wenn V_ϱ durch $V_\varrho = g \circ f_\varrho^{-1}$ definiert wird.

Wir wählen nun irgend eine konforme Abbildung V_ϱ von Ω_ϱ^* in $\mathbf{C}$ mit $V_\varrho(o) = 0$ und $V'_\varrho(o) = 1$. Dann definiert $V(w) = \varrho^{-1} V_\varrho(\varrho w)$ eine konforme Abbildung von Ω in $\mathbf{C}$ mit $V(o) = 0$ und $V'(o) = 1$. Aus (69) folgt dann

$$L_\varrho(g) - L_\varrho(f_\varrho) = \frac{\varrho^2}{2\pi i} \oint Q\left(\frac{w}{\varrho}\right) \cdot V\left(\frac{w}{\varrho}\right) \frac{dw}{\varrho} = \varrho^2 \frac{1}{2\pi i} \oint Q(\omega)\, V(\omega) d\omega \,.$$

Gemäss (68) ist also

$$Re\,\{L_\varrho(g) - L_\varrho(f_\varrho)\} \leqq 0 \,,\, g \in S \,,$$

d.h. f_ϱ ist eine Extremale für das zu K_ϱ gehörige Funktional $Re\, L_\varrho$, womit bewiesen ist, dass alle f_ϱ extremal sind.

Anmerkungen:

1) Man kann zeigen, dass auch umgekehrt jedes stetige lineare Funktional auf S von der Form (4) sein muss.
2) $\mathbf{C}^*$ bezeichnet die Abschliessung der Zahlenebene $\mathbf{C}$ durch den Punkt ∞.
3) Die Methode war der in [2] für den Fall $L = \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_n a_n$ verwendeten völlig analog.

Eidgenössische Technische Hochschule
Zürich, Schweiz

Referenzen

[1] SCHAEFFER, A. C. und SPENCER, D. S.: Coefficient regions for schlicht functions. Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. 35, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1950.

[2] DUREN, P. L. and SCHIFFER, M.: The theory of the second variation in extremal problems for univalent functions. Journ. d'Analyse Mathématique, Vol. X, 193–252, 1962.

[3] GOLUSIN, G. M.: Eine Variationsmethode in der konformen Abbildung, I (russisch). Mat. sb. 19 (1946), 203–236.

[4] SCHIFFER, M.: On the coefficient problem for schlicht functions. Trans. Amer. Math. Soc. vol. 134 (1968), 95–101.

[5] BRICKMAN, L., MACGREGOR, T. H. and WILKEN, D. R.: Convex hulls of some classical families of univalent functions. To appear. in the Trans. Amer. Math. Soc.

Gedruckt Juni 1971