ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

445

ÜBER FUNKTIONEN MIT DEM TRANSFORMATIONSVERHALTEN DER LOGARITHMISCHEN ABLEITUNGEN AUTOMORPHER FORMEN UND DIE RESULTATFUNKTIONEN DES HECKESCHEN SUMMATIONSVERFAHRENS

VON

HANS PETERSSON

HELSINKI 1969
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1969.445

Am 13 Dezember 1968 vorgelegt von P. J. MYRBERG und K. INKERI

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1969

§ 1 Einleitung. Grundlagen

Im folgenden handelt es sich um genauere Ausführungen zu dem in [6] umrissenen Thema ([n] betrifft das Literaturverzeichnis). § 1 enthält nach einleitenden Bemerkungen Hinweise auf grundlegende Tatsachen, die, soweit sie nicht bereits in der zitierten Literatur auftreten, im Anschluss an [6] entwickelt werden; nur die Definitionen des Doppelstrich-Operators und des Funktionensystems $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\Gamma}$ werden aus [6] kurz wiederholt. In § 2 wird die Bildung von Skalarprodukten der Funktionen von $\mathfrak{L}$ untereinander und mit den automorphen Formen der Differentialklasse nach einem gegenüber [6] etwas geänderten Ansatz in voller Allgemeinheit diskutiert. Auch das methodische Hauptresultat, das in § 3 durch Anwendung der Riemannschen Integrationsmethode gewonnen wird, ist gegenüber dem in [6] zitierten Satz erheblich verallgemeinert. In § 4 wird gezeigt, dass die Funktionen von $\mathfrak{L}$ einer invarianten Spurbildung zugänglich sind, die mehrere einfache Eigenschaften hat. Der als wichtigste Anwendung in [6] am Schluss hervorgehobene Zusammenhang zwischen den Primformen und den Resultatfunktionen des Heckeschen Summationsverfahrens wird hier in § 5 für Eisensteinsche Reihen zu beliebigen Kongruenzgruppen hergestellt. Dabei zeigt sich, dass eine sehr vorteilhafte Definition der verallgemeinerten Eisensteinreihen — auch solchen mit gewissen Multiplikatoren — durch den Spuroperator aus [5] vermittelt wird.

Vom historischen Standpunkt ist zu bemerken, dass Hecke in [1] zwar davon spricht, dass seine Ergebnisse über Eisensteinsche Reihen auch für beliebige Kongruenzgruppen gelten; er hat aber nirgends etwas darüber ausgeführt. Die Entwicklungen des § 5 machen deutlich, dass es zu dieser Verallgemeinerung der Heckeschen Theorie wirklich nur einer »hinreichend invarianten« Definition der Eisensteinreihen in den sog. Kongruenzklassen bedarf. Wesentlich ist, dass die so definierten Funktionen sämtlich in der klassischen Gestalt, d.h. als Eisensteinreihen ohne eine Bedingung der Teilerfremdheit erscheinen. Hinsichtlich des Zusammenhanges zwischen den Primformen und den Resultatfunktionen des Heckeschen Summationsverfahrens darf vermutet werden, dass er auch bei allgemeinen Grenzkreisgruppen von erster Art besteht, sofern sie parabolische Transformationen enthalten. Eine entsprechende Verallgemeinerung des Satzes, den Hecke in [1] als zweiten Fundamentalsatz über die $\wp$-Teilwerte bezeichnet, ist dagegen völlig unwahrscheinlich. — Eine ausführlichere Zusammenfassung der Resultate über Kongruenzklassen findet sich am Ende von § 5.

Wir verwenden die Terminologie von [5] § 1. Für eine Matrix $S \in {}_1\mathsf{B} = \mathrm{SL}(2\,,\boldsymbol{R})$ mit der zweiten Zeile $\underline{S} = \{c\,, d\}$ und eine Funktion $\varphi(\tau)$, die in der oberen τ-Halbebene $\mathfrak{H}$ bis auf eine mögliche Ausnahmemenge isolierter Punkte erklärt ist, setzen wir

$$
\begin{aligned}
\varphi \| S = \varphi(\tau) \| \, S &= \varphi(\tau) \mid S - c(c\tau + d)^{-1} \\
&= \varphi(S\tau)\,(c\tau + d)^{-2} - c(c\tau + d)^{-1}\,.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Für $S_1\,, S_2 \in {}_1\mathsf{B}$ gilt $\varphi \, \| S_1 \| \, S_2 = \varphi \, \| \, S_1 \, S_2$.

Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe von erster Art mit parabolischen Matrizen (vgl. [6] 1.) und der Spitze ∞. Das System $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_\Gamma$ besteht aus den in $\mathfrak{H}$ meromorphen Funktionen $\Phi(\tau)$ mit den folgenden drei Eigenschaften (a*) (b*) (c*):

(a*) Es gibt eine Fundamentalmenge von Γ, die höchstens endlich viele Pole von Φ enthält.

(b*) Für alle $L \in \Gamma$ gilt $\Phi \, \| \, L = \Phi$.

Zur Formulierung von (c*) sei $\zeta = A^{-1}\,\infty$ $(A \in {}_1\mathsf{B})$ eine Spitze von Γ und $P := A^{-1}\,U^N A$ ihre Grundmatrix in Γ, wo, wie üblich, U^N die symbolische Potenz $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ von $U^1 =: U$ bezeichnet $(N > 0)$. Die Funktion $\Phi_A(\tau) := \Phi(\tau) \, \| \, A^{-1}$ erfüllt $\Phi = \Phi_A \, \| \, A$, ist gemäss (vgl. (1.1))

$$
\Phi_A(\tau + N) = \Phi(\tau) \, \| \, A^{-1}\,U^N = \Phi(\tau) \, \| \, PA^{-1} = \Phi_A(\tau)
$$

periodisch in τ mod N und besitzt eine polfreie Halbebene $\operatorname{Im} \tau > \alpha$ $(\alpha \geqq 0)$. Hiermit besagt

(c*) Die Fourier-Reihe von $\Phi_A(\tau)$ bricht in der Richtung der negativen Exponenten von $\exp 2\pi i \dfrac{\tau}{N}$ ab.

Wir schreiben

$$
\Phi_A(\tau) = \sum_{m=-m_0}^{\infty} \beta_m(A\,, \Phi) \exp 2\pi i m \frac{\tau}{N}\,. \tag{1.2}
$$

Wegen $\Phi_{AL} = \Phi_A$ $(L \in \Gamma)$ braucht (c*) nur für je eine Spitze einer Kongruenzklasse mod Γ erfüllt zu werden. Ist ζ auch $= A_1^{-1}\,\infty$ $(A_1 \in {}_1\mathsf{B})$, so gilt

$$
A_1 = \varepsilon \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} U^\xi A \;(\varepsilon^2 = 1\,, \lambda > 0\,, \xi \in \boldsymbol{R})\,, P = A_1^{-1}\,U^{\lambda^2 N} A_1\,,
$$

$$
\Phi_{A_1}(\tau) = \Phi_A(\lambda^{-2}\tau - \xi)\,\lambda^{-2}\,, \beta_m(A_1\,, \Phi) = \lambda^{-2}\,e^{-2\pi i m \xi/N}\,\beta_m(A\,, \Phi)\,;
$$

(c*) braucht also bei gegebener Spitze ζ für nur ein $A \in {}_1\mathsf{B}$ mit $\zeta = A^{-1}\,\infty$ erfüllt zu werden. Das durch

$$\mathrm{Res}_{\Gamma,\zeta}\,\Phi := \frac{N}{2\pi i}\,\beta_0(A\,,\Phi) \tag{1.3}$$

definierte Residuum ist durch Φ, Γ und ζ eindeutig bestimmt und gegen Transformationen $\zeta \to L\zeta$ $(L \in \Gamma)$ invariant.

Die invarianten Entwicklungen der Funktionen $\Phi \in \mathfrak{L}_\Gamma$ nach den Ortsparametern $w = w(\tau\,,z) = \dfrac{\tau - z}{\tau - \bar{z}}$ der Punkte $z \in \mathfrak{H}$ sind in der Gestalt

$$\begin{aligned} \Phi(\tau) &= -(\tau - \bar{z})^{-1} + (\tau - \bar{z})^{-2}\,\Phi_z(w(\tau\,,z)) \\ \Phi_z(w) &= \sum_{m=-m_0}^{\infty} \beta_m(z\,,\Phi)\,w^m \end{aligned} \tag{1.4}$$

anzusetzen. Die Invarianz besagt

$$\beta_m(Lz\,,\Phi) = (\gamma z + \delta)^{-2}\left(\frac{\gamma z + \delta}{\gamma\bar{z} + \delta}\right)^{m+2} \beta_m(z\,,\Phi)\ (L \in \Gamma\,,\ \underline{L} = \{\gamma\,,\delta\})$$

und liefert insbesondere $\beta_{-1}(Lz\,,\Phi) = |\gamma z + \delta|^{-2}\,\beta_{-1}(z\,,\Phi)$, was die zu (1.3) analoge Bildung eines invarianten Residuums gemäss

$$\mathrm{Res}_{\Gamma,z}\,\Phi := \frac{1}{l(z - \bar{z})}\,\beta_{-1}(z\,,\Phi) = \mathrm{Res}_{\Gamma,Lz}\,\Phi\ (L \in \Gamma) \tag{1.5}$$

ermöglicht. Hier bezeichnet l die Fixpunktordnung von z bezüglich Γ; wenn z elliptischer Fixpunkt von Γ ist, so ist l als dessen (inhomogene) Ordnung, sonst als $l = 1$ erklärt. In (1.4) gilt $\beta_m(z\,,\Phi) = 0$, wenn $m \not\equiv -1 \bmod l$.

Eine Verallgemeinerung der genannten Invarianzen ergibt sich für $S \in {}_1\mathsf{B}$ daraus, dass $\Phi \in \mathfrak{L}_\Gamma$ mit $\Phi \,\|\, S \in \mathfrak{L}_{S^{-1}\Gamma S}$ gleichbedeutend ist. In den Bezeichnungen (1.2,4) findet man

$$\begin{aligned} \beta_m(AS\,,\Phi \,\|\, S) &= \beta_m(A\,,\Phi) \\ \beta_m(z\,,\Phi \,\|\, S) &= (c\bar{z} + d)^2\left(\frac{c\bar{z} + d}{cz + d}\right)^m \beta_m(Sz\,,\Phi) \end{aligned} \tag{1.6}$$

und insbesondere

$$\mathrm{Res}_{S^{-1}\Gamma S,\,S^{-1}\tau_0}\,\Phi \,\|\, S = \mathrm{Res}_{\Gamma,\tau_0}\,\Phi \tag{1.7}$$

für $\tau_0 \in \mathfrak{H}'_\Gamma$ (= Vereinigung von $\mathfrak{H}$ mit der Menge der Spitzen von Γ).

Die prinzipielle Konstruktion der Funktionen aus $\mathfrak{L}$ bedarf keiner Darlegung. Ein endliches lineares Kompositum von Funktionen aus $\mathfrak{L}_\Gamma$ liegt in $\mathfrak{L}_\Gamma$, wenn die Koeffizientensumme $= 1$, und in $\{\Gamma\,, -2\,, 1\}$, wenn diese $= 0$ ist. Hieraus, aus dem Verhalten der Funktionen $\Lambda(\tau\,,f)$ (vgl. [6], 2.), insbesondere

(1.8) $$\operatorname{Res}_{\Gamma,\tau_0} \Lambda(\tau, f) = r^{-1} \operatorname{ord}_{\Gamma,\tau_0} f(\tau) \qquad (\tau_0 \in \mathfrak{H}'_\Gamma)\,,$$

und den Rechenregeln für logarithmische Ableitungen folgt in Verbindung mit der Valenzformel [6] (4):

Satz 1. *Bezeichnet $\mathfrak{F}_\Gamma$ eine Fundamentalmenge von Γ in $\mathfrak{H}'_\Gamma$, $\varrho^0 = \varrho^0_\Gamma$ den Gruppenrang von Γ, so gilt für jedes $\Phi \in \mathfrak{L}_\Gamma$:*

(1.9) $$\sum_{z \in \mathfrak{F}_\Gamma} \operatorname{Res}_{\Gamma, z} \Phi = \varrho^0_\Gamma\,.$$

Zu gegebenen verschiedenen Punkten $z_\nu \in \mathfrak{F}_\Gamma$ und komplexen ϱ_ν $(1 \leqq \nu \leqq \nu_0)$ mit $\sum_{\nu=1}^{\nu_0} \varrho_\nu = \varrho^0_\Gamma$ gibt es eine Funktion $\Phi \in \mathfrak{L}^2_\Gamma$, die auf $\mathfrak{F}_\Gamma$ ausserhalb der z_ν lauter verschwindende Residuen, in z_ν aber das Residuum ϱ_ν besitzt.

§ 2 Metrische Verknüpfungen

Diese beruhen wesentlich auf den Eigenschaften des folgenden Operators, der auf die Funktionen $\Phi \in \mathfrak{L}$ angewendet wird: Man setzt

(2.1) $$\Phi^* = \Phi^*(\tau) = \Phi(\tau) + \frac{1}{2iy} \quad (y = \operatorname{Im} \tau)$$

und erhält nach kurzer Rechnung: $\Phi^* \underset{2}{|} S = (\Phi \,||\, S)^*$, so dass Φ^* sich bei Anwendung der Operatoren L von Γ gemäss $\Phi^* \underset{2}{|} L = \Phi^*$ wie eine Form der Differentialklasse verhält.

Für zwei Funktionen $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathfrak{L}$ bzw. $\Phi \in \mathfrak{L}$, $f \in \{\Gamma, -2, 1\}$ bilden wir die Integrale

$$K(\Phi_1, \Phi_2; \mathfrak{B}) := \iint_{\mathfrak{B}} \Phi_1^* \overline{\Phi_2^*}\, dxdy\,, \quad K_1(\Phi, f; \mathfrak{B}) := \iint_{\mathfrak{B}} \Phi \bar{f}\, dxdy\,,$$

wo $\mathfrak{B}$ zunächst einen beschränkten messbaren Bereich bezeichnet, dessen abgeschlossene Hülle in $\mathfrak{H}$ liegt und keinen Pol der beteiligten Funktionen enthält. Dann ergibt sich für $S \in {}_1\mathsf{B}$

(2.2) $$\begin{aligned} K(\Phi_1, \Phi_2; S\mathfrak{B}) &= K(\Phi_1 \,||\, S, \Phi_2 \,||\, S; \mathfrak{B})\,, \\ K_1(\Phi, f; S\mathfrak{B}) &= K_1(\Phi \,||\, S, f \,|\, S; \mathfrak{B})\,. \end{aligned}$$

Diese Formeln zeigen, dass man sinnvolle metrische Verknüpfungen erhält, sofern es sich als möglich erweist, diese Integrale — etwa als Cauchysche Hauptwerte — über einen Fundamentalbereich $\mathfrak{F}_\Gamma$ von Γ zu erstrecken. Das soll im folgenden mit den Methoden und in den Bezeichnungen von [2] untersucht werden.

Um zunächst die Integration über einen Sektor der Spitze ζ von Γ auszuführen, hat man nach (2.2) $\Phi_{1A}^* \overline{\Phi_{2A}^*}$ bzw. $\Phi_A^* \overline{f_A}$ über ein achsenparalleles Rechteck $A\mathfrak{B}[\zeta ; \vartheta_0 , \vartheta]$ bei hinreichend grossem ϑ_0 zu integrieren und die Bedingungen dafür zu ermitteln, dass das Integral für $\vartheta \to \infty$ einem Grenzwert zustrebt. Die Integranden sind

$$\frac{1}{4y^2} - \frac{1}{2iy}(\Phi_{1A} - \overline{\Phi}_{2A}) + \Phi_{1A}\overline{\Phi}_{2A} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2iy}\bar{f}_A + \Phi_A \bar{f}_A$$

Die konkrete Berechnung aufgrund der Entwicklungen (1.2) und der analogen Entwicklung [4] (2.2) ergibt als notwendige und hinreichende Konvergenzbedingung folgendes: O.B.d.A. werde angenommen, dass alle vier Laurentreihen mit dem gleichen Exponenten $-m_0 < 0$ beginnen. Die Bedingung besagt für den ersten Integranden:

$$(2.3) \quad \beta_{-m}(A, \Phi_1)\,\beta_{-m}(A, \Phi_2) = 0 \quad (1 \leqq m \leqq m_0); \beta_0(A, \Phi_1) = \beta_0(A, \Phi_2) = 0;$$

für den zweiten Integranden:

$$(2.4) \quad \beta_{-m}(A, \Phi)\, b_{-m}(A, f) = 0 \quad (1 \leqq m \leqq m_0); \quad b_0(A, f) = 0 .$$

Die analogen Resultate bei der Integration über einen Bereich $\mathfrak{B}[\omega , \varrho']$ haben einen etwas anderen Charakter. Setzt man

$$w = V_\omega \tau = u + iv = \varrho e^{i\vartheta} = w(\tau, \omega) \quad (u, v, \vartheta \in \boldsymbol{R}, \ \varrho \geqq 0) \quad p := \operatorname{Im} \omega ,$$

so wird

$$y = p\frac{1-\varrho^2}{|1-w|^2}, \quad \left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right| = \frac{4p^2}{|1-w|^4}, \quad (\tau - \overline{\omega})^{-2} = -\frac{(1-w)^2}{4p^2},$$

$$-\frac{1}{\tau - \overline{\omega}} + \frac{1}{2iy} = -\frac{(1-w)^2}{2ip}\frac{\overline{w}}{1-\varrho^2},$$

also

$$\Phi_1^* \overline{\Phi_2^*}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \vartheta)}\right| = \frac{\varrho^3}{(1-\varrho^2)^2} + \frac{1}{2ip}\frac{\varrho}{1-\varrho^2}(\overline{w}\,\overline{\Phi}_{2\omega} - w\,\Phi_{1\omega}) + \frac{\varrho}{4p^2}\Phi_{1\omega}\overline{\Phi}_{2\omega} .$$

(2.5)

$$\Phi^* \bar{f}\left|\frac{\partial(x, y)}{\partial(\varrho, \vartheta)}\right| = \frac{1}{2ip}\frac{\varrho}{1-\varrho^2}\overline{w}\bar{f}_\omega + \frac{\varrho}{4p^2}\Phi_\omega \bar{f}_\omega .$$

Man hat in der w-Ebene über einen Kreisringsektor der Winkelöffnung $\frac{2\pi}{l}$ zwischen den Radien ϱ' und ϱ_0 zu integrieren, wo $0 < \varrho' < \varrho_0 < 1$, ϱ_0 fest ist und ϱ' gegen Null strebt. Die Summation in (1.4) kann auf die m

beschränkt werden, für die $m \equiv -1 \bmod l$ gilt. Führt man zunächst die Integration nach $d\vartheta$ aus, so zeigt sich, dass ein Einfluss auf die Existenz eines Grenzwertes für $\varrho' \to +0$ nur von denjenigen Summanden in der Darstellung (2.5) der Integranden ausgeübt wird, die dort auf der rechten Seite an dritter bzw. zweiter Stelle stehen. Damit ergibt sich als Bedingung für die Existenz dieses Grenzwertes, wenn alle vier Laurent-Reihen mit dem Exponenten $-m_0 < 0$ beginnen, beim ersten Integranden:

$$\beta_{-m}(\omega\,,\,\Phi_1)\,\beta_{-m}(\omega\,,\,\Phi_2) = 0 \qquad (1 \leqq m \leqq m_0) \tag{2.6}$$

und beim zweiten Integranden:

$$\beta_{-m}(\omega\,,\,\Phi)\,b_{-m}(\omega\,,f) = 0 \qquad (1 \leqq m \leqq m_0)\,. \tag{2.7}$$

Der Unterschied zwischen diesen Bedingungen und (2.3,4) betrifft in beiden Fällen die Residuen. Er rührt zweifellos daher, dass das additive Zusatzglied $\dfrac{1}{2\,iy}$ in (2.1) in Verbindung mit dem konstanten Glied des anderen Skalarfaktors ein divergentes Teilintegral hervorbringt.

Zur Formulierung der Ergebnisse bezeichne $\mathfrak{F}_\Gamma$ einen endlich-teiligen von endlich vielen hyperbolischen Geradenstücken berandeten Fundamentalbereich von Γ, von dem wir annehmen wollen, dass er von allen Fixpunkten einteilige Umgebungen enthält und dass kein Pol der Skalarfaktoren, er sei denn Fixpunkt, auf seinem Rande liegt.

Satz 2. *Für die Definition der nach (2.2) invarianten Skalarprodukte*

$$[\Phi_1\,,\,\Phi_2] = [\Phi_1\,,\,\Phi_2\,;\,\Gamma] = K(\Phi_1\,,\,\Phi_2\,;\,\mathfrak{F}_\Gamma)\;(\Phi_1\,,\,\Phi_2 \in \mathfrak{L})$$

$$[\Phi\,,f) \;= [\Phi\,,f\,;\,\Gamma) \;= K_1(\Phi\,,f\,;\,\mathfrak{F}_\Gamma)\;(\Phi \in \mathfrak{L}\,,\; f \in \{\Gamma\,,\,-2\,,\,1\})$$

als Cauchysche Hauptwerte ist notwendig und hinreichend, dass in allen Fixpunkten und allen Polen der Skalarfaktoren, soweit sie zu $\mathfrak{F}_\Gamma$ *gehören, die Bedingungen (2.3) und (2.6) bzw. (2.4) und (2.7) erfüllt sind. Die Bedingungen (2.3,4) beziehen sich auf die Spitze* $\zeta = A^{-1}\,\infty$ *von* Γ $(A \in {}_1\mathrm{B})$, *die Bedingungen (2.6,7) gelten auch für Nichtfixpunkte in* $\mathfrak{H}$ *anstelle von* ω *; dann ist* $l = 1$ *zu setzen. Wenn eine dieser Bedingungen nicht erfüllt ist, strebt der Näherungswert des betreffenden Teilintegrals dem Betrage nach gegen* ∞.

Die Rechenregeln für diese Skalarprodukte ergeben sich aus (2.2) und den Existenzbedingungen von Satz 2. Zunächst erklärt man, wenn diese Bedingungen erfüllt sind, $(f\,,\,\Phi]$ als Grenzwert von $\iint\limits_{\mathfrak{B}} f\,\overline{\Phi^*}\,dxdy$, wo $\mathfrak{B}$ in der oben beschriebenen Art gegen $\mathfrak{F}_\Gamma$ konvergiert. Dabei ergibt sich der zu $[\Phi, f)$ konjugiert-komplexe Wert. Das entsprechende Verhalten zeigt $[\Phi_1, \Phi_2]$ bei Vertauschung von Φ_1 und Φ_2. Sind die Bedingungen für die Existenz der Skalarprodukte $[\Phi_j, \Psi]$ bzw. $[\Phi_j, f)$ $(\Phi_j, \Psi \in \mathfrak{L}_\Gamma$, $f \in \{\Gamma, -2, 1\}$, $1 \leqq j \leqq m)$ erfüllt, so ergibt sich für komplexe λ_j mit der Summe 1

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\Phi_j, \Psi] = \Big[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi_j, \Psi\Big] \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\Phi_j, f) = \Big[\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi_j, f\Big),$$

und die Skalarprodukte auf den rechten Seiten existieren im Sinne von Satz 2. Wenn dagegen die Summe der λ_j verschwindet, so folgt

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\Phi_j, \Psi] = \Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi_j, \Psi\Big] \quad \text{bzw.} \quad \sum_{j=1}^{m} \lambda_j [\Phi_j, f) = \Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \Phi_j, f\Big),$$

und auch hier existieren die Skalarprodukte rechts im Sinne von Satz 2, bzw. von [2], Satz 1.

§ 3 Berechnung gewisser Skalarprodukte vom Typus (Φ, f)

Es handelt sich um die Fälle, in denen f ein Differential zweiter Gattung darstellt; von Φ wird zunächst lediglich $\Phi \in \mathfrak{L}_\Gamma$ vorausgesetzt. Die Methode, mit der die Berechnung durchgeführt wird, ist die in [4] mitgeteilte; der im folgenden zu beweisende Hauptsatz entspricht einer Teilaussage von [4] Satz 11. Demgemäss wird die ganze Bezeichnung von [4], die sich auf die Integrationstechnik und auf die Funktionen von $\{\Gamma, -2, 1\}$ bezieht, ohne erneute Erklärung und mit nur einer — im übrigen geringen — Änderung übernommen: Die Punkte x_h, x_h', x, x' werden hier mit bzw. $\varkappa_h, \varkappa_h', \varkappa, \varkappa'$; die Punkte y_k, y_k', y, y' werden hier mit bzw. $\beta_k, \beta_k', \beta, \beta'$ bezeichnet. Poincarésche Reihen werden bei der Berechnung nicht benutzt.

Nach der Gauss'schen Integralformel erhält man zunächst

$$2iK_1(\Phi, f; \tilde{\mathfrak{K}}) = \int_{\partial\tilde{\mathfrak{K}}} (\Phi\,\bar{u}\,d\tau - (\log y)\,\bar{f}\,d\bar{\tau});$$

wir setzen für eine stückweise glatte Kurve $\mathfrak{w}$ in $\mathfrak{H}$, auf der Φ und f holomorph sind:

$$R(\Phi, u; \mathfrak{w}) := \int_{\mathfrak{w}} (-\Phi\,\bar{u}\,d\tau + (\log y)\,\bar{f}\,d\bar{\tau})$$

und für $S \in {}_1\mathsf{B}: \underline{S} = \{c, d\}$, $u(\tau) \mid S = u(S\tau)$, $\bar{u} \mid S = \overline{u \mid S}$. Dann findet man

$$R(\Phi\,,\,u\,;\,S\,\mathfrak{w}) - R(\Phi \,\|\, S\,,\,u \mid S\,;\,\mathfrak{w}) =$$

$$(3.1) \qquad = -\int_{\mathfrak{w}} \left(\bar{u} \mid S \,\frac{c\,d\tau}{c\tau + d} + \overline{f \mid S} \log |c\tau + d|^2 \,d\bar{\tau}\right).$$

Die Betrachtung des totalen Differentials der Funktion $(\bar{u} \mid S) \log (c\tau + d)$ ergibt schliesslich für die rechte Seite in (3.1):

$$(3.2) \qquad - [\bar{u}|S \log |c\tau + d|^2]_{\tau_1}^{\tau_2} + \mathrm{kk} \int_{\mathfrak{w}} u \mid S \,\frac{c\,d\tau}{c\tau + d}\,,$$

wo $\mathrm{kk}X$ den zu $X \in \boldsymbol{C}$ konjugiert-komplexen Wert $\bar{X}$ und τ_1 den Anfangspunkt, τ_2 den Endpunkt von $\mathfrak{w}$ bezeichnet.

Dies wird zunächst angewendet auf

$$\int_{\mathfrak{A}} = \int_{\alpha}^{\xi} - \int_{\alpha'}^{\xi'} + \int_{\alpha'}^{\alpha} = \int_{P\alpha'}^{P\xi'} - \int_{\alpha'}^{\xi'} + \int_{\alpha'}^{\alpha}\,,$$

wobei sich einerseits nach (3.1,2) mit $\underline{P} = \{p_1\,,\,p_2\}$ findet

$$\int_{P\alpha'}^{P\xi'} - \int_{\alpha'}^{\xi'} = - [\bar{u} \log |p_1 \tau + p_2|^2]_{\alpha'}^{\xi'} + \mathrm{kk} \int_{\alpha'}^{\xi'} u \,\frac{p_1\,d\tau}{p_1\tau + p_2}\,,$$

da wegen $f \in \mathfrak{C}_2$ gilt: $u \mid P = u$. Bezeichnet andererseits $\mathfrak{a}$ den Parazykelbogen, der von α' nach α führt, und wird $\mathfrak{a}_0 : = A\,\mathfrak{a}$ definiert ($\zeta = A^{-1}\,\infty$), so hat man mit $u_A : = u \mid A^{-1}$, $A = \begin{pmatrix} a_0 & * \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ ebenso:

$$\int_{\alpha'}^{\alpha} = \int_{\mathfrak{a}} = \int_{A^{-1}\mathfrak{a}_0} = R(\Phi\,,\,u\,;\,A^{-1}\,\mathfrak{a}_0) =$$

$$= R(\Phi_A\,,\,u_A\,;\,\mathfrak{a}_0) + [\bar{u}_A \log |-a_1\,\tau + a_0|^2]_{A\alpha}^{A\alpha'} + \mathrm{kk} \int_{\mathfrak{a}_0} u_A \,\frac{-a_1\,d\tau}{-a_1\,\tau + a_0}$$

$$= R(\Phi_A\,,\,u_A\,;\,\mathfrak{a}_0) + [\bar{u} \log |a_1\,\tau + a_2|^2]_{\alpha'}^{\alpha} - \mathrm{kk} \int_{\mathfrak{a}} u \,\frac{a_1\,d\tau}{a_1\,\tau + a_2}\,.$$

Hier ist nun $R(\Phi_A\,,\,u_A\,;\,\mathfrak{a}_0)$ auf Grund der Entwicklungen (1.2), [4] (2.18) und der Annahme der Existenz von $[\Phi\,,f)$ explizit bestimmbar; zunächst wird

$$-\int_{\mathfrak{a}_0} \Phi_A\,\bar{u}_A\,d\tau = - N\bar{c}_0(\zeta)\,\beta_0(A\,,\,\Phi) + \frac{N^2}{2\pi i} \sum_{k=-m_0}^{\infty}{}' \,k^{-1}\,\bar{b}_k\,\beta_k \exp\,(-\,4\pi k y/N)\,,$$

wo $b_k = b_k(A, f)$, $\beta_k = \beta_k(A, \Phi)$ einzusetzen ist und der Akzent am Summenzeichen bedeutet, dass $k \neq 0$. Damit folgt, wenn h die (konstante) Ordinate von $\mathfrak{a}_0$ bezeichnet:

$$R(\Phi_A, u_A; \mathfrak{a}_0) = -N\bar{c}_0(\zeta)\,\beta_0(A, \Phi) + O(e^{-4\pi N^{-1}h})$$

und schliesslich

$$\int_{\mathfrak{A}} = [\bar{u}\log|a_1\tau + a_2|^2]_{\alpha'}^{\alpha} - [\bar{u}\log|p_1\tau + p_2|^2]_{\alpha'}^{\xi'} +$$

$$(3.3)\qquad -\,\mathrm{kk}\int_{\alpha'}^{\alpha} u\,\frac{a_1\,d\tau}{a_1\tau + a_2} + \mathrm{kk}\int_{\alpha'}^{\xi'} u\,\frac{p_1\,d\tau}{p_1\tau + p_2} - N\bar{c}_0(\zeta)\,\beta_0(A, \Phi) +$$

$$+\,O(e^{-4\pi N^{-1}h})\,;$$

das Zeichen O betrifft den Grenzübergang $h \to +\infty$.

Bei der entsprechenden Integration über den Teilbogen $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_k$ setzen wir wie in [4] voraus, dass die untere Summationsgrenze $-m_0$ in den Potenzreihen $\Phi_\omega(w)$ und

$$f_\omega(w) = \sum_{m=-m_0}^{\infty} b_m(\omega, f)\,w^m(\tau, \omega)$$

negativ und $\equiv -1 \bmod l$ sei; wir schreiben nach [4] (2.19)

$$u(\tau) = c_0(\omega) + \frac{1}{\omega - \bar{\omega}}\sum_{\substack{m=-m_0\\ m\neq 0}}^{\infty} m^{-1}b_{m-1}(\omega, f)\,w^m = c_0(\omega) + \frac{1}{\omega - \bar{\omega}}\,u_\omega(w)\,.$$

Man hat zunächst

$$\int_{\mathfrak{B}} = \int_{\beta}^{\eta} - \int_{\beta'}^{\eta'} + \int_{\beta'}^{\beta} = \int_{E\beta'}^{E\eta'} - \int_{\beta'}^{\eta'} + \int_{\beta'}^{\beta}$$

und hier nach (3.1,2):

$$\int_{\beta}^{\eta} - \int_{\beta'}^{\eta'} = -\,[\bar{u}\log|e_1\tau + e_2|^2]_{\beta'}^{\eta'} + \mathrm{kk}\int_{\beta'}^{\eta'} u\,\frac{e_1\,d\tau}{e_1\tau + e_2}\,;$$

dabei bezeichnet $\{e_1, e_2\}$ die zweite Zeile der Grundmatrix E von ω, falls ω ein elliptischer Fixpunkt von Γ ist; in diesem Falle sei l seine Ordnung; sonst sei $E = -I$, $l = 1$.

Das dritte Integral ist über einen Kreisbogen $|w| = \varrho'$ mit der Winkelöffnung $2\pi/l$ zu erstrecken. Dabei ergibt sich als erster Bestandteil des Integranden

$$-\Phi \bar{u}\, d\tau = \frac{\bar{u}\, d\tau}{\tau - \bar{\omega}} - \frac{\bar{c}_0(\omega)}{\omega - \bar{\omega}} \Phi_\omega(w)\, dw + \frac{1}{(\omega - \bar{\omega})^2} \Phi_\omega(w)\, \bar{u}_\omega(w)\, dw ,$$

und die Integration liefert

$$\int_{\beta'}^{\beta} \frac{\bar{u}\, d\tau}{\tau - \bar{\omega}} - \frac{2\pi i}{l(\omega - \bar{\omega})} \bar{c}_0(\omega)\, \beta_{-1}(\omega, \Phi) +$$

$$+ \frac{2\pi i}{l(\omega - \bar{\omega})^2} \sum_{\substack{k \geqq -m_0 + 1 \\ k \equiv 0 \bmod l}}' k^{-1} \bar{b}_{k-1}(\omega, f)\, \beta_{k-1}(\omega, \Phi) \varrho'^{2k} .$$

Man findet demnach (vgl. Satz 2)

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \int_{\mathfrak{K}} &= -[\bar{u} \log |e_1 \tau + e_2|^2]_{\beta'}^{\eta'} + \mathrm{kk} \int_{\beta'}^{\eta'} u \frac{e_1\, d\tau}{e_1 \tau + e_2} + \int_{\beta'}^{\beta} \bar{u} \frac{d\tau}{\tau - \bar{\omega}} + \\ &- \frac{2\pi i}{l(\omega - \bar{\omega})} \bar{c}_0(\omega)\, \beta_{-1}(\omega, \Phi) + \int_{\beta'}^{\beta} (\log y) \bar{f}\, d\bar{\tau} + O(\varrho'^{2l}) ; \end{aligned}$$

das Zeichen O betrifft den Grenzübergang $\varrho' \to 0$.

Das Teilintegral des dritten Typus ist über den Weg $\mathfrak{C}$ zu erstrecken, der auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ verläuft und γ_4 über $\gamma_3, \gamma_2, \gamma_1$ mit γ_0 verbindet. Es sei $\mathfrak{w}_{ij}$ der Teil von $\mathfrak{C}$ mit dem Anfangspunkt γ_i und dem Endpunkt $\gamma_j\ (0 \leqq i < j \leqq 4)$. Man erhält in verständlicher Symbolik

$$\mathfrak{C} = H\mathfrak{w}_{12} - \mathfrak{w}_{12} + G\mathfrak{w}_{23} - \mathfrak{w}_{23}$$

Nach (3.1.2) gilt für $L \in \Gamma$ mit $\eta_L = \eta_L(f)$ (vgl. [4] (2.21)):

$$R(\Phi, u; L\mathfrak{w}) - R(\Phi, u; \mathfrak{w}) =$$

$$= -[(\bar{u} + \bar{\eta}_L) \log |\gamma\tau + \delta|^2]_{r_1}^{r_2} + \mathrm{kk} \int_{\mathfrak{w}} (u + \eta_L) \frac{\gamma\, d\tau}{\gamma\tau + \delta} - \bar{\eta}_L \int_{\mathfrak{w}} \Phi\, d\tau .$$

Setzt man nun $\underline{H} = \{h_1, h_2\}$, $\underline{G} = \{g_1, g_2\}$, und gemäss $\gamma_1 = G\gamma_2$, $\gamma_3 = H\gamma_2$:

$$-\int_{\mathfrak{w}_{12}} \Phi\, d\tau = \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} \Phi\, d\tau = : \vartheta_G , \int_{\mathfrak{w}_{23}} \Phi\, d\tau = \int_{\gamma_2}^{\gamma_3} \Phi\, d\tau = : \vartheta_H$$

so findet man

$$\int_{\mathfrak{C}} = [(\bar{u} + \bar{\eta}_H) \log |h_1 \tau + h_2|^2]_{\gamma_2}^{\gamma_1} - [(\bar{u} + \bar{\eta}_G) \log |g_1 \tau + g_2|^2]_{\gamma_2}^{\gamma_3} +$$

$$(3.5) \qquad - \mathrm{kk} \int_{\gamma_2}^{\gamma_1} (u + \eta_H) \frac{h_1 \, d\tau}{h_1 \tau + h_2} + \mathrm{kk} \int_{\gamma_2}^{\gamma_3} (u + \eta_G) \frac{g_1 \, d\tau}{g_1 \tau + g_2} + \vartheta_G \bar{\eta}_H - \vartheta_H \bar{\eta}_G \, .$$

Aus den hier abgeleiteten Formeln (3.3,4,5) erhält man durch Einsetzen der speziellen von den betreffenden Indizes abhängigen Daten in die Integrale

$$(3.6) \qquad \int_{\mathfrak{A}_h} (1 \leqq h \leqq \sigma_0) \, , \quad \int_{\mathfrak{B}_k} (1 \leqq k \leqq d_0) \, , \quad \int_{\mathfrak{C}_\nu} (1 \leqq \nu \leqq p_0)$$

und Summation über h, k bzw. ν eine erste Darstellung von $[\Phi, f)$. Sie ist in dieser Gestalt ohne unmittelbare Bedeutung, kann aber durch zwei Umformungen in einen lehrreichen Satz übergeführt werden. Die Umformungen bestehen darin, dass dem bisher untersuchten Linienintegral über $\partial \mathfrak{K}$ zwei weitere solche Integrale hinzugefügt werden, die beide verschwinden.

Das erste dieser Integrale ist $\int_{\partial \mathfrak{K}} \Phi \, u \, d\tau$. Unter den analogen Voraussetzungen wie bei (3.1,2) erhält man

$$\int_{L\mathfrak{w}} \Phi \, u \, d\tau - \int_{\mathfrak{w}} \Phi \, u \, d\tau = \eta_L \int_{\mathfrak{w}} \Phi \, d\tau + \int_{\mathfrak{w}} (u + \eta_L) \frac{\gamma \, d\tau}{\gamma \tau + \delta} \quad (L \in \Gamma) \, ,$$

wo $\underline{L} = \{\gamma, \delta\}$ gesetzt wurde. Damit folgt zunächst

$$\int_{\mathfrak{A}} \Phi \, u \, d\tau = \int_{\alpha'}^{\xi'} u \frac{p_1 \, d\tau}{p_1 \tau + p_2} + \int_{\alpha'}^{\alpha} \Phi \, u \, d\tau \, ,$$

und man berechnet nun

$$\int_{\alpha'}^{\alpha} \Phi \, u \, d\tau = - \int_{\alpha'}^{\alpha} u \frac{a_1 \, d\tau}{a_1 \tau + a_2} + \int_{\mathfrak{a}_0} \Phi_A \, u_A \, d\tau$$

mit dem Gesamtergebnis

$$(3.7) \qquad \begin{aligned} \int_{\mathfrak{A}} \Phi \, u \, d\tau = & - \int_{\alpha'}^{\alpha} u \frac{a_1 \, d\tau}{a_1 \tau + a_2} + \int_{\alpha'}^{\xi'} u \frac{p_1 \, d\tau}{p_1 \tau + p_2} + \\ & + N c_0(\zeta) \, \beta_0(A, \Phi) + \frac{N^2}{2\pi i} \sum_{\substack{m=-m_0 \\ m \neq 0}}^{m_0} m^{-1} b_m(A, f) \, \beta_{-m}(A, \Phi) \, . \end{aligned}$$

Das analoge Vorgehen ergibt

$$\int_{\mathfrak{P}} \Phi\, u\, d\tau = \int_{\beta'}^{\eta'} u \frac{e_1\, d\tau}{e_1 \tau + e_2} + \int_{\beta'}^{\beta} \Phi\, u\, d\tau\,,$$

und eine Rechnung, die der oben durchgeführten ähnlich ist, liefert

$$\int_{\mathfrak{P}} \Phi\, u\, d\tau = -\int_{\beta'}^{\beta} u \frac{d\tau}{\tau - \bar{\omega}} + \int_{\beta'}^{\eta'} u \frac{e_1\, d\tau}{e_1 \tau + e_2} +$$

(3.8)

$$+ \frac{2\pi i}{l(\omega - \bar{\omega})}\, c_0(\omega) \beta_{-1}(\omega\,, \Phi) + \frac{2\pi i}{l^2(\omega - \bar{\omega})^2} \sum_{0<|k|\leqq n_0} k^{-1} b_{kl-1}(\omega\,, f)\, \beta_{kl-1}(\omega\,, \Phi)$$

Schliesslich erhält man für das Teilintegral des dritten Typus, also für $\int_{\mathfrak{C}} \Phi\, u\, d\tau$ folgenden Ausdruck:

$$(3.9) \qquad -\int_{\gamma_2}^{G\gamma_2} (u + \eta_H) \frac{h_1\, d\tau}{h_1 \tau + h_2} + \int_{\gamma_2}^{H\gamma_2} (u + \eta_G) \frac{g_1\, d\tau}{g_1 \tau + g_2} - \vartheta_G \eta_H + \vartheta_H \eta_G\,.$$

Eine erste Umformung von $2 i K_1(\Phi\,, f\,; \tilde{\mathfrak{K}})$ gewinnt man, indem man von den Teilintegralen (3.3,4,5) jeweils den konjugiert-komplexen Wert des entsprechenden Teilintegrals (3.7,8,9) subtrahiert. Das liefert eine nach dem Schema (3.6) abermals aus entsprechenden Teilintegralen zusammengesetzte Darstellung von $2 i K_1(\Phi\,, f; \tilde{\mathfrak{K}})$. In dieser Darstellung ist zu setzen

$$\int_{\mathfrak{A}} = [\bar{u} \log |a_1 \tau + a_2|^2]_{\alpha'}^{\alpha} - [\bar{u} \log |p_1 \tau + p_2|^2]_{\alpha'}^{\xi'} +$$

$$(3.10) \qquad - 2 N \bar{c}_0(\zeta) \operatorname{Re} \beta_0(A\,, \Phi) + \frac{N^2}{2\pi i} \sum_{\substack{m=-m_0 \\ m\neq 0}}^{+m_0} m^{-1} \bar{b}_m(A\,, f)\, \bar{\beta}_{-m}(A\,, \Phi) +$$

$$+ O(e^{-4\pi N^{-1} h})\,;$$

$$\int_{\mathfrak{P}} = - [\bar{u} \log |e_1 \tau + e_2|^2]_{\beta'}^{\eta'} + \int_{\beta'}^{\beta} \bar{u} \left(\frac{d\tau}{\tau - \bar{\omega}} + \frac{d\bar{\tau}}{\bar{\tau} - \omega} \right) + \int_{\beta'}^{\beta} (\log y) \bar{f}\, d\bar{\tau}$$

$$(3.11) \qquad - \frac{4\pi i}{l(\omega - \bar{\omega})}\, \bar{c}_0(\omega) \operatorname{Re} \beta_{-1}(\omega\,, \Phi) + \frac{2\pi i}{l^2(\omega - \bar{\omega})^2} \times$$

$$\sum_{0<|k|\leqq n_0} k^{-1} \bar{b}_{kl-1}(\omega\,, f)\, \bar{\beta}_{-kl-1}(\omega\,, \Phi) + O(\varrho'^{2l})\,;$$

$$(3.12)\quad \int\limits_{\mathfrak{C}} = [(\bar{u} + \bar{\eta}_H) \log |h_1 \tau + h_2|^2]_{\gamma_2}^{\gamma_1} - [(\bar{u} + \bar{\eta}_G) \log |g_1 \tau + g_2|^2]_{\gamma_2}^{\gamma_3} + 2\{(\operatorname{Re} \vartheta_G)\, \bar{\eta}_H - (\operatorname{Re} \vartheta_H)\, \bar{\eta}_G\}\,.$$

Die zweite Umformung beruht auf der zu (3.3,4,5) analogen Zerlegung des totalen Differentials der Funktion $u \log y$. Wir betrachten in der eingangs dieses § 3 verwendeten Symbolik die Ausdrücke

$$T(u\,,\mathfrak{w}) := \int\limits_{\mathfrak{w}} d(u \log y)\,,\quad T(u\,,S\mathfrak{w}) - T(u\,|\,S\,,\mathfrak{w}) = : -V(S\,,\mathfrak{w})\,,$$

für deren zweiten wir im Hinblick auf

$$d(u \log y) = f(\log y)\, d\tau + u\, d \log y$$

die Darstellung erhalten

$$V(S\,,\mathfrak{w}) = \int\limits_{\mathfrak{w}} (f\,|\,S) \log |c\tau + d|^2\, d\tau + \int\limits_{\mathfrak{w}} (u\,|\,S) \left(\frac{c\, d\tau}{c\tau + d} + \frac{c\, d\bar{\tau}}{c\bar{\tau} + d}\right),$$

oder einfacher:

$$V(S\,,\mathfrak{w}) = [u\,|\,S \log |c\tau + d|^2]_{\tau_1}^{\tau_2}\,.$$

Damit wird zunächst bei Integration von $d(u \log y)$:

$$\int\limits_{\alpha}^{\xi} - \int\limits_{\alpha'}^{\xi'} = -[u \log |p_1 \tau + p_2|^2]_{\alpha'}^{\xi'}\,,\quad \int\limits_{\beta}^{\eta} - \int\limits_{\beta'}^{\eta'} = -[u \log |e_1 \tau + e_2|^2]_{\beta'}^{\eta'}\,.$$

Andererseits erhält man aus der gleichen Quelle und wegen $T(u_A\,,\mathfrak{a}_0) = 0$:

$$(3.13)\quad \int\limits_{\mathfrak{A}} d\,(u \log y) = -[u \log |p_1 \tau + p_2|^2]_{\alpha'}^{\xi'} + [u \log |a_1 \tau + a_2|^2]_{\alpha'}^{\alpha}\,;$$

die analogen Darstellungen für die Integrale über $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ ergeben sich ohne zusätzliche Rechnung:

$$(3.14)\quad \int\limits_{\mathfrak{B}} d(u \log y) = -[u \log |e_1 \tau + e_2|^2]_{\beta'}^{\eta'} - \int\limits_{\beta'}^{\beta} f \log y\, d\tau + \int\limits_{\beta'}^{\beta} u\, d \log y$$

$$(3.15)\quad \int\limits_{\mathfrak{C}} d(u \log y) = [u\,|\,H \log |h_1 \tau + h_2|^2]_{\gamma_2}^{G\gamma_2} - [u\,|\,G \log |g_1 \tau + g_2|^2]_{\gamma_2}^{H\gamma_2} + \eta_H \log |g_1 \gamma_2 + g_2|^2 - \eta_G \log |h_1 \gamma_2 + h_2|^2\,.$$

Subtrahiert man nun $0 = \mathrm{kk} \int\limits_{\partial^- \tilde{\mathfrak{K}}} d(u \log y)$ in der (3.13,14,15) entsprechenden Zerlegung von $2\, i\, K_1(\Phi\,, f\,;\, \tilde{\mathfrak{K}})$, so bedeutet dies, dass sich

$2\,i\,K_1(\Phi\,,f\,;\tilde{\mathfrak{K}})$ aus Integralen vom Typus (3.6) additiv zusammensetzen lässt und dass die einzelnen Summanden dieser Darstellung durch die folgenden Prozesse aus den Relationen (3.10,11,12) zu gewinnen sind:

In (3.10) sind die ersten beiden Glieder auf der rechten Seite zu tilgen. In (3.11) sind die ersten drei Glieder auf der rechten Seite zu tilgen. Denn man hat im Hinblick auf $y = p\,\dfrac{1-\varrho^2}{|1-w|^2} = \dfrac{1-\varrho^2}{4\,p}\,|\tau-\bar\omega|^2$ $(p = \operatorname{Im}\omega)$:

$$\frac{d\tau}{\tau-\bar\omega} + \frac{d\bar\tau}{\bar\tau-\omega} - \frac{dy}{y} = \frac{d\,|\tau-\bar\omega|^2}{|\tau-\bar\omega|^2} - \frac{dy}{y} = 0\,,$$

sobald $\varrho = |w|$ konstant ist. In (3.12) ist die rechte Seite zu ersetzen durch

$$2\,\bar\eta_H \operatorname{Re}\,(\vartheta_G - \log\,(g_1\gamma_2 + g_2)) - 2\,\bar\eta_G \operatorname{Re}\,\big(\vartheta_H - \log\,(h_1\gamma_2 + h_2)\big)$$

Man erhält zusammenfassend:

Satz 3. *Es sei* $\Phi \in \mathfrak{L}_\Gamma\,,\ f \in \{\Gamma\,,-2\}$ *und* f *von zweiter Gattung (d.h. residuenfrei). Wenn das Skalarprodukt* $[\Phi\,,f)$ *im Sinne von Satz 2 als Cauchyscher Hauptwert existiert, so gilt in den Bezeichnungen von § 1, § 2 und [4] § 3:*

$$\begin{aligned}
2\,i\,[\Phi\,,f) = &- 2\sum_{h=1}^{\sigma_0} N_h\,\bar c_0(\zeta_h\,,f)\operatorname{Re}\beta_0(A_h\,,\Phi) + \\
&+ \sum_{h=1}^{\sigma_0}\frac{1}{2\pi i}\,N_h^2 \sum_{0<|m|\leqq m_{0h}} m^{-1}\,\bar b_m(A_h\,,f)\,\bar\beta_{-m}(A_h\,,\Phi) + \\
&- 2\sum_{k=1}^{d_0}\frac{2\pi i}{l_k(\omega_k-\bar\omega_k)}\,\bar c_0(\omega_k\,,f)\operatorname{Re}\beta_{-1}(\omega_k\,,\Phi) + \\
&+ \sum_{k=1}^{d_0}\frac{2\pi i}{l_k^2(\omega_k-\bar\omega_k)^2}\sum_{0<|m|\leqq n_{0k}} m^{-1}\,\bar b_{ml_k-1}(\omega_k\,,f)\,\bar\beta_{-ml_k-1}(\omega_k\,,\Phi) + \\
&+ 2\sum_{\nu=1}^{p_0}\Big\{\bar\eta(H_\nu\,,f)\operatorname{Re}\big(\vartheta_{G_\nu} - \log\,(g_{\nu1}\gamma_{\nu2}+g_{\nu2})\big) + \\
&\qquad - \bar\eta(G_\nu\,,f)\operatorname{Re}\big(\vartheta_{H_\nu} - \log\,(h_{\nu1}\gamma_{\nu2}+h_{\nu2})\big)\Big\}
\end{aligned}$$

Die natürlichen Zahlen $m_{0h}\,,\,n_{0k}$ *sind so gross zu wählen, dass in den betreffenden Summen alle Hauptteil-Koeffizienten von* Φ *und* f *auftreten. Ferner wurde gesetzt*

$$\underline{G}_\nu =:\{g_{\nu1}\,,g_{\nu2}\}\,,\qquad \underline{H}_\nu =:\{h_{\nu1}\,,h_{\nu2}\}\,,$$

$$\vartheta_{G_\nu} =: \int_{\gamma_{\nu2}}^{G_\nu\gamma_{\nu2}} \Phi\,d\tau\,,\quad \vartheta_{H_\nu} := \int_{\gamma_{\nu2}}^{H_\nu\gamma_{\nu2}} \Phi\,d\tau\,. \qquad (1 \leqq \nu \leqq p_0)\,.$$

Wir spezialisieren jetzt $\Phi(\tau)$ auf eine Funktion Φ_1 von $\mathfrak{L}_\Gamma^1$. In formaler (nicht sachlicher) Verallgemeinerung von $\mathfrak{L}_\Gamma^1$ seien gegeben

$$f_j \in \{\Gamma, -r_j, v_j\}, \quad r_j \in \boldsymbol{R}, \quad |v_j| = 1, \quad r_j f_j \not\equiv 0, \quad \xi_j \in \boldsymbol{R} \qquad (1 \leq j \leq n)$$

mit $\sum_{j=1}^{n} \xi_j = 1$; wir setzen $\Phi_1(\tau) := \sum_{j=1}^{n} \xi_j \Lambda(\tau, f_j)$. Ferner sei $\mathfrak{w}$ eine stückweise glatte Kurve in $\mathfrak{H}$; bezeichnet τ_0 ihren Anfangspunkt, τ_1 ihren Endpunkt, so sei $\tau_1 = L\tau_0$ mit einem $L \in \Gamma$; auf $\mathfrak{w}$ sei jede Funktion f_j holomorph und $\neq 0$. Wir erhalten nun

$$\vartheta_L := \int_{\mathfrak{w}} \Phi_1 \, d\tau = \sum_{j=1}^{n} \xi_j r_j^{-1} \int_{\mathfrak{w}} f_j^{-1} f_j' \, d\tau = \sum_{j=1}^{n} \xi_j r_j^{-1} (\log f_j(L\tau_0) - \log f_j(\tau_0));$$

dabei ist $\log f_j(\tau)$ in einer Umgebung von τ_0 irgendwie zu bestimmen und dann längs $\mathfrak{w}$ in eine Umgebung von τ_1 analytisch fortzusetzen. Mit geeigneten, aber stets rein imaginären Werten von $\log v_j(L)$ findet man demgemäss, wenn $\underline{L} =: \{\gamma, \delta\}$:

$$\vartheta_L = \sum_{j=1}^{n} \xi_j r_j^{-1} \log v_j(L) + \log(\gamma\tau_0 + \delta),$$

und daher verschwindet $\operatorname{Re}(\vartheta_L - \log(\gamma\tau + \delta))$. Die Voraussetzungen für diesen Sachverhalt sind in der Situation von Satz 3 für Φ_1 anstelle von Φ erfüllt. Nach (1.8) sind ferner sämtliche Residuen von Φ_1 reell, folglich sind nach (1.4,6) die in der Formel von Satz 3 auftretenden $\operatorname{Re}\beta_0(A_h, \Phi)$, $\operatorname{Re}\beta_{-1}(\omega_k, \Phi)$ sämtlich gleich 0. Also erhält man

Satz 4. *Es sei* $\Phi_1 \in \mathfrak{L}_\Gamma^1$, $f \in \{\Gamma, -2\}$ *und* f *von zweiter Gattung. Wenn das Skalarprodukt* $[\Phi_1, f)$ *im Sinne von Satz 2 als Cauchyscher Hauptwert existiert, so gilt:*

$$2i[\Phi_1, f) = -\sum_{h=1}^{\sigma_0} \frac{1}{2\pi i} N_h^2 \sum_{1 \leq m \leq n_{0h}} m^{-1} \bar{b}_{-m}(A_h, f)\, \bar{\beta}_m(A_h, \Phi_1) +$$

$$-\sum_{k=1}^{d_0} \frac{2\pi i}{l_k^2 (\omega_k - \bar{\omega}_k)^2} \sum_{1 \leq m \leq m_{0k}} m^{-1} \bar{b}_{-ml_k-1}(\omega_k, f)\, \bar{\beta}_{ml_k-1}(\omega_k, \Phi_1)$$

Insbesondere ist $[\Phi_1, f) = 0$, *wenn* f *von erster Gattung ist.*

Die letzte Aussage ist ein Teil einer Kennzeichnung von $\mathfrak{L}^2$ in $\mathfrak{L}^3$, die wie in [6] angegeben bewiesen werden kann:

Satz 5. *Eine Funktion* $\Phi_3 \in \mathfrak{L}_\Gamma^3$ *gehört genau dann zu* $\mathfrak{L}_\Gamma^2$, *wenn sie zu der vollen Schar* $\mathfrak{C}_1$ *orthogonal ist, d.h. wenn* $[\Phi_3, f_1) = 0$ *ist für alle*

$f_1 \in \mathfrak{E}_1$. *Die Differenz zweier Funktionen aus* $\mathfrak{L}_\Gamma^2$ *gehört stets zur Normalschar* $\mathfrak{N}_3$ *(vgl. [4], S. 22). Eine Funktion aus* $\mathfrak{L}_\Gamma^2$ *ist durch ihre Residuen eindeutig bestimmt.*

§ 4 Spurbildung. Zerlegungssätze

(Zu den folgenden Ausführungen vgl. [5]). Sind $\varphi_j(\tau)$ $(1 \leqq j \leqq m)$ in $\mathfrak{H}$ meromorphe Funktionen und λ_j Konstante, so gilt für $S \in {}_1\mathsf{B}$

$$\Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(\tau)\Big) \| S = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j(\tau) \| S \,, \quad \text{falls} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1 \,.$$

Es sei Δ eine Grenzkreisgruppe von erster Art, Δ Untergruppe von Γ (also $\mu := [\Gamma : \Delta] < \infty$) und $\Gamma = \bigcup_{\nu=1}^{\mu} \Delta Q_\nu$; ferner sei $\varphi(\tau) \in \mathfrak{L}_\Delta$, $L \in \Delta$, $S \in \Gamma$. Wegen $\varphi \| LS = \varphi \| S$ hängt

$$\varphi(\tau) \| \Gamma := \mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, \varphi(\tau) := \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=1}^{\mu} \varphi(\tau) \| Q_\nu \tag{4.1}$$

von der oben verwendeten Zerlegung nicht ab, verhält sich in $\mathfrak{H}$ meromorph und genügt den Relationen

$$\big(\mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, \varphi(\tau)\big) \| S = \mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, \varphi(\tau) \qquad (S \in \Gamma)$$

Zum Beweise dafür, dass die in (4.1) erklärte Spur $\varphi \| \Gamma$ dem System $\mathfrak{L}_\Gamma$ angehört, kann man entweder die in [5] § 2 mitgeteilte Betrachtung übertragen oder die Fourier-Entwicklung von $\varphi \| \Gamma$ in einer Spitze $\zeta = A^{-1}\infty$ von Γ explizit aufstellen. Hierzu sei (vgl. [5] § 3)

$$\Gamma = \bigcup_{\nu=1}^{h} \bigcup_{j=0}^{k_\nu - 1} \Delta R_\nu P^j \quad (P = A^{-1} U^N A \,, \ \text{vgl. § 1}) \tag{4.2}$$

die Zerlegung von Γ in h Äquivalenzklassen bezüglich P unter den Nebenklassen ΔS $(S \in \Gamma)$. Dann ergibt sich aus den Fourier-Entwicklungen

$$\varphi_{A_\nu}(\tau) = \sum_{m=-m_0}^{\infty} \beta_m(A_\nu \,, \varphi) \exp 2\pi i m \frac{\tau}{k_\nu N}$$

von φ zu den Spitzen $\zeta_\nu = R_\nu \zeta = A_\nu^{-1}\infty$ $(A_\nu = A R_\nu^{-1})$ nach kurzer Rechnung

$$(\varphi \| \Gamma) \| A^{-1} = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=1}^{h} \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \varphi_{A_\nu}(\tau + jN) = \sum_{m=-m_0'}^{\infty} \beta_m(A \,, \varphi \| \Gamma) \exp 2\pi i m \frac{\tau}{N} \,,$$

wo $k_\nu m_0' \geqq m_0 \geqq 0$ und

$$\beta_m(A \,, \varphi \| \Gamma) = \mu^{-1} \sum_{\nu=1}^{h} k_\nu \beta_{k_\nu m}(A_\nu \,, \varphi) \,.$$

Damit ist zugleich $\varphi \| \Gamma \in \mathfrak{L}_\Gamma$ und die folgende Residuenformel bewiesen:

$$\operatorname{Res}_{\Gamma,\zeta} \operatorname{Sp}_{\Delta/\Gamma} \varphi = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=1}^{h} \operatorname{Res}_{\Delta,\zeta_\nu} \varphi . \tag{4.3}$$

Im übrigen gilt, wenn $\Phi \in \mathfrak{L}_\Gamma : \Phi \in \mathfrak{L}_\Delta$ und $\operatorname{Sp}_{\Delta/\Gamma} \Phi = \Phi$; ferner, wenn $\varphi_j(\tau) \in \mathfrak{L}_\Delta$, $\lambda_j \in C$ $(1 \leqq j \leqq m)$ und $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1$:

$$\operatorname{Sp}_{\Delta/\Gamma}\Big(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \operatorname{Sp}_{\Delta/\Gamma} \varphi_j$$

Die zu (4.2,3) analogen Resultate für die Entwicklungskoeffizienten zu den Punkten in $\mathfrak{H}$ sollen nur referiert werden. Es sei $\omega \in \mathfrak{H}$; ist ω Fixpunkt von Γ, so sei l seine Ordnung, E seine Grundmatrix; ist ω nicht Fixpunkt von Γ, so sei $l = 1$, $E = -I$. Die zu der obigen analoge Zerlegung von Γ in h Äquivalenzklassen bezüglich E unter den Nebenklassen ΔS $(S \in \Gamma)$ werde, abgesehen von E, in der gleichen Symbolik geschrieben; sie sei also

$$\Gamma = \bigcup_{\nu=1}^{h} \bigcup_{j=0}^{k_\nu - 1} \Delta R_\nu E^j ; \tag{4.4}$$

dabei gilt $k_\nu \mid l$, und $l/k_\nu =: l_\nu$ ist die Fixpunktordnung des Punktes $\omega_\nu = R_\nu \omega$ in Δ.

Man hat dann die Entwicklung der Funktion $(\tau - \bar\omega)^2 \varphi \| \Gamma + \tau - \bar\omega$ nach Potenzen von $w = w(\tau, \omega)$ aufzustellen, wo

$$\varphi \| \Gamma = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=1}^{h} \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \varphi(\tau) \| R_\nu \| E^j ,$$

und dabei zu berücksichtigen, dass höchstens diejenigen Exponenten von $w_\nu = w(\tau, \omega_\nu)$ in φ_{ω_ν} tatsächlich auftreten, welche $\equiv -1 \bmod l_\nu$ sind $(1 \leqq \nu \leqq h)$. Setzt man $\underline{R}_\nu = \{r_{\nu 1}, r_{\nu 2}\}$, so kommt

$$\beta_m(\omega, \varphi \| \Gamma) = \mu^{-1} \sum_{\nu=1}^{h} k_\nu \frac{(r_{\nu 1} \bar\omega + r_{\nu 2})^{m+2}}{(r_{\nu 1} \omega + r_{\nu 2})^m} \beta_m(\omega_\nu, \varphi)$$

und daher

$$\operatorname{Res}_{\Gamma,\omega} \operatorname{Sp}_{\Delta/\Gamma} \varphi = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=1}^{h} \operatorname{Res}_{\Delta,\omega_\nu} \varphi . \tag{4.5}$$

Nach den Überlegungen von § 2 und [5] § 2 kann man die Spurbildung mit der metrischen Verknüpfung, soweit Funktionen von $\mathfrak{L}_\Delta$ oder $\mathfrak{L}_\Gamma$ daran beteiligt sind, in Verbindung bringen. Hierbei entstehen drei Typen von Formeln:

Sei erstens $\varphi \in \mathfrak{L}_\Delta$, $\Phi \in \mathfrak{L}_\Gamma$, und das Skalarprodukt $[\varphi, \Phi; \Delta]$ als Cauchyscher Hauptwert existent. Dann gilt

$$[\varphi, \Phi; \Delta] = \mu\, [\mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, \varphi, \Phi; \Gamma], \tag{4.6}$$

falls auch die rechte Seite als Cauchyscher Hauptwert existiert. Sei zweitens $\varphi \in \mathfrak{L}_\Delta$, $f \in \{\Gamma, -2\}$ und $[\varphi, f; \Delta]$ als Cauchyscher Hauptwert existent. Dann gilt

$$[\varphi, f; \Delta) = \mu\, [\mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, \varphi, f; \Gamma), \tag{4.7}$$

falls auch die rechte Seite als Cauchyscher Hauptwert existiert. Sei drittens $\Phi \in \mathfrak{L}_\Gamma$, $g \in \{\Delta, -2\}$ und $[\Phi, g; \Delta)$ als Cauchyscher Hauptwert existent. Dann gilt

$$[\Phi, g; \Delta) = [\Phi, \mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, g; \Gamma), \tag{4.8}$$

falls auch die rechte Seite als Cauchyscher Hauptwert existiert.

Alle diese Aussagen werden auf Grund der Invarianz-Relationen (2.2) für die Integrale K, K_1 mit den Methoden von [5] § 2 bewiesen.

Aus Satz 5 und (4.7) folgt:

(4.9) Wenn $\varphi \in \mathfrak{L}^2_\Delta$, so ist $\mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, \varphi \in \mathfrak{L}^2_\Gamma$.

Hiermit lassen sich konkrete Spurformeln beweisen. Sei $z \in \mathfrak{H}'_\Gamma$; wir bestimmen $\mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, A_0(\tau, z; \Delta)$. Sei zunächst $z = \zeta_\nu$; nach (4.9) ist $\mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, A_0(\tau, \zeta_\nu; \Delta) \in \mathfrak{L}^2_\Gamma$, und nach (4.3) hat diese Funktion in ζ das Residuum $\frac{1}{\mu}\, \varrho^0_\Delta = \varrho^0_\Gamma$, in allen Punkten $\tau_1 \not\equiv \zeta \bmod \Gamma$ das Residuum Null. So folgt nach Satz 5

$$\mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, A_0(\tau, \zeta_\nu; \Delta) = A_0(\tau, \zeta; \Gamma), \tag{4.10}$$

und ganz analog beweist man auf Grund von (4.9,5)

$$\mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, A_0(\tau, \omega_\nu; \Delta) = A_0(\tau, \omega; \Gamma) \tag{4.11}$$

Andererseits gelten in den jeweiligen Bezeichnungen zur Zerlegung der Punkte ζ bzw. ω Zerlegungsformeln für die Funktionen $A_0(\tau, \zeta; \Gamma)$ bzw. $A_0(\tau, \omega; \Gamma)$. Wir schreiben z als gemeinsame Bezeichnung für ζ und ω und analog z_ν für ζ_ν bzw. ω_ν und beweisen

$$A_0(\tau, z; \Gamma) = \mu^{-1} \sum_{\nu=1}^{h} k_\nu\, A_0(\tau, z_\nu; \Delta) \tag{4.12}$$

wie folgt: Die rechte Seite liegt ersichtlich in $\mathfrak{L}^1_\Delta$; stellt g in (4.8) ein Differential von erster Gattung aus $\{\Delta, -2\}$ dar, so ergibt (4.8) zunächst dass $\Lambda_0(\tau, z; \Gamma)$ in $\mathfrak{L}^2_\Delta$ liegt. Im Falle $z = \zeta$ hat man weiter für $1 \leqq \varrho \leqq h$:

$$\mathrm{Res}_{\Delta, \zeta_\varrho} \Lambda_0(*, \zeta; \Gamma) = \frac{Nk_\varrho}{2\pi i} \beta_0\big(A_\varrho, \Lambda_0(*, \zeta; \Gamma)\big) =$$

$$= k_\varrho \mathrm{Res}_{\Gamma, \zeta} \Lambda_0(*, \zeta; \Gamma) = k_\varrho \varrho^0_\Gamma = \frac{k_\varrho}{\mu} \varrho^0_\Delta$$

und $\mathrm{Res}_{\Delta, \tau_1} \Lambda_0(*, \zeta; \Gamma) = 0$, wenn $\tau_1 \not\equiv \zeta_\nu \bmod \Gamma$ für $\nu = 1, 2, \ldots, h$. Das gibt einerseits $\Lambda_0(\tau, z; \Gamma) \in \mathfrak{L}^1_\Delta$, andererseits nach Satz 5 die Behauptung. Im Falle $z = \omega$ verläuft der Beweis analog.

(4.12) besagt genau, dass

$$Z(\tau, z; \Gamma) = \alpha_z \prod_{\nu=1}^{h} Z^{k_\nu}(\tau, z_\nu; \Delta) \tag{4.13}$$

mit einer von Null verschiedenen Konstanten α_z zutrifft; im übrigen kann man diesen Zusammenhang (4.13) auch durch Anwendung der Aussagen über Ordnungen automorpher Formen aus der Punktzerlegung gewinnen.

Wir fassen die Ergebnisse zusammen in

Satz 6. *Sind Γ und Δ Grenzkreisgruppen von erster Art und ist Δ Untergruppe von Γ, so existiert auf dem System $\mathfrak{L}_\Delta$ ein invarianter Spuroperator, der $\mathfrak{L}_\Delta$ auf $\mathfrak{L}_\Gamma$ abbildet. Dabei bestehen einfache Regeln für den Zusammenhang zwischen den Entwicklungskoeffizienten der Argumentfunktionen und denen der Resultatfunktion, ferner für die Umformung von Skalarprodukten, deren einer Skalarfaktor eine Spur ist und schliesslich für die Spurbildung an und Zerlegung von normierten Ableitungen der automorphen Primformen. Die Spurbildung ist (wie in der Algebra) transitiv. Jeder Summand in der Summe, die die Spur definiert, hat die gleiche Spur.*

Man bestätigt leicht, dass für jedes $W \in {}_1\mathsf{B}$ und $z \in \mathfrak{H}'_\Gamma$ gilt

$$\Lambda_0(\tau, W^{-1}z; W^{-1}\Gamma W) = \Lambda_0(\tau, z; \Gamma) \,\|\, W$$

Setzt man $\Gamma_1 := W^{-1}\Gamma W$, $\Delta_1 := W^{-1}\Delta W$, so erhält man die einfache Vertauschungsregel

$$\mathrm{Sp}_{\Delta_1/\Gamma_1}(\varphi \,\|\, W) = (\mathrm{Sp}_{\Delta/\Gamma}\, \varphi) \,\|\, W \qquad (\varphi \in \mathfrak{L}_\Delta),$$

die die letzte Aussage von Satz 6 verallgemeinert.

Im übrigen besteht die entsprechende Vertauschungsregel für die in [5] definierte Spurbildung bei automorphen Formen $\{\Gamma, -r, v\}$, wenn $v \in [\Gamma, -r]$. Man findet dann in den obigen Bezeichnungen

$$(4.14) \qquad \mathrm{Sp}_{A_1/\Gamma_1}(\varphi \underset{r}{|} W) = (\mathrm{Sp}_{A/\Gamma}\, \varphi) \underset{r}{|} W \qquad (\varphi \in \{A, -r, v\})\,;$$

insbesondere hat jeder Summand in der Summe, die $\mathrm{Sp}_{A/\Gamma}\, \varphi$ definiert, die gleiche Spur.

§ 5. Eisensteinsche Reihen vom Grad —2 bei Kongruenzgruppen

Die Funktionen von $\mathfrak{L}^2_\Gamma$ treten, wie in [6] erwähnt, im Zusammenhang mit den Resultatfunktionen des Heckeschen Summationsverfahrens auf; dabei handelt es sich zunächst um die Anwendung dieses Verfahrens auf Eisensteinsche Reihen. Im folgenden wird dieser Zusammenhang im Bereich der verallgemeinerten Differentialklassen $\{\Gamma, -2, v\}$ hergestellt; hier bezeichnet Γ eine beliebige Kongruenzgruppe und v einen Kongruenzcharakter auf Γ.

Zur Erklärung dieser Begriffe sei zunächst N eine natürliche Zahl, ${}_1\Gamma$ die Modulgruppe, d.h. ${}_1\Gamma := \mathrm{SL}(2, \boldsymbol{Z})$, $\Gamma(N)$ bzw. $\Gamma[N]$ die (inhomogene bzw. homogene) Hauptkongruenzgruppe der Stufe N (in ${}_1\Gamma$), d.h. die Gruppe der Matrizen $L \in {}_1\Gamma$ mit $L \equiv I$ bzw. $L \equiv \pm I \bmod N$. Γ heisst Kongruenzgruppe der Stufe N, wenn Γ eine Untergruppe von ${}_1\Gamma$ ist mit $\Gamma[N] \subset \Gamma$. Ein gerader Charakter v auf Γ heisst sodann Kongruenzcharakter der Stufe N auf Γ, wenn $v(L) = 1$ für $L \in \Gamma[N]$ zutrifft; offenbar ist $|v| \equiv 1$. Wir bezeichnen die Formenklassen $\{\Gamma, -2, v\}$ gelegentlich kurz als Kongruenzklassen.

Für die Definition der Eisensteinreihen $\{\Gamma, -2, v\}$ gibt es zwei Ansätze; beide führen im wesentlichen zu denselben Funktionen. Es sei $A \in {}_1\Gamma$ und es sei $P := A^{-1} U^n A$ die Grundmatrix der Spitze $\zeta := A^{-1}\infty$ von Γ. Wir setzen $v(P) = 1$ voraus und verstehen unter $\mathfrak{z}(A\Gamma) = \mathfrak{z}_N(A\Gamma)$ die Menge der Zeilen $\{n_1, n_2\}$ über $\boldsymbol{Z}$, zu deren jeder ein $M \in A\Gamma$ existiert mit $\underline{M} \equiv \{n_1, n_2\} \bmod N$. Ferner erklären wir für $M = AK$

$$(5.1) \qquad v(n_1, n_2) = v(M) = v(AK) = v(A)\, v(K) \qquad (K \in \Gamma)\,,$$

wobei $v(A)$, falls $A \notin \Gamma$, irgendwie gemäss $|v(A)| = 1$ gewählt werde. Die Konsistenz dieser Relationen folgt aus $v(P) = 1$. — Nun wird gesetzt:

$$(5.2) \qquad \tilde{G}_{-2}(s, \tau; v, A, \Gamma) := \sum_{\{n_1, n_2\} \in \mathfrak{z}(A\Gamma)}{}' v^{-1}(n_1, n_2)\,(n_1\tau + n_2)^{-2}\,|n_1\tau + n_2|^{-s}$$

mit einer komplexen Variablen s, deren Realteil σ zunächst > 0 sei; der Akzent schliesst die Zeile mit $n_1 = n_2 = 0$ von der Summation aus.

Diese Funktion hat alle wesentlichen Eigenschaften, die man an einer Poincaréschen Reihe zu finden wünscht, und darüber hinaus noch die folgende: In der Reihe erscheinen, wenn zu gegebenen $b_1, b_2 \in \boldsymbol{Z}$ ein Glied mit $n_1 \equiv b_1, n_2 \equiv b_2 \bmod N$ auftritt, alle diese Glieder mit dem gleichen Koeffizienten; dieser Eigenschaft verdankt die Reihe (5.2) die Anwendbarkeit des Heckeschen Summationsverfahrens in der ursprünglichen einfachen Gestalt und Fourier-Koeffizienten in finiter Darstellung für ihre Nullwerte. Wir erhalten aus der Zerlegung (4.2) mit $\Gamma[N]$ anstelle von l im Hinblick darauf, dass alle k_ν, weil $\Gamma[N]$ ein Normalteiler von Γ ist, den gleichen Wert k haben $(hk = \mu,\ kn = N)$:

$$\Gamma = \bigcup_{\nu=1}^{h} \bigcup_{j=0}^{k-1} P^{-j} R_\nu^{-1} \Gamma[N],\ A\Gamma = \bigcup_{\nu=1}^{h} \bigcup_{j=0}^{k-1} U^{-jn} A_\nu \Gamma[N],$$

wo $A_\nu = AR_\nu^{-1}$. Hier bemerke man, dass die Zeilensysteme $\mathfrak{z}_N(B\Gamma[N])$, $\mathfrak{z}_N(C\Gamma[N])$ $(B, C \in {}_1\Gamma)$ entweder disjunkt oder identisch sind, letzteres genau dann, wenn

$$B^{-1}\infty \equiv C^{-1}\infty \bmod \Gamma[N].$$

Definiert man mit HECKE [1] für $B \in {}_1\Gamma$, $\underline{B} = \{b_1, b_2\}$:

$$G_{-2}(s, \tau; B, N) = \sum_{\substack{m_1 \equiv b_1 \\ m_2 \equiv b_2}\ \bmod N}{}' (m_1\tau + m_2)^{-2} |m_1\tau + m_2|^{-s}, \tag{5.3}$$

so erhält man nun

$$\tilde{G}_{-2}(s, \tau; v, A, \Gamma) = \eta_N v^{-1}(A) \sum_{\nu=1}^{h} v(R_\nu)\, G_{-2}(s, \tau; A_\nu, N),$$

wo $\eta_1 = \eta_2 = 1$, $\eta_N = 2$ für $N > 2$.

Die Funktionen (5.3) entsprechen den primitiven Eisensteinreihen von der Stufe N in der Terminologie von [1]; dort wird gezeigt, dass diese die sämtlichen Eisensteinreihen der Stufe N linear homogen erzeugen. Sie haben folgende Eigenschaften: Es gilt

$$G_{-2}(s, \tau; B, N) = G_{-2}(s, \tau; C, N) \quad (B, C \in {}_1\Gamma),$$

wenn die Spitzen $B^{-1}\infty$ und $C^{-1}\infty$ einander mod $\Gamma[N]$ kongruent sind, was besagt $C = \varepsilon U^\xi BL$ für $\varepsilon = \pm 1$, $\xi \in \boldsymbol{Z}$, $L \in \Gamma(N)$. Setzt man für eine in $\mathfrak{H}$ bis auf isolierte Stellen erklärte Funktion $f(\tau)$:

$$f(\tau) \mathop{|}_{2,s} S = f \mathop{|}_{2,s} S = f(S\tau)(c\tau + d)^{-2} |c\tau + d|^{-s} \quad (S \in {}_1\mathsf{B},\ \underline{S} = \{c, d\}) \tag{5.4}$$

so erhält man in dieser Symbolik

$$G_{-2}(s, \tau; B, N) \mathop{|}_{2,s} S = G_{-2}(s, \tau; BS, N) \quad (S \in {}_1\Gamma). \tag{5.5}$$

Insbesondere gilt, wenn wieder $A \in {}_1\Gamma$ fest gegeben ist,

$$G_{-2}(s\,,\tau\,;A\,,N)\underset{2,s}{|}LS = G_{-2}(s\,,\tau\,;A\,,N)\underset{2,s}{|}S\;(S\in {}_1\Gamma\,,L\in\Gamma[N])\,;$$

bezeichnet wie oben Γ eine Kongruenzgruppe der Stufe N, v einen beliebigen geraden Kongruenzcharakter der Stufe N auf Γ und ist $\Gamma = \bigcup\limits_{\nu=1}^{\mu} \Gamma[N]Q_\nu$ eine disjunkte Zerlegung, so hängt

$$(5.6)\qquad G_{-2}(s\,,\tau\,;v\,,A\,,\Gamma):=\sum_{\nu=1}^{\mu} v^{-1}(Q_\nu)\,G_{-2}(s\,,\tau\,;A\,,N)\underset{2,s}{|}Q_\nu$$

von der Auswahl des Vertretersystems $\{Q_\nu\}$ nicht ab, und man hat

$$(5.7)\quad \begin{aligned} &G_{-2}(s\,,\tau\,;v\,,\varepsilon U^\xi AL\,,\Gamma)=G_{-2}(s\,,\tau\,;v\,,A\,,\Gamma)(\varepsilon=\pm 1\,,\xi\in \mathbf{Z},L\in\Gamma(N))\\ &G_{-2}(s\,,\tau\,;v\,,A\,,\Gamma)\underset{2,s}{|}S = v(S)\,G_{-2}(s\,,\tau\,;v\,,A\,,\Gamma)\quad(S\in\Gamma)\,.\end{aligned}$$

Ferner ergibt sich bei Benutzung der Normalteiler-Eigenschaft von $\Gamma[N]$ in ${}_1\Gamma$:

$$(5.8)\quad G_{-2}(s\,,\tau\,;v\,,A\,,\Gamma)=v^{-1}(S)\,G_{-2}(s\,,\tau\,;v\,,AS\,,\Gamma)\quad(S\in\Gamma)\,;$$

und für $S\in {}_1\Gamma$ in der Bezeichnung $v'_S(L') = v(L)$ $(L' = S^{-1}LS \in S^{-1}\Gamma S)$:

$$(5.9)\qquad G_{-2}(s\,,\tau\,;v\,,A\,,\Gamma)\underset{2,s}{|}S = G_{-2}(s\,,\tau\,;v'_S\,,AS\,,S^{-1}\Gamma S)\,.$$

Benutzt man die Zerlegung $\Gamma = \bigcup\limits_{\nu=1}^{h}\bigcup\limits_{j=0}^{k-1} \Delta P^{-j}R_\nu^{-1}$ (vgl. (4.2)), so erhält man

$$(5.10)\; G_{-2}(s\,,\tau\,;v\,,A\,,\Gamma)=\begin{cases}0\,, & \text{wenn } v(P)\neq 1\\ k\sum\limits_{\nu=1}^{h} v(R_\nu)\,G_{-2}(s\,,\tau\,;A_\nu\,,N)\,, & \text{wenn } v(P)=1\end{cases};$$

im zweiten Falle unterscheiden sich G_{-2} und $\tilde G_{-2}$ bei gleichen Argumenten um einen konstanten Faktor $\neq 0$. Im folgenden wird nur noch (5.6) G_{-2} betrachtet.

Wesentlich für die weitere Entwicklung ist die von HECKE [1] bewiesene Aussage, dass alle $G_{-2}(s\,,\tau\,;A\,,N)$ als Funktionen von s in die Halbebene $\mathrm{Re}\, s > -1$ holomorph fortsetzbar sind und dass ihre Nullwerte die Darstellung gestatten

(5.11)

$$G_{-2}(0\,,\tau\,;A\,,N) = -\frac{\pi}{N^2 y} + \delta\left(\frac{a_1}{N}\right)\sum_{m_2\equiv a_2 \bmod N}{}' m_2^{-2} + H_{A,N}\left(\exp 2\pi i\,\frac{\tau}{N}\right),$$

wo $H_{A,N}(t)$ eine für $|t| < 1$ konvergente Potenzreihe mit $H_{A,N}(0) = 0$ angibt und $\delta(x) = 1$ für $x \in \boldsymbol{Z}$, $\delta(x) = 0$ sonst.

Von den Funktionen

$$F(\tau\,;A\,,N):=-\frac{N^2}{2\pi i}\,G_{-2}(0\,,\tau\,;A\,,N)-\frac{1}{2iy}\qquad (A\in{}_1\Gamma) \tag{5.12}$$

weist man aufgrund von (5.5) leicht nach, dass sie den Relationen

$$F(\tau\,;A\,,N)\,\|\,S=F(\tau\,;AS\,,N)\qquad (A\,,S\in{}_1\Gamma) \tag{5.13}$$

genügen; hieraus folgt $F(\tau\,;A\,,N)\in\mathfrak{L}_{\Gamma[N]}$. Nach (5.11) wird dabei

$$\operatorname{Res}_{\Gamma[N],S^{-1}\infty}F(*\,;A\,,N)=\frac{N^3}{4\pi^2}\,\delta\left(\frac{a_1d-a_2c}{N}\right)\sum_{m_2\equiv a_2a-a_1b(N)}{}^{'}\;m_2^{-2}\,.$$

Zusammen mit der wohlbekannten Orthogonalität der Eisensteinreihen zur Schar der ganzen Spitzenformen (d.h. hier zu $\mathfrak{C}_1(\Gamma[N])$) ergibt dies nach Satz 5 als erstes Hauptresultat:

$$F(\tau\,;A\,,N)\in\mathfrak{L}^1_{\Gamma[N]}\qquad (A\in{}_1\Gamma) \tag{5.14}$$

Man kann im übrigen durch explizite Rechnung bestätigen, dass die Residuensumme einer solchen Funktion den Wert $\varrho^0_{\Gamma[N]}=\frac{1}{12}\,\mu[N]$ $=\frac{1}{12}\left[{}_1\Gamma:\Gamma[N]\right]$ aufweist, wie es die Theorie nach Satz 1 verlangt.

Eine zweite in [1] bewiesene Aussage besteht in einer linearen Verknüpfung zwischen den Systemen der Funktionen $G_{-2}(s\,,\tau\,;A\,,N)$ und den Funktionen

$$E_{-2}(s\,,\tau\,;A\,,N)=\sum_{M\in\mathfrak{S}(A\Gamma[N])}(m_1\tau+m_2)^{-2}\,|m_1\tau+m_2|^{-s}\,, \tag{5.15}$$

die nach dem Konstruktionsprinzip der Poincaréschen Reihen vom parabolischen Typus gebildet sind; für Grenzkreisgruppen Γ von erster Art und für $A\in{}_1\mathsf{B}$ bezeichnet $\mathfrak{S}(A\Gamma)$ ein volles System von Matrizen M aus $A\Gamma$ mit verschiedenen zweiten Zeilen $\underline{M}=\{m_1\,,m_2\}$. Die Funktionen (5.15) stimmen bis auf einen trivialen Faktor mit den Heckeschen Funktionen G_2^* überein. Die Verknüpfung erfolgt nach dem Schema

$$E_{-2}(s\,,\tau\,;A\,,N)=\sum_{\substack{l\bmod N\\(l,N)=1}}c_l(s)\,G_{-2}(s\,,\tau\,;A_l^*\,,N)\qquad (A\in{}_1\Gamma\,,\operatorname{Re}s>0) \tag{5.16}$$

mit den die Möbiussche Funktion enthaltenden Koeffizienten

$$c_l(s) = \eta_N \sum_{\substack{n=1 \\ ln \equiv 1 \bmod N}}^{\infty} \mu(n)\, n^{-2-s} \qquad \bigl((l\,,N) = 1\bigr)\,,$$

von denen im folgenden die Formel

$$(5.17) \qquad \alpha_N \sum_{\substack{l \bmod N \\ (l,N)=1}} c_l(0) = 1 \quad \text{mit} \quad \alpha_N = \frac{\pi^2}{6}\, \eta_N^{-1} \prod_{q \mid N} (1 - q^{-2})$$

gebraucht wird, in der q die Primteiler $\geqq 2$ von N durchläuft; A_l^* bezeichnet irgendeine Modulmatrix mit der Eigenschaft $\underline{A_l^*} \equiv l\, \underline{A} \bmod N$.

Diese Zusammenhänge führen auf das zweite Hauptresultat: Nach (5.12,16) wird

$$-\frac{N^2}{2\pi i}\, \alpha_N E_{-2}(0\,,\tau\,;A\,,N) - \frac{1}{2iy} = \alpha_N \sum_{\substack{l \bmod N \\ (l,N)=1}} c_l(0)\, F(\tau\,;A_l^*\,,N)\,;$$

die rechte Seite gehört nach (5.14,17) zu $\mathfrak{L}^1_{\Gamma[N]}$. Da diese Funktion in nur einer Spitze ein von Null verschiedenes Residuum besitzt, stimmt sie mit der normierten logarithmischen Ableitung der Primform zu dieser Spitze überein; d.h. es gilt

$$(5.18) \qquad -\frac{N^2}{2\pi i}\, \alpha_N E_{-2}(0\,,\tau\,;A\,,N) = \frac{1}{2iy} + A_0(\tau\,,A^{-1}\infty\,;\Gamma[N])\,.$$

Die Verallgemeinerung dieser Aussagen auf die oben eingeführten Kongruenzklassen $\{\Gamma\,,-2\,,v\}$ hängt wesentlich davon ab, ob v der Hauptcharakter ist oder nicht. Es sei $v \not\equiv 1$. Man bilde die Funktion

$$F(\tau\,;v\,,A\,,\Gamma) = \sum_{\nu=1}^{\mu} v^{-1}(Q_\nu)\, F(\tau\,;AQ_\nu\,,N)\,,$$

die offenbar den Charakter einer Spur hat. Nach (5.6,12) besitzt $G_{-2}(s\,,\tau\,;v\,,A\,,\Gamma)$ einen analytischen Nullwert gemäss

$$(5.19) \qquad -\frac{N^2}{2\pi i}\, G_{-2}(0\,,\tau\,;v\,,A\,,\Gamma) = F(\tau\,;v\,,A\,,\Gamma)\,;$$

dieser stellt ein spezielles Differential dritter Gattung und zwar eine ganze automorphe Form der Klasse $\{\Gamma\,,-2\,,v\}$ dar, die zu den Differentialen erster Gattung dieser Klasse orthogonal ist.

Sei jetzt $v \equiv 1$; wir bilden nach (5.6,12)

$$(5.20) \qquad -\frac{N^2}{2\pi i \mu}\, G_{-2}(0\,,\tau\,;1\,,A\,,\Gamma) = F_1(\tau\,;A\,,\Gamma) + \frac{1}{2iy}\,,$$

wo $F_1(\tau ; A , \Gamma)$ nach (5.13) im Sinne von § 4 als Spur darstellbar ist gemäss

$$F_1(\tau : A , \Gamma) = \frac{1}{\mu} \sum_{\nu=1}^{\mu} F(\tau ; AQ_\nu , N) = \mathrm{Sp}_{\Gamma[N]/\Gamma} F(\tau ; A , N) .$$

Nach § 4 folgt hieraus unmittelbar

$$F_1(\tau ; A , \Gamma) \in \mathfrak{L}_\Gamma^1 . \tag{5.21}$$

Die abschliessende Aussage der Theorie für Kongruenzklassen $\{\Gamma , -2 , v\}$ betrifft die Analoga der Funktionen (5.15); es sind dies die für $v(P) = 1$ zu bildenden Reihen

$$E_{-2}(s , \tau ; v , A , \Gamma) = \sum_{M \in \mathfrak{S}(A\Gamma)} v^{-1}(M)\,(m_1 \tau + m_2)^{-2}\,|m_1 \tau + m_2|^{-s}\,(A \in {}_1\Gamma) .$$

Sie lassen sich nach der oben benutzten Zerlegung durch

$$E_{-2}(s , \tau ; v , A , \Gamma) = v^{-1}(A) \sum_{\nu=1}^{h} v(R_\nu)\, E_{-2}(s , \tau ; A_\nu , N)$$

auf die Reihe (5.15) zurückführen. Nach (5.18) erhält man für $v \not\equiv 1$:

$$-\frac{N^2}{2\pi i}\,\alpha_N E_{-2}(0 , \tau ; v , A , \Gamma) = v^{-1}(A) \sum_{\nu=1}^{h} v(R_\nu)\, A_0(\tau , A_\nu^{-1}\infty ; \Gamma[N]) ;$$

und dies ist wieder eine ganze Normalfunktion der Klasse $\{\Gamma , -2 , v\}$. Für $v \equiv 1$ ergibt sich

$$-\frac{N^2}{2\pi i h}\,\alpha_N E_{-2}(0 , \tau ; 1 , A , \Gamma) = \frac{1}{2iy} + \frac{1}{h} \sum_{\nu=1}^{h} A_0(\tau , A_\nu^{-1}\infty ; \Gamma[N]) ,$$

und dies ist nach (4.12) das genaue Analogon der rechten Seite von (5.18), nämlich

$$\frac{1}{2iy} + A_0(\tau , A^{-1}\infty ; \Gamma) .$$

Im übrigen kann man von den Funktionen $G_{-2}(s , \tau ; v , A , \Gamma)$ zu den Funktionen $E_{-2}(s , \tau ; v , A , \Gamma)$ auch durch eine lineare Verknüpfung vom Typ (5,16) gelangen.

Abschliessend sollen die Ergebnisse dieses § 5 zusammengefasst werden. Zum besseren Verständnis des Hauptresultats wird in die Formulierung ein im wesentlichen bekannter Sachverhalt aufgenommen (2.).

1. Für eine Kongruenzuntergruppe Γ der Modulgruppe ${}_1\Gamma$ lassen sich die Eisensteinschen Reihen einer Kongruenzklasse $\{\Gamma , -2 , v\}$ so definieren, dass die beiden Summationsbuchstaben voneinander unabhängig

und periodisch mit der konstanten Periode N variieren; N bezeichnet eine festgewählte Stufe der Kongruenzklasse (d.h. es gilt $\Gamma[N] \subset \Gamma$ und $v \equiv 1$ auf $\Gamma[N]$). Die damit definierten Eisensteinreihen entsprechen genau den primitiven Eisensteinreihen der Hauptkongruenzgruppen $\Gamma[N]$ (Typus G_2 bei HECKE [1]). Sie stimmen bis auf konstante Faktoren überein mit den unter Verwendung des gegebenen Charakters v gebildeten Spuren von $\Gamma[N]$ bezüglich Γ dieser primitiven Eisensteinreihen G_2 der Stufe N. Die Analogie zu den primitiven G_2 umfasst die Beziehung zu den Spitzen von Γ (d.i. (5.10)) und die hier nicht ausgeführten Sachverhalte zur Basisbestimmung und über den Zusammenhang mit den automorphen Eisensteinreihen; diese sind bei allgemeinen Grenzkreisgruppen Γ den Spitzen von Γ zugeordnet wie die Heckeschen Funktionen G_2^* den Spitzen der $\Gamma[N]$.

2. Wendet man das HECKEsche Summationsverfahren auf die lineare Schar an, die von den Eisensteinreihen einer Kongruenzklasse $\{\Gamma, -2, v\}$ aufgespannt wird, so gewinnt man im Falle $v \not\equiv 1$ lauter analytische Nullwerte, und diese stellen die ganzen Modulformen der Orthogonalschar in $\{\Gamma, -2, v\}$ dar. Im Falle $v \equiv 1$ enthält der Nullwert einen einzigen oder keinen additiven nicht-analytischen Bestandteil. Dieser kann in der Gestalt $C(2iy)^{-1}$ geschrieben werden, wo $y = \operatorname{Im} \tau$ und C konstant ist; der analytische Rest verhält sich in der oberen Halbebene und in den Spitzen holomorph. Die analytischen Nullwerte entsprechen den Nullwerten mit $C = 0$. Sie stellen die ganzen Modulformen der Orthogonalschar in $\{\Gamma, -2, 1\}$ dar. — Das Folgende betrifft weiter den Fall $v \equiv 1$.

3. Ist $C \neq 0$, so hat der genannte analytische Rest die Gestalt $C\Phi(\tau)$, wo $\Phi(\tau)$ in $\mathfrak{L}$ liegt. Aus den zitierten Regularitätseigenschaften von Φ folgt, dass sich Φ von einem linearen Kompositum der normierten logarithmischen Ableitungen der zu den Spitzen gehörigen Primformen um ein (additives) Differential erster Gattung unterscheidet. Als Hauptergebnis im engeren Sinne dieser Theorie ist anzusehen, dass dieses Differential nach den Sätzen von § 3 über die dort untersuchten Skalarprodukte und aufgrund der Orthogonalität der Eisensteinreihen zu den ganzen Spitzenformen identisch verschwindet. Im übrigen ergibt sich dabei sogar die Realität der Koeffizienten, d.h. $\Phi \in \mathfrak{L}^1$. Betrachtet man eine sogenannte automorphe Eisensteinreihe, so ist hier niemals $C = 0$ und die zugeordnete Funktion Φ ist mit der normierten logarithmischen Ableitung der Primform zu derjenigen Spitze von Γ identisch, mit der die gegebene automorphe Eisensteinreihe gebildet ist.

Anm. bei d. Korr.: Es sei betont, dass die zuletzt unter 2. und 3. zitierten Ergebnisse oben nur für Kongruenz-Untergruppen Γ der Modulgruppe ${}_1\Gamma$ bewiesen wurden. Angesichts der Tatsache, dass Herr A. SELBERG in unveröffentlichten Untersuchungen das HECKEsche Summationsverfahren auf die automorphen Eisensteinreihen zu beliebigen Grenzkreisgruppen von erster Art angewendet hat, kann man fragen, ob die Resultate von 2., 3. auch in diesem erweiterten Rahmen zutreffen. Nach eingehender Rücksprache mit Herrn W. ROELCKE, der die Arbeiten von Herrn SELBERG kennt, darf gesagt werden, dass dies sowohl hinsichtlich der möglichen nicht-analytischen Bestandteile der Nullwerte als auch hinsichtlich deren Orthogonalität zu den ganzen Spitzenformen der betr. Klasse zutrifft. Danach und aufgrund der Sätze des obigen § 3 können die 2. und 3. entsprechenden Sachverhalte für allgemeine Grenzkreisgruppen Γ von erster Art, soweit sie parabolische Transformationen enthalten, als gesichert gelten.

Literatur

[1] E. HECKE, Theorie der Eisensteinschen Reihen höherer Stufe und ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg 5 (1927), S. 199.

[2] H. PETERSSON, Über automorphe Orthogonalfunktionen und die Konstruktion der automorphen Formen von positiver reeller Dimension, Math. Annalen 127 (1954), S. 33.

[3] —»— The properties of the representation of the abelian differentials by Poincaré's series, Contributions to function theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1960.

[4] —»— Die Systematik der abelschen Differentiale in der Grenzkreisuniformisierung, Ann. Acad. Scient. Fenn., Ser. A, I. Math., 276.

[5] —»— Über eine Spurbildung bei automorphen Formen, Math. Zeitschrift 96 (1967), S. 296.

[6] —»— Über die logarithmischen Ableitungen der automorphen Formen, Abh. Math. Seminar Univ. Hamburg 31 (1967), S. 191.

II. Math. Institut der Universität
Münster (Westf.), Deutschland

Gedruckt August 1969