ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

431

ÜBER LINEARE RÄUME MIT DER NORM ZWEITER ODER DRITTER ART

VON

YRJÖ KILPI

HELSINKI 1969
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1969.431

Am 5. Mai 1968 vorgelegt von K. INKERI und PENTTI LAASONEN

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1969

Einleitung

Es sei X ein linearer normierter Raum. Man nimmt dann im allgemeinen für die in X definierte Norm an, dass sie die Dreiecksungleichung

$$\|x_1 + x_2\| \leqq \|x_1\| + \|x_2\|$$

für alle Elementenpaare $x_1, x_2 \in X$ erfüllt. Es gibt jedoch zahlreiche Beispiele von linearen Räumen, bei denen analoge Vergleiche mit gewissen anderen linearen Räumen eine besondere Definition der Norm voraussetzen. Dies ist aber nicht möglich, da die so gewonnenen Ausdrücke, die man sonst als Norm des in Frage stehenden Elements beibehalten kann, nicht der Dreiecksungleichung genügen.

Dementsprechend bezweckt die vorliegende Arbeit eine Untersuchung solcher Räume, bei denen jedem ihrer Elemente ein Ausdruck zugeordnet werden kann, der neben der Dreiecksungleichung alle diejenigen übrigen Bedingungen erfüllt, die man an den Ausdruck der Norm stellt. Wir nennen einen solchen Ausdruck einfach die *Norm;* die auf diese Weise definierten Normen unterteilen wir in § 1 in Normen von drei verschiedenen Arten. Unter einer Norm erster Art verstehen wir die gewöhnliche Norm, welche die Dreiecksungleichung erfüllt, während diese von den Normen zweiter oder dritter Art bei Gültigkeit gewisser Bedingungen nicht erfüllt wird. Als wesentlicher Unterschied zwischen den Normen zweiter oder dritter Art ist zu erwähnen, dass die Norm der Projektion eines Elements x des Raumes X mit einer Norm zweiter Art auf einen in besonderer Weise gewählten Unterraum von X kleiner als die Norm des Elements x selbst ist, während im Falle eines Raums X mit einer Norm dritter Art die Norm der entsprechenden Projektion grösser als die Norm des Elements selbst ist.

Die Norm zweiter bzw. dritter Art wird an Hand einer in besonderer Weise erfolgenden Klassifikation der Elemente von X in B-Klassen definiert. Diese Klassifikation wird im ersten Paragraphen näher betrachtet, in welchem wir ferner untersuchen, unter welchen Bedingungen die Norm zweiter bzw. dritter Art hinsichtlich der Addition gleichmässig stetig ist, sowie weiterhin, wo dieser so normierte Raum separabel und wo er vollständig ist. In § 2 betrachten wir den konjugierten (fastkonjugierten) Raum X' des Raums X mit einer Norm zweiter bzw. dritter Art. Besonders zeigen wir im zweiten Paragraphen, dass die Norm des konjugierten (fastkonjugierten) Raums X' dritter bzw. zweiter Art ist, je nachdem die Norm des Raums X selbst zweiter bzw. dritter Art ist. In § 3 untersuchen wir den zweiten konjugierten (fastkonjugierten) Raum X'' von X, definieren die kanonische Transformation von X zu X'' und zeigen, dass diese Transformation isometrisch ist.

Als Beispiel betrachten wir die ganze Zeit hindurch den Raum l^p, wobei $-\infty \leqq p \leqq 1$ und $p \neq 0$ ist. Die Norm des Elements $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_i)$ von l^p definieren wir dann durch den Ausdruck

$$\|x\| = \left(\sum{}' |\xi_i|^p \right)^{1/p}, \qquad -\infty \leqq p \leqq 1, \quad p \neq 0\,.$$

Besonders sei bemerkt, dass — wenn nicht anders erwähnt — unter der Bezeichnung Σ die Summierung von 1 bis ∞ zu verstehen ist. Die Bezeichnung $\Sigma' |\xi_i|^p$ bedeutet, dass nur über diejenigen Indizes $i = 1, 2, \ldots$ summiert werden darf, bei denen $\xi_i \neq 0$ ist. Entsprechend bedeutet z.B. der Ausdruck $\inf' |\xi_i|$ die grösste untere Grenze der von Null verschiedenen Glieder in der Reihe $(|\xi_1|, |\xi_2|, \ldots)$.

§ 1 Die Norm erster, zweiter bzw. dritter Art

1.1. *Einteilung der Elemente des Raums X in B-Klassen*

Definition 1.1-A. *Es sei X ein linearer Raum. Wir sagen, dass X die Eigenschaft A hat, wenn man die Elemente von X folgendermassen in Klassen einteilen kann, die wir B-Klassen nennen:*

1°. *Jedes Element von X gehört zu genau einer B-Klasse.*

2°. *Wenn die Elemente a, b von X zu ein und derselben B-Klasse gehören, so gehören zu dieser auch die Elemente $a + b$ und αa, wobei α eine beliebige positive Zahl bedeutet.*

3°. *Wenn $a \neq 0$ ein Element von X ist, so können die Elemente a und Θa nicht zu ein und derselben B-Klasse gehören. Θ bedeutet hier eine komplexe Zahl mit der Eigenschaft $|\Theta| = 1$, $\Theta \neq 1$.*

4°. *Das Nullelement gehört für sich zu einer eigenen B-Klasse.*

5°. *Die Menge $\{B\}$ der B-Klassen kann man halbgeordnet bekommen, wenn man die folgende Ordnungsrelation einführt. Man sagt, die Klasse $B_1 \in \{B\}$ sei kleiner als die Klasse $B_2 \in \{B\}$ und bezeichnet dies durch $B_1 \leqq B_2$, wenn $B_2 = B_1 + B_2$ gilt, d.h. wenn die Mengen $\{a_2\}$ und $\{a_2' + a_1'\}$ übereinstimmen, wobei a_2, a_2' unabhängig voneinander alle Elemente von B_2 und a_1' alle Elemente von B_1 durchlaufen.*

Die Summe $B_1 + B_2$ nennt man die direkte Summe von B_1 und B_2.

— Diejenige B-Klasse, die nur das Element Null enthält, ist also kleiner als jede der Klassen von $\{B\}$, *und wenn* B_0 *eine solche B-Klasse ist, dass keine andere B-Klasse grösser als diese ist, nennt man sie maximal.*

6°. *Jeder Klasse* B *der Menge* $\{B\}$ *entspricht wenigstens eine maximale Klasse der Menge* $\{B\}$, *die grösser als* B *ist.*

7°. *Es sei* $x_0 \in X$ *gegeben, und es sei* x *ein beliebiges Element einer beliebigen maximalen B-Klasse* $B(x)$. *Dann kann man das Element* x_0 *im Sinne der nachstehenden Definition 1.1-C in der Form einer Linearkombination der Projektionen des Elements* x *auf solchen B-Klassen darstellen, die kleiner als* $B(x)$ *sind.*

8°. *Jeder Unterraum, der von den Elementen einer beliebigen Klasse der Menge* $\{B\}$ *aufgespannt wird, hat die Eigenschaften* 1°—7°.

9°. *Es sei* B_a *eine beliebige Klasse von* $\{B\}$ *und* x_a *ein Element von* B_a *sowie* B_b *eine B-Klasse, die kleiner als* B_a *ist. Dann gibt es ein solches Element* x_b *von* B_b, *mit dem* $x_a - x_b$ *zu einer Klasse* B_c *gehört, die kleiner als* B_a *ist, so dass* $B_a = B_b + B_c$. *Die Klassen* B_c *und* B_b *haben weiterhin die besondere Eigenschaft, dass sie keine gemeinsamen Elemente besitzen, und zwar so, dass die linearen Mannigfaltigkeiten, die von den Elementen von* B_b *oder von* B_c *aufgespannt werden, ausser dem Nullelement keine gemeinsamen Elemente haben. Die Elemente* $x_b, x_a - x_b$ *nennt man dann entsprechend die Projektionen von* x_a *in den Klassen* B_b *und* B_c, *und die Klassen* B_b *und* B_c *nennt man die Komplementklassen der Klassen* B_c *und* B_b *im Verhältnis zur Klasse* B_a; *diese Komplementklassen werden entsprechend mit* $B_b = B_a \sim B_c$ *und* $B_c = B_a \sim B_b$ *bezeichnet. — Insbesondere verschwindet jede Projektion eines solchen Elements* $x \in X$, *dessen B-Klasse* $B(x)$ *sei, auf einer solchen Komplementklasse der Klasse* $B(x)$ *im Verhältnis zu jeder B-Klasse, die grösser als* $B(x)$ *ist. Weiterhin kann, wenn* x_b *die Projektion von* x_a *in der Klasse* B_b *bedeutet, das Element* Θx_b, *wobei* $|\Theta| = 1$, $\Theta \neq 1$, *nicht zu einer solchen B-Klasse gehören, die kleiner als* B_a *ist.*

10°. *Es habe* B_a *die gleiche Bedeutung wie in* 9°, *und es seien* x_1, x_2 *zwei beliebige Elemente von* B_a. *Dann kann man immer die Differenz der Elemente* x_1 *und* x_2 *in der Form*

$$x_1 - x_2 = x_- + x_+$$

darstellen, wobei x_- *und* x_+ *die Eigenschaft haben, dass die Elemente* $-x_-$ *und* x_+ *zu zwei solchen B-Klassen gehören, die keine gemeinsamen Elemente enthalten und die beide kleiner als* B_a *sind oder von denen höchstens die eine gleich gross wie* B_a *sein kann. In diesem Falle enthält die zweite Klasse nur das Nullelement. Ebenso ist die direkte Summe* $B_- + B_+$ *kleiner als* B_a *oder höchstens gleich gross wie* B_a.

Definition 1.1-B. *Es sei* $\{B_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, *wobei* Λ *eine Indexmenge bedeutet, eine Menge von B-Klassen, und zwar so, dass keine von diesen das Nullelement enthält. Man sagt, dass die Menge* $\{B_\lambda\}$ *die Eigenschaft* C *im Verhältnis zur Klasse* $B(x)$ *hat, falls die direkte Summe der Glieder von* $\{B_\lambda\}$ *gleich* $B(x)$ *ist und falls* $B_\lambda \leqq B(x)$ *bei jedem* $\lambda \in \Lambda$ *sowie falls jedes* B_λ $(\lambda \in \Lambda)$ *die Komplementmenge der direkten Summe aller anderen Glieder der Menge* $\{B_\lambda\}$ *im Verhältnis zur Klasse* $B(x)$ *ist.*

Definition 1.1-C. *Es sei* x *ein beliebiges Element einer beliebigen maximalen B-Klasse* $B(x)$ *und es sei* $\{B_\lambda\}$ *eine Menge von B-Klassen, die die Eigenschaft* C *im Verhältnis zur Klasse* $B(x)$ *hat. Es sei weiterhin* x_λ *die Projektion von* x *auf der Klasse* B_λ $(\lambda \in \Lambda)$. *Wir bezeichnen mit* X_λ *die von den Elementen* $\{x_\lambda\,;\, \lambda \in \Lambda\}$ *aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit. Es sei nun* $\{B_{\lambda\mu}\,;\, \mu \in M_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, *wobei* M_λ *eine Indexmenge bedeutet, eine solche Menge von B-Klassen, in der jede Teilmenge* $\{B_{\lambda\mu}\,;\, \mu \in M_\lambda\}$ *bei jedem* $\lambda \in \Lambda$ *die Eigenschaft* C *im Verhältnis zur Klasse* B_λ *hat.*

Wir bezeichnen mit $x_{\lambda\mu}$ *die Projektion von* x_λ *auf der Klasse* $B_{\lambda\mu}$ *und mit* $X_{\lambda\mu}$ *die von den Elementen* $\{x_{\lambda\mu}\}$ *aufgespannte lineare Mannigfaltigkeit, wobei* λ *bzw.* μ *entsprechend die Indexe der Menge* Λ *bzw.* M_λ *durchlaufen. Offenbar gilt* $X_\lambda \subset X_{\lambda\mu}$ *bei jedem* $\lambda \in \Lambda$ *und bei jedem* $\mu \in M_\lambda$. *Wenn man so fortsetzt, erhält man eine Reihe von linearen Räumen* $X_\lambda \subset X_{\lambda\mu} \subset X_{\lambda\mu\nu} \subset \ldots$.

Falls die kleinste obere Grenze der so erhaltenen vollständig geordneten Menge von linearen Räumen mit X *übereinstimmt, sagt man, dass die Projektionen von* x *auf solchen B-Klassen, die kleiner als* $B(x)$ *sind, den ganzen Raum* X *aufspannen. Analogerweise sagt man dann auch, dass jedes Element* $x_0 \in X$ *in der Form einer Linearkombination der Projektionen von* x *auf solchen B-Klassen darstellbar ist, die gleich der Klasse* $B(x)$ *oder kleiner als diese sind.*

Wir betrachten nun eine beliebige B-Klasse B_0 des Raums X. Falls B_0 nicht die kleinste B-Klasse ist und also nicht nur das Nullelement enthält, kann man die B-Klassen, die kleiner als B_0 sind, folgendermassen konstruieren. Es sei $\{B_\lambda\}$ eine Menge von solchen B-Klassen, die kleiner als B_0 sind, und sie habe im Verhältnis zu B_0 die Eigenschaft C. Wir bezeichnen mit Λ die von den Indexen $\{\lambda\}$ gebildete Menge und wählen aus jeder Klasse B_λ $(\lambda \in \Lambda)$ ein Element a_λ. Die Menge der Elemente von der Form

$$\sum_\lambda \alpha_\lambda a_\lambda\,, \quad \alpha_\lambda \geqq 0\,, \tag{1.1.-1}$$

wobei λ alle Indexe der Menge Λ durchläuft, enthält dann alle Elemente der Klasse B_ι und alle Elemente jeder B-Klasse, die kleiner als B_0 ist.

Falls $\alpha_\lambda > 0$ bei jedem $\lambda \in \Lambda$ gilt, gehören die Elemente der Form (1.1-1) zur Klasse B_0. Wenn $\alpha_\lambda = 0$ bei jedem $\lambda \in \Lambda$, stellt (1.1-1) nur das Nullelement, also die kleinste B-Klasse dar. Wenn wir die Mengen $\{B_\lambda\}$ auf alle möglichen Weisen wählen, erhalten wir schliesslich alle die möglichen B-Klassen, die kleiner als B_0 sind.

1.2. *Die Norm.* Wir führen jetzt folgende Definitionen ein:

Definition 1.2-A. *Einen linearen Raum X, in dem die Norm definiert ist, nennt man einen normierten linearen Raum erster Art, wenn die in X definierte Norm folgende Eigenschaften hat:*

(a) $\|x_1 + x_2\| \leqq \|x_1\| + \|x_2\|$ *bei jedem Paar* x_1, x_2 *von* X ,

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, *wobei* α *einen beliebigen Skalar bedeutet,*

(c) $\|x\| \geqq 0$,

(d) $\|x\| \neq 0$, *falls* $x \neq 0$,

wobei x *ein beliebiges Element von* X *bedeutet.*

Definition 1.2-B. *Einen linearen Raum X, der die in der Definition* 1.1-A *erwähnte Eigenschaft A hat, nennt man einen linearen normierten Raum zweiter Art, wenn für jedes Element $x \in X$ eine reellwertige nicht-negative Funktion $\|x\|$ bestimmt werden kann, die folgende Eigenschaften hat:*

(a) *Es gibt eine solche Klasseneinteilung $\{B\}$ der Elemente des Raums X, die die Bedingungen der Definition* 1.1-A *erfüllt, und zwar so, dass die Ungleichung*

$$\|x_1 + x_2\| \geqq \|x_1\| + \|x_2\|$$

gilt, wobei x_1 und x_2 beliebige Elemente von X bedeuten, die zu ein und derselben B-Klasse der Menge $\{B\}$ gehören.

(b) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, *wobei α ein beliebiger Skalar und x ein beliebiges Element von X bedeutet.*

(c) $\|x\| \geqq 0$.

(d2) $\|x\| \neq 0$ *dann und nur dann, wenn* $x \neq 0$.

(e2) *Es sei $x \in X$ beliebig, und es sei $B(x)$ die das Element x enthaltende B-Klasse, die zu der in* (a) *erwähnten Menge $\{B\}$ gehört. Es sei weiterhin B_1 eine B-Klasse, die kleiner als $B(x)$ ist. Wenn hierbei x_1 die Projektion von x auf der Klasse B_1 ist, so gilt*

$$\|x\| \geqq \|x_1\| .$$

Es sei weiterhin $x_{\sim 1}$ die Projektion von x auf der Komplementklasse $B(x) \sim B_1$ von B_1 im Verhältnis zu $B(x)$. Wenn wir nun in dem

Ausdruck $x_1 + \Theta x_{\sim 1}$ *den positivwertigen Faktor* Θ *von* 1 *gegen* ∞ *bzw. von* 1 *gegen* 0 *streben lassen, so gilt*

$$\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\| \to \infty \quad bzw. \quad \|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\| \to \|x_1\| .$$

Definition 1.2-C. *Einen linearen Raum* X, *der die in der Definition* 1.1-A *erwähnte Eigenschaft* A *hat, nennt man einen linearen normierten Raum dritter Art, wenn man für jedes Element* x *von* X *eine reellwertige nichtnegative Funktion* $\|x\|$ *bestimmen kann, die folgende Eigenschaften besitzt:*

Die Bedingungen (a), (b) *und* (c) *der Definition* 1.2-B *sind gültig. Ausserdem sind folgende Bedingungen erfüllt:*

(d3) *Die Norm des Nullelements verschwindet. Es sei nun* $x \in X$ *ein Element, dessen Norm verschwindet. Ein solches Element* x *ist genau dann von Null verschieden, wenn es wenigstens eine solche B-Klasse* B_1 *gibt, die kleiner als die von* x *ist, und zwar so, dass die Norm der Projektion von* x *auf* B_1 *von Null verschieden ist.*

(e3) *Es sei* $x \in X$ *beliebig, und es sei* $B(x)$ *die B-Klasse von* x. *Wenn* $x \neq 0$, *so sei dann* B_1 *eine B-Klasse, die kleiner als* $B(x)$ *ist, jedoch so, dass* B_1 *nicht mit der kleinsten, nur das Nullelement enthaltenden B-Klasse übereinstimmt. Falls dann* x_1 *die Projektion von* x *auf der Klasse* B_1 *bedeutet, so gilt*

$$\|x\| \leqq \|x_1\| .$$

Es sei weiterhin $x_{\sim 1}$ *die Projektion von* x *auf der Komplementklasse* $B(x) \sim B_1$ *von* B_1 *im Verhältnis zu* $B(x)$. *Wenn wir nun in dem Ausdruck* $x_1 + \Theta x_{\sim 1}$ *den positivwertigen Faktor* Θ *von* 1 *gegen* ∞ *bzw. von* 1 *gegen* 0 *streben lassen, so gilt*

$$\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\| \to \|x_1\| \quad bzw. \quad \|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\| \to 0 .$$

Falls das Gleichheitszeichen in der obigen Ungleichung nur dann gilt, wenn die Klassen B_1 *und* $B(x)$ *übereinstimmen, sagt man, dass die Norm* $\|x\|$ *die spezielle Bedingung* (e3α) *erfüllt.*

Die Funktion $\|x\|$ in den beiden Definitionen 1.2-B und 1.2-C nennen wir die *Norm* des Elements x im Raum X.

Falls die Norm des linearen Raums X die Bedingung einer der Definitionen 1.2-A, 1.2-B oder 1.2-C erfüllt, so nennen wir sie entsprechend *eine Norm erster, zweiter bzw. dritter Art.*

1.3. *Stetigkeit der Addition im linearen Raum mit einer Norm zweiter oder dritter Art.*

Definition 1.3-A. *Man sagt, dass die Norm* $\|x\|$ *des Elements* x *des linearen normierten Raums* X *nach der Addition stetig ist, wenn für jede Zahl* $\varepsilon > 0$ *solche positiven Zahlen* δ_1 *und* δ_2 *existieren, dass* $\|x_1+x_2\| \leqq \varepsilon$, *wenn* $\|x_1\| \leqq \delta_1$ *und* $\|x_2\| \leqq \delta_2$; x_1, x_2 *bedeuten hier im übrigen beliebige Elemente von* X. *Falls die Zahlen* δ_1, δ_2 *nur von* ε, *nicht aber von den Elementen* x_1, x_2 *selbst abhängen, sagen wir, dass die Norm des Raums* X *nach der Addition gleichmässig stetig ist.*

Falls die Norm des Raums X erster Art ist, ist sie, wie bekannt, nach der Addition gleichmässig stetig. Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz 1.3-A. *Es sei* X *ein linearer Raum mit einer Norm zweiter Art. Die Norm in* X *ist dann und nur dann nach der Addition gleichmässig stetig, wenn eine solche positive Zahl* k *existiert, dass*

$$\|x_1 + x_2\| \leqq k\,[\|x_1\| + \|x_2\|]\,. \tag{1.3-1}$$

Beweis. Falls das eine der Elemente x_1, x_2 mit dem Nullelement übereinstimmt, ist die Behauptung selbstverständlich. Nehmen wir daher an, dass gleichzeitig $x_1 \neq 0$ und $x_2 \neq 0$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass die Norm in X nach der Addition gleichmässig stetig ist. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existieren solche nur von ε abhängigen Konstanten $\delta_1, \delta_2 > 0$, dass $\|x_1 + x_2\| \leqq \varepsilon$, falls die Bedingungen

$$\|x_1\| \leqq \delta_1 \quad \text{und} \quad \|x_2\| \leqq \delta_2 \tag{1.3-2}$$

gleichzeitig erfüllt sind.

Falls die Elemente x_1, x_2 ursprünglich nicht die Eigenschaften (1.3-2) haben, kann man sie der Normbedingung (b) gemäss immer mit einer Konstanten $r \neq 0$ multiplizieren, so dass die beiden Bedingungen (1.3-2) gleichzeitig gelten. Wir wählen die Zahl r besonders so, dass wenigstens in einer der Bedingungen (1.3-2) das Gleichheitszeichen gilt, d.h. wir wählen $r = \min\,(\delta_1/\|x_1\|, \delta_2/\|x_2\|)$. Die so erhaltenen Elemente rx_1, rx_2 bezeichnen wir mit x_1 bzw. x_2. Wir haben dann

$$\|x_1 + x_2\| \leqq \varepsilon \leqq k\,[\|x_1\| + \|x_2\|]\,,$$

wenn wir $k = \max(\varepsilon/\delta_1, \varepsilon/\delta_2)$ wählen.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass es eine derartige Zahl $k > 0$ gibt, mit der die Bedingung (1.3-1) erfüllt ist. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir multiplizieren die Elemente x_1, x_2 mit einer solchen Zahl r, dass gleichzeitig $\|rx_1\| \leqq \varepsilon/2k$ und $\|rx_2\| \leqq \varepsilon/2k$. Wir setzen $\delta = \varepsilon/2k$ und bezeichnen die Elemente rx_1 und rx_2 mit x_1 bzw. x_2. Wir erhalten dann

$$\|x_1 + x_2\| \leqq k\,[\|x_1\| + \|x_2\|] \leqq \varepsilon\,,$$

wenn $\|x_1\| < \delta = \varepsilon/2k$ und $\|x_2\| < \delta = \varepsilon/2k$, woraus gleichmässige Stetigkeit der Norm $\|x\|$ folgt. Unser Satz ist damit bewiesen.

1.4. *Der Abstand zwischen einem einzelnen Element und der Menge.* Wir definieren jetzt:

Definition 1.4-A. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Norm zweiter oder dritter Art, und es sei S eine Menge der Elemente von X. Unter der Entfernung $d(x_0, S)$ des Elements $x_0 \in X, x_0 \notin S$ von der Menge S versteht man dann den Ausdruck*

$$(1.4\text{-}1) \qquad d(x_0, S) = \inf_{x \in S} \|x_0 - x\| \quad \textit{oder} \quad d(x_0, S) = \sup_{x \in S} \|x_0 - x\|$$

je nachdem ob die Norm im Raum X zweiter oder dritter Art ist.

1.5. *Separabilität.*

Definition 1.5-A. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Norm zweiter Art. Man bezeichnet die Menge F der Elemente von X als überall dicht in X, wenn es für jedes Element x von X immer ein solches Element x_1 von X gibt, dass, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben ist,*

$$\|x_1 - x\| < \varepsilon .$$

Definition 1.5-B. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Norm dritter Art. Die Menge F der Elemente von X bezeichnet man als überall dicht in X, wenn es für jedes Element x von X immer ein solches Element x_1 von F gibt, dass, wenn $\varepsilon > 0$ gegeben ist,*

$$\sup_{B_\alpha \leqq B(x - x_1)} \|(x - x_1)(B_\alpha)\| < \varepsilon$$

gilt, wobei B_α alle diejenigen B-Klassen durchläuft, die kleiner als die das Element $x - x_1$ enthaltende Klasse $B(x - x_1)$ sind; $(x - x_1)(B_\alpha)$ bedeutet hier die Projektion des Elements $x - x_1$ auf der Klasse B_α.

Falls die Norm des linearen Raums X erster oder zweiter Art ist, definieren wir die Cauchysche Reihe wie üblich z.B. wie im Banachschen Raum. Wenn dagegen X ein linearer Raum mit einer Norm dritter Art ist, stellen wir die folgende Definition auf:

Definition 1.5-C. *Es sei X ein linearer normierter Raum mit einer Norm dritter Art. Wir sagen, dass die zu ein und derselben B-Klasse B_0 gehörenden Elemente $x_1, x_2, \ldots$ von X im Sinne von Cauchy konvergieren, wenn es für jedes $\varepsilon > 0$ eine solche Zahl $N > 0$ gibt, dass*

$$\sup_{B_\alpha \leqq B_0} \|x_n(B_\alpha) - x_m(B_\alpha)\| < \varepsilon \,, \; wenn \;\; m, n > N \,,$$

wobei B_α *alle diejenigen B-Klassen durchläuft, die kleiner als* B_0 *sind, und wobei* $x_n(B_\alpha)$ *und* $x_m(B_\alpha)$ *die Projektionen der Elemente* x_n *bzw.* x_m *auf der Klasse* B_α *bedeuten.*

1.6. *Der Raum* l^p. *Die rückläufige Höldersche Ungleichung.* Es sei p eine beliebige von Null verschiedene Zahl. Betrachten wir z.B. den Raum l^p, der von denjenigen Elementen $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_n)$ gebildet wird, für welche $\Sigma|\xi_n|^p < \infty$, falls $0 < p \leqq \infty$; wenn $p < 0$ ist, stellen wir keine Konvergenzeinschränkungen auf, doch nehmen wir an, dass es bei jedem Element $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots) \in l^p$ eine derartige endliche Zahl $M = M(x)$ mit der Eigenschaft $\sup |\xi_i| \leqq M(x)$ gibt. Die Bezeichnung $\Sigma'|\xi_n|$ besagt hier wie auch in der gesamten nachfolgenden Darstellung, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, dass von 1 bis ∞ nur über diejenigen Indexe $n = 1, 2, \ldots$ zu summieren ist, für welche $\xi_n \neq 0$ ist. Die Norm $\|x\|$ des Elements x in l^p definieren wir dann durch die Gleichung

$$\|x\| = \left(\sum{}' |\xi_n|^p \right)^{1/p} . \tag{1.6-1}$$

Wenn $p \geqq 1$ ist, stellt (1.6-1), wie bekannt, eine Norm erster Art dar, und der Raum l^p selbst ist ein Banach-Raum. Wir werden jetzt zeigen, dass im Falle $0 < p \leqq 1$ (1.6-1) eine Norm zweiter Art und bei $p < 0$ eine Norm dritter Art darstellt. Zu diesem Zweck zeigen wir die Gültigkeit einer Ungleichung, die wir die *rückläufige Höldersche Ungleichung* (vgl. z.B. BECKENBACH [1]) nennen wollen und die die Form

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i b_i| \geqq \left(\sum{}' |a_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum{}' |b_i|^{p'} \right)^{1/p'} \tag{1.6-2}$$

hat, wobei $p \leqq 1, p \neq 0$ und $p' = p/p-1$ ist und ferner a_i und b_i bei gleichem i gleichzeitig verschwinden oder von Null verschieden sind.

Es seien jetzt $\alpha, \beta \geqq 0$ und entweder $\lambda < 0$ oder $\lambda > 1$. Wir wollen jetzt die Funktion

$$\Phi(t) = 1 - \lambda + \lambda t - t^\lambda$$

betrachten, wobei t reell und nichtnegativ ist. Dann gilt

$$\Phi'(t) = \lambda(1 - t^{\lambda - 1}) \,.$$

Wenn $\lambda < 0$ oder $\lambda > 1$ ist, so gilt $\Phi'(t) > 0$ im Falle $t < 1$ und $\Phi'(t) < 0$ im Falle $t > 1$; $\Phi(1) = 0$. Wir haben also $\Phi(t) \leqq \Phi(1) = 0$ bei jedem positiven Wert von t. In die so erhaltene Ungleichung $1 - \lambda + \lambda t \leqq t^\lambda$ setzen wir jetzt $t = \alpha/\beta$ ein. Falls $\beta > 0$, erhalten wir dann

$$\alpha^\lambda \beta^{1-\lambda} \geqq \lambda\alpha + (1 - \lambda)\beta \,, \quad \text{wenn} \left| \lambda - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{2} \,, \tag{1.6-3}$$

wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn $\alpha = \beta$ ist, was besagt, dass $t = 1$ ist. Falls $\beta = 0$ ist, ist die obige Ungleichung offensichtlich.

Es seien (a_i) und (b_i) zwei derartige Reihen von nichtnegativen Zahlen, dass bei gleichem Wert des Indexes i die Zahlen a_i, b_i gleichzeitig verschwinden oder von Null verschieden sind und dass wenigstens bei einem Wert von i die Ungleichung $a_i b_i > 0$ gilt. Wir bezeichnen $A_n = \sum_{i=1}^{n}{}' a_i$ und $B_n = \sum_{i=1}^{n}{}' b_i$. Dann gibt es eine solche positive Zahl n_0, bei der, wenn wir $n > n_0$ wählen, $A_n > 0$ und $B_n > 0$ gilt. Gemäss (1.6-3) haben wir dann

(1.6-4)

$$\sum_{i=1}^{n}{}'(a_i/A_n)^{\lambda}(b_i/B_n)^{1-\lambda} \geqq \frac{\lambda}{A_n}\sum_{i=1}^{n}{}' a_i + \frac{1-\lambda}{B_n}\sum_{i=1}^{n}{}' b_i = 1, \text{ wobei } \left|\lambda - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2}\,.$$

Durch Multiplikation der beiden Seiten mit dem Ausdruck $A_n^{\lambda} B_n^{\lambda-1}$ erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n}{}' a_i{}^{\lambda} b_i^{1-\lambda} \geqq A_n^{\lambda} B_n^{1-\lambda} = \Big(\sum_{i=1}^{n}{}' a_i\Big)^{\lambda}\Big(\sum_{i=1}^{n}{}' b_i\Big)^{1-\lambda}.$$

Wenn wir jetzt die Zahlen a_i^{λ} und $b^{1-\lambda}$ mit a_i bzw. b_i bezeichnen und $1/p = \lambda$ sowie $1/p' = 1 - \lambda$ setzen, erhält die obige Ungleichung die Form

$$\sum_{i=1}^{n}{}' |a_i b_i| \geqq \Big(\sum_{i=1}^{n}{}' |a_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{i=1}^{n}{}' |b_i|^{p'}\Big)^{1/p'}.$$

Da die obige Ungleichung bei jedem $n > n_0$ gilt, haben wir an der Grenze

$$\sum{}' |a_i b_i| \geqq \Big(\sum{}' |a_i|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum{}' |b|^{p'}\Big)^{1/p'}.$$

Die zuletzt erhaltene Ungleichung ist offenbar auch dann gültig, wenn die Zahlen a_i und b_i komplexe Werte erreichen können, solange aus $|a_i b_i| = 0$ die Bedingung $a_i = b_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ folgt. Die rückläufige Höldersche Ungleichung ist damit bewiesen.

Da das Gleichheitszeichen in (1.6-3) nur dann gilt, wenn $\alpha = \beta$ ist, ist das Gleichheitszeichen in (1.6-4) und daher auch in (1.6-2) nur dann gültig, wenn das Verhältnis a_i/b_i bei jedem solchen Wert von i konstant bleibt, für den $a_i b_i \neq 0$ ist.

1.7. *Die rückläufige Minkowskische Ungleichung.* Wir teilen jetzt die Elemente von l^p folgendermassen in B-Klassen ein. Die Elemente $a = (a_i)$ und $b = (b_i)$ gehören zu ein und derselben B-Klasse genau dann, wenn bei jedem Wert von $i = 1, 2, \ldots$ die Bedingung $a_i \bar{b}_i \geqq 0$ gilt und wenn ausserdem aus der Bedingung $a_i b_i = 0$ die Gleichung $a_i = b_i = 0$ folgt. Man sagt, dass das Element (a_i) zu einer kleineren B-Klasse als (b_i) gehört, wenn aus $a_i b_i = 0$ die Gleichung $a_i = 0$ folgt.

Eine solche Klassifikation der Elemente von l^p hat offenbar die in der Definition 1.1-A erwähnte Eigenschaft A, wenn man unter der Projektion des Elements $a = (a_i)$ auf einer B-Klasse B_1, die kleiner als die das Element a enthaltende B-Klasse ist, dasjenige Element versteht, welches aus dem Element a hervorgeht, wenn man in a alle diejenigen von Null verschiedenen Komponenten gleich Null setzt, die in den Elementen der Klasse B_1 verschwinden. Wir werden jetzt zeigen, dass, wenn $-\infty < p \leqq 1$, $p \neq 0$ ist, und dass, wenn x_1, x_2 zu ein und derselben B-Klasse gehören, sie die in den Definitionen 1.2-B und 1.2-C erwähnte Bedingung

$$\text{(a)} \qquad \|x_1 + x_2\| \geqq \|x_1\| + \|x_2\|$$

erfüllen, wobei das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn x_1, x_2 untereinander linear abhängig sind oder wenn $p = 1$ ist.

Nehmen wir zuerst an, dass $-\infty < p < 1$, $p \neq 0$ ist, und es seien $x_1 = (a_i)$ und $x_2 = (b_i)$ zwei zu ein und derselben B-Klasse gehörende Elemente von l^p. Wir haben also

$$\sum{}' |a_i|^p < \infty \text{ und } \sum{}' |b_i|^p < \infty \text{ , falls } 0 < p < 1 \, .$$

Da x_1 und x_2 zu ein und derselben B-Klasse gehören, können wir setzen

$$\sum_1^n{}' |a_i + b_i|^p = \sum_i^n{}' |a_i + b_i| \; |a_i + b_i|^{p-1} ,$$

wobei n eine endliche Zahl bedeutet. Hieraus und aus der rückläufigen Hölderschen Ungleichung (1.6-2) erhalten wir dann

$$\sum_1^n{}' |a_i + b_i| \; |a_i + b_i|^{p-1} = \sum_1^n{}' |a_i| \; |a_i + b_i|^{p-1} + \sum_1^n{}' |b_i| \; |a_i + b_i|^{p-1} \geqq$$

$$\geqq \Big(\sum_1^n{}' |a_i|\Big)^{1/p} \Big(\sum_1^n{}' |a_i + b_i|^{q(p-1)}\Big)^{1/q} + \Big(\sum_1^n{}' |b_i|^p\Big)^{1/p} \Big(\sum_1^n{}' |a_i + b_i|^{(p-1)q}\Big)^{1/q} ,$$

wobei $1/p + 1/q = 1$ ist. Wie am Schluss von 1.6 gesagt worden ist, gilt das Gleichheitszeichen nur dann, wenn die n-dimensionalen Vektoren $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ linear abhängig sind. Da $q(p-1) = p$ ist, erhalten wir weiterhin durch Dividieren mit dem Ausdruck $\Big(\sum_1^n{}' |a_i + b_i|^p\Big)^{1/q}$

$$\Big(\sum_1^n{}' |a_i + b_i|^p\Big)^{1/p} \geqq \Big(\sum_1^n{}' |a_i|^p\Big)^{1/p} + \Big(\sum_1^n{}' |b_i|^p\Big)^{1/p} .$$

Dies gilt bei jedem ganzen positiven n, woraus folgt

$$(1.7\text{-}1) \qquad \left(\sum' |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \geqq \left(\sum' |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum' (b_i|^p \right)^{1/p} ,$$

wobei das Gleichheitszeichen auf Grund des Vorhergesagten nur dann gilt, wenn die Elemente $a = (a_i)$ und $b = (b_i)$ linear abhängig sind.

Falls $p = 1$ ist und falls $a = (a_i)$ und $b = (b_i)$ zu ein und derselben B-Klasse gehören, gilt bei jedem Wert von $i = 1, 2, \ldots$ die Gleichung $|a_i + b_i| = |a_i| + |b_i|$. Die Ungleichung (1.7-1) und damit auch die Bedingung (a) ist im Falle $p = 1$ offenbar, und in diesem Falle ist nur das Gleichheitszeichen gültig. Falls $p = -\infty$, definieren wir die Norm des Elements $a = (a_i)$ im Raum $l^{-\infty}$ durch den Ausdruck

$$||a|| = \inf{}' |a_i| ,$$

wobei $\inf{}' |a_i|$, wie schon in der Einleitung erwähnt wurde, die grösste untere Grenze derjenigen Zahlen $|a_i|$ bedeutet, die von Null verschieden sind. Daraus folgt

$$||a + b|| = \inf{}' |a_i + b_i| \geqq \inf{}' |a_i| + \inf{}' |b_i| = ||a|| + ||b||$$

und die Bedingung (a) ist also dann gültig, wenn $-\infty \leqq p \leqq 1$, $p \neq 0$ ist. Die Ungleichung (1.7-1) nennen wir im folgenden *die rückläufige Minkowskische Ungleichung* (vgl. z.B. BECKENBACH [1]).

1.8. *Stetigkeit der Addition in l^p.* Wir haben zuvor gezeigt, dass im Falle $p \leqq 1$, $p \neq 0$ der Raum l^p die Normbedingung (a) der Definition 1.2-B erfüllt. Die Normbedingungen (b) und (c) der Definition 1.2-B sind trivialerweise erfüllt; ebenso gelten die Normbedingungen (d2) und (e2) oder (d3) und (e3) der Definitionen 1.2-B oder 1.2-C, je nachdem ob $0 < p \leqq 1$ oder $p < 0$ zutrifft. Da also die Bedingungen der Definitionen 1.2-B oder 1.2-C erfüllt sind, ist die Norm des Raums l^p zweiter oder dritter Art, je nachdem ob $0 < p \leqq 1$ oder $p < 0$ gilt.

Wir zeigen nun, dass, wenn $0 < p \leqq 1$ ist, die Norm in l^p nach der Addition stetig und sogar gleichmässig stetig ist. Es sei also $\varepsilon > 0$ gegeben, und es seien $x_1 = (a_i)$ und $x_2 = (b_i)$ zwei beliebige Elemente von l^p. Wir haben dann

$$(1.8\text{-}1) \qquad \begin{aligned} ||x_1 + x_2|| &= \left(\sum |a_i + b_i|^p \right)^{1/p} \leqq \left(2^p \sum \max(|a_i|^p, |b_i|^p) \right)^{1/p} \leqq \\ &\leqq 2 \left(\sum \max(|a_i|^p, |b_i|^p \right)^{1/p} \leqq 2^{1+1/p} \left(\left(\sum |a_i|^p \right)^{1/p} + \left(\sum |b_i|^p \right)^{1/p} \right) = \\ &= 2^{1+1/p} \left(||x_1|| + ||x_2|| \right) . \end{aligned}$$

Gemäss dem Satze 1.3-A ist daher die Addition in l^p gleichmässig stetig, wenn $0 < p \leqq 1$ ist, w.z.b.w.

Aus der obigen Ungleichung kann man ohne Schwierigkeiten schliessen, dass der Raum l^p linear ist, wenn $0 < p \leqq 1$ ist. Falls $p < 0$ ist, folgt die Linearität von l^p unmittelbar aus dem zu Beginn von Nr. 1.6 Gesagten.

1.9. *Separabilität des Raumes* l^p. Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die Separabilität von l^p zu untersuchen, und beweisen demgemäss folgenden

Satz 1.9-A. *Der Raum l^p ist separabel, wenn $0 < p \leqq 1$ ist, und nichtseparabel, wenn $p < 0$ ist.*

Beweis. Es sei zuerst $0 < p \leqq 1$. Die Menge der endlichen rationalen Zahlen ist offenbar abzählbar. Sie ist auch überall dicht in l^p. Es sei nämlich $\varepsilon > 0$ und $x = (\xi_i) \in l^p$ gegeben. Wir wählen die Zahl $N > 0$ so, dass $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n|^p < \dfrac{\varepsilon^p}{2}$ gilt. Danach wählen wir den Punkt $y = (\eta_n) \in l^p$ so, dass die Zahlen η_n $(n = 1, 2, \ldots)$ rational sind, und zwar derart, dass $\eta_n = 0$ ist, wenn $n > N$ und $|\xi_k - \eta_k| < (2N)^{-1/p}\varepsilon$, mit $k = 1, 2, \ldots, N$, gleichzeitig gelten. Dann ist

$$\|x - y\|^p = \sum_{n=1}^{N} |\xi_n - \eta_n|^p + \sum_{n=N+1}^{\infty} |\xi_n|^p < N\,\frac{\varepsilon^p}{2N} + \frac{\varepsilon^p}{2} = \varepsilon^p\,,$$

woraus $\|x - y\| < \varepsilon$ folgt. Der Raum l^p ist daher separabel, wenn $0 < p \leqq 1$ ist.

Nehmen wir jetzt an, dass $p < 0$ ist. Wir werden zeigen, dass in diesem Fall l^p nicht separabel ist. Hierzu betrachten wir eine beliebige Elementreihe $\{x_n\}$ in l^p, wobei $x_n = (\xi_i^{(n)})$ ist. Es sei $x = (\xi_i) \in l^p$ dasjenige Element, dessen Komponenten durch die Gleichungen

$$\xi_k = \xi_k^{(k)} + \Theta_k, \text{ falls } |\xi_k^{(k)}| \leqq 1 \qquad \text{und} \qquad \xi_k = 0, \text{ falls } |\xi_k^{(k)}| > 1\,,$$

mit $k = 1, 2, \ldots,$ definiert sind. Hierbei bedeutet Θ_k eine komplexe Zahl vom absoluten Betrag 1 so, dass $\overline{\Theta}_k\,\xi_k^{(k)} \geqq 0$ gilt. Dann stimmt die k:te Komponente von $x - x_k$ mit $\xi_k - \xi_k^{(k)}$ überein. Daraus folgt $|\xi_k - \xi_k^{(k)}| \geqq 1$. Es sei $B(x - x_k)$ diejenige B-Klasse, die das Element $x - x_k$ enthält. Das Element $x_{ok} = (0, 0 \ldots, 0, \xi_k - \xi_k^{(k)}, 0, \ldots)$, wobei also $\xi_k - \xi_k^{(k)}$ die einzige von Null verschiedene Komponente von x_{ok} ist, gehört dann also zu einer B-Klasse, die kleiner als $B(x - x_k)$ ist. Es sei B_{ok} die das Element x_{ok} enthaltende B-Klasse. Die Norm $|\xi_k - \xi_k^{(k)}|$ der Projektion x_{ok} des Elements $x - x_k$ auf der Klasse B_{ok} ist dann grösser als 1 bei jedem Wert von $k = 1, 2, \ldots$. Die Menge $\{x_n\}$ kann daher nach der Definition 1.5-C nicht überall dicht in l^p sein. Der Raum l^p ist folglich nicht separabel, wenn $-\infty \leqq p < 0$ ist. Unser Satz ist damit bewiesen.

1.10. *Vollständigkeit des Raums l^p.* Wir definieren:

Definition 1.10-A. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Norm zweiter oder dritter Art. Man sagt, dass er vollständig ist, wenn das Grenzelement jeder Reihe solcher Elemente von X, die im Sinne von Cauchy* (vgl. Nr. 1.5) *konvergieren, auch zu X gehört.*

Satz 1.10-A. *Im Falle $-\infty \leqq p \leqq 1, p \neq 0$ ist der Raum l^p vollständig.*

Beweis. Wenn $0 < p \leqq 1$ ist, beweist man die Vollständigkeit des Raums l^p genau wie im Falle des Banachschen Raums $p \geqq 1$ (vgl. hierzu z.B. Taylor [1], S. 100—101). Wir überlassen daher diesen Teil des Beweises dem Leser. Nehmen wir jetzt an, dass $p < 0$ ist. Es sei $\{x_n\}$ eine Reihe von Cauchy in l^p, wobei $x_n = (\xi_i^{(n)})$ ist. Dann ist nach der Definition 1.5-C bei jedem festen k die Reihe $\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}, \ldots, \xi_k^{(n)}, \ldots$ eine Cauchysche Reihe. Es sei $\xi_k = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_k^{(n)}$.

Nach dem in 1.6 Gesagten gehört das Element $x = (\xi_k)$ ohne Konvergenzeinschränkung zu l^p. Es sei jetzt $B(x)$ die B-Klasse der Elemente von l^p, welche die Elemente der Cauchyschen Reihe $\{x_n\}$ enthält. Es ist noch zu zeigen, dass die Norm des Elements $x_n - x$ und die Norm seiner Projektion auf jeder B-Klasse, die kleiner als die B-Klasse von $x_n - x$ ist, gegen Null strebt, wenn $n \to \infty$. Dies folgt unmittelbar aus der Normbedingung (e3) der Definition 1.2-C und aus der gleichzeitigen Bedingung $\xi_k = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_k^{(n)}$ bei jedem Wert von $k = 1, 2, \ldots$. Unser Satz ist damit bewiesen.

§ 2 Der konjugierte (fastkonjugierte) Raum

2.1. *Der Raum X^f und seine B^f-Klassen.* Es sei X ein linearer Raum mit der Eigenschaft A (vgl. Definition 1.1-A). Es sei x ein beliebiges Element von X und $B(x)$ seine B-Klasse. Aus den Bedingungen 7° und 8° der Definition 1.1-A folgt dann, dass die Projektionen von x auf solchen B-Klassen, die kleiner als $B(x)$ sind, den gleichen Raum aufspannen, wie die Elemente der Klasse $B(x)$ selbst (vgl. Definition 1.1-C).

Wir nehmen forthin an, dass X ein linearer Raum und E das skaläre Feld von X sei. Wir bezeichnen mit X^f die Menge aller linearen Funktionale von X zu E. Um zu definieren, unter welchen Bedingungen ein solches Funktional stetig ist und welches seine Norm ist, unterteilen wir zuerst die Elemente von X^f in B^f-Klassen.

Es sei $x^f \in X^f$ gegeben. Wir wählen das Element $x \in X$ folgendermassen. Das Element x kann ein beliebiges Element mit folgenden Eigenschaften sein: Es soll zu einer solchen B-Klasse gehören, dass, wenn B_λ

eine beliebige B-Klasse ist, die kleiner als $B(x)$ ist, und wenn x_λ die Projektion von x auf der Klasse B_λ bedeutet, immer $x^f(x_\lambda) > 0$ gilt und dass, wenn weiterhin $x_0 \in X$ ein zu einer solchen B-Klasse gehörendes Element bedeutet, die grösser als $B(x)$ ist, und wenn x die Projektion von x_0 auf die Klasse $B(x)$ ist, folgende Gleichung gelten muss:

$$x^f(x_0) = x^f(x) \ . \tag{2.1-1}$$

Alle diejenigen Elemente von X^f, die beim Element x die gleichen Bedingungen wie das obige x^f erfüllen, werden in ein und dieselbe B^f-Klasse der Elemente von X^f eingefügt, und wir sagen, dass diese B^f-Klasse derjenigen B-Klasse $B(x)$ im Raum X entspricht, die das Element x enthält. Es ist ersichtlich, dass jedes Element dieser B^f-Klasse bei allen Elementen der Klasse $B(x)$ die gleichen obengenannten Bedingungen erfüllt wie beim Element x selbst und bei den Projektionen von x auf jeder B-Klasse, die kleiner als $B(x)$ ist. Die Klassenmengen $\{B\}$ und $\{B^f\}$ entsprechen also einander eineindeutig.

Wir beweisen jetzt den folgenden

Satz 2.1-A. *Es sei X ein linearer Raum mit der in der Definition* 1.1-A *erwähnten Eigenschaft A. Dann ist die Einteilung der Elemente des Raumes X^f in die B^f-Klassen völlig analog mit der Einteilung der Elemente von X in B-Klassen und erfüllt die gleichen Bedingungen wie diese.*

Beweis. Da $x^f \in X^f$ beliebig gewählt worden ist, gehört jedes Element von X^f zu einer B^f-Klasse. Die Bedingung 1° der Definition 1.1-A ist also erfüllt. Wenn wir unter dem Nullelement $0'$ des Raums X^f dasjenige Funktional verstehen, das bei jedem Element von X verschwindet, gehört ein solches Element offenbar einsam zu einer eigenen B^f-Klasse. Falls weiterhin a^f und b^f zu derselben B^f-Klasse gehören, so gehören dazu offenbar die Elemente $a^f + b^f$ und αa^f, wobei α eine beliebige positive Konstante bedeutet. Ebenso ist, falls $a^f \neq 0'$ ein Element von X^f ist, leicht festzustellen, dass die Elemente a^f und Θa^f nicht zu ein und derselben B^f-Klasse gehören können. Θ bedeutet hier eine komplexe Zahl mit der Eigenschaft $|\Theta| = 1, \Theta \neq 1$. Die Bedingungen 2°—4° der Definition 1.1-A sind damit erfüllt.

Es seien jetzt a^f und b^f zwei Elemente von X^f. Wir sagen, dass a^f zu einer grösseren B^f-Klasse als b^f gehört, falls die dem Element a^f entsprechende B-Klasse in X grösser ist als die dem Element b^f entsprechende B-Klasse. Wenn wir solche B^f-Klassen *maximal* nennen, denen maximale B-Klassen in X entsprechen, so ist es offenbar, dass es in X^f keine B^f-Klasse gibt, die grösser als eine der eben definierten maximalen B^f-Klassen ist. Die Gültigkeit der Bedingung 5° ist damit bewiesen, und die Gültigkeit der Bedingung 6° ist ersichtlich.

Es sei nun $B^f(x^f)$ die B^f-Klasse des Elements x^f. Unter sein Projektion x^g auf der B^f-Klasse $B^f(x^g)$, die kleiner als $B^f(x^f)$ ist, versteht man das Element, das mit x^f in der B-Klasse übereinstimmt, die der B-Klasse $B^f(x^g)$ entspricht, das aber in der Komplementklasse dieser letztbestimmten B-Klasse im Verhältnis zu derjenigen B-Klasse verschwindet, die dem Element x^f im Raume X entspricht. Die so definierte Projektion x^g von x^f genügt den Bedingungen des Postulats 9° in der Definition 1.1-A.

Um zu beweisen, dass die Einteilung der Elemente von X^f in B^f-Klassen auch die Bedingung 10° der Definition 1.1-A erfüllt, betrachten wir die Elemente $x_1^f - x_2^f$ und $x_2^f - x_1^f$, wobei x_1^f und x_2^f zwei beliebige Elemente ein und derselben B^f-Klasse B_1^f bedeuten. Es sei B_1 die der Klasse B_1^f in X entsprechende B-Klasse. Es seien weiterhin B_{1-2}^f und B_{2-1}^f diejenigen B^f-Klassen, zu denen die Elemente $x_1^f - x_2^f$ bzw. $x_2^f - x_1^f$ gehören, und es seien B_{1-2} und B_{2-1} die diesen B^f-Klassen entsprechenden B-Klassen im Raum X.

Wir bezeichnen jetzt mit B_{12} bzw. B_{-21} die grösste B-Klasse, die kleiner als B_1 und B_{1-2} bzw. B_1 und B_{2-1} ist. Die Klassen B_{12} und B_{-21} haben die Eigenschaft, dass in ihnen und in jeder B-Klasse, die kleiner als B_{12} und B_{-21} ist, sowohl das Element x_1^f als auch entsprechend die Elemente $x_1^f - x_2^f$ und $x_2^f - x_1^f$ positive Werte erhalten.

Es sei jetzt $-B_{-21}$ diejenige B-Klasse, die aus Elementen von B_{-21} durch Multiplikation mit dem Faktor -1 erhalten wurde. Die Klasse B_{12} bzw. $-B_{-21}$ ist kleiner als B_{1-2} und sie ist weiterhin kleiner als die Komplementklasse von $-B_{-21}$ bzw. B_{12} im Verhältnis zur Klasse B_{1-2}. Ebenso ist die Klasse B_{12} bzw. B_{-21} kleiner als die Klasse B_1 und ist weiterhin kleiner als die Komplementklasse von B_{-21} bzw. B_{12} im Verhältnis zur Klasse B_1. Es sei nun B_0 die Komplementklasse der direkten Summe von B_{12} und B_{-21} im Verhältnis zur Klasse B_1. Wir zeigen, dass $x_1^f - x_2^f$ in B_0 verschwindet. Da B_0 zur Komplementklasse sowohl von B_{12} als von B_{-21} im Verhältnis zu B_1 gehört, kann $x_1^f - x_2^f$ in B_0 weder positive noch negative Werte annehmen, woraus folgt, dass es in B_0 verschwinden muss. Das Funktional $x_1^f - x_2^f$ erhält also positive Werte nur in der B-Klasse, die mit der direkten Summe von B_{12} und $-B_{-21}$ übereinstimmt, sowie in allen denjenigen B-Klassen, die kleiner als die direkte Summe $B_{12} + (-B_{-21})$ sind. Das Funktional $x_1^f - x_2^f$ verschwindet weiterhin in der Komplementmenge der Klasse $B_{12} + (-B_{-21})$ im Verhältnis zur Klasse B_1. Dies aber bedeutet, dass die Klasse B_{1-2} die direkte Summe der Klassen B_{12} und $-B_{-21}$ ist und dass man damit jedes Element von B_{1-2} in der Form $x_+ + x_-$ darstellen kann, wobei $x_+ \in B_{12}$ und $x_- \in -B_{-21}$.

Es seien jetzt B_{12}^f, $-B_{-21}^f$ und B_{-21}^f die den Klassen B_{12}, $-B_{-21}$

und B_{-21} entsprechenden B^f-Klassen im Raum X^f. Die so erhaltene B^f-Klasse B^f_{12} bzw. $-B^f_{-21}$ ist offenbar die Komplementklasse von $-B^f_{-21}$ bzw. B^f_{12} im Verhältnis zur Klasse B^f_{1-2}, und die Klasse B^f_{12} bzw. B^f_{-21} gehört zu der Komplementklasse von B^f_{-21} bzw. B^f_{12} im Verhältnis zur Klasse B^f_1. Jedes Element von B^f_{1-2} kann man also als Summe von zwei Elementen ausdrücken, von denen das eine in die Klasse B^f_{12} und das andere in die Klasse $-B^f_{-21}$ gehört. Dies aber bedeutet, dass die Einteilung der Elemente des Raums X^f in B^f-Klassen auch dem Postulat 10° der Definition 1.1-A genügt.

Wir werden jetzt zeigen, dass die B^f-Klassen auch der Bedingung 7° der Definition 1.1-A genügen. Es sei also $x^f_0 \in X^f$ beliebig, und es sei x^f ein beliebiges Element einer beliebigen maximalen B^f-Klasse $B^f(x^f)$. Wir bezeichnen mit x ein beliebiges Element derjenigen B-Klasse $B(x)$ in X, die der Klasse $B^f(x^f)$ entspricht.

Es sei weiterhin $\{B_\lambda(x), \lambda \in \Lambda\}$, wobei Λ eine Indexmenge bedeutet, eine Menge von B-Klassen, die im Verhältnis zur Klasse $B(x)$ die Eigenschaft C der Definition 1.1-B hat. Wenn x_λ die Projektion von x auf der Klasse B_λ bedeutet, so wählen wir bei jedem Wert $\lambda \in \Lambda$ den Skalar a_λ so, dass

$$x^f_0(x_\lambda) = x^f_\lambda(a_\lambda x_\lambda)$$

gilt; hierbei bedeutet x^f_λ die Projektion von x^f auf derjenigen B^f-Klasse $B^f(x^f_\lambda)$ in X^f, die der Klasse $B(x_\lambda)$ in X entspricht.

Dann gilt $x^f_0 = \sum\limits_\lambda a_\lambda x^f_\lambda$ in dem von den Elementen $\{x_\lambda\}$ aufgespannten linearen Raum X_λ. Es mögen weiterhin $B_{\lambda\mu}$ und $x_{\lambda\mu}$ bei jedem $\lambda \in \Lambda$ und bei jedem $\mu \in M_\lambda$ die gleiche Bedeutung wie in der Definition 1.1-C haben, und es sei $B^f_{\lambda\mu}$ die der Klasse $B_{\lambda\mu}$ in X entsprechende B^f-Klasse im Raum X^f sowie $x^f_{\lambda\mu}$ die Projektion von x^f_λ auf der Klasse $B^f_{\lambda\mu}$ bei jedem $\lambda \in \Lambda$ und bei jedem $\mu \in M_\lambda$. Dann gibt es bei jedem Wert $\lambda \in \Lambda$, $\mu \in M_\lambda$ einen solchen Skalar, dass

$$x^f_0(x_{\lambda\mu}) = x^f_{\lambda\mu}(a_{\lambda\mu} x_{\lambda\mu})$$

gilt. Dann haben wir $x^f_0 = \sum\limits_{\lambda\mu} a_{\lambda\mu} x^f_{\lambda\mu}$ in der von den Elementen $\{x_{\lambda\mu}\}$ aufgespannten linearen Mannigfaltigkeit $X_{\lambda\mu}$.

Wenn wir so fortsetzen, erhalten wir eine Reihe von Projektionsmengen $\{x^f_\lambda\}$, $\{x^f_{\lambda\mu}\}$, $\{x^f_{\lambda\mu\nu}\}, \ldots$. Wir bezeichnen mit X^f_λ bzw. $X^f_{\lambda\mu}$, $X^f_{\lambda\mu\nu}, \ldots$ den von den Elementen der Menge $\{x^f_\lambda\}$ bzw. $\{x^f_{\lambda\mu}\}$, $\{x^f_{\lambda\mu\nu}\}, \ldots$ aufgespannten linearen Raum in X^f. Es gilt offenbar $X^f_\lambda \subset X^f_{\lambda\mu} \subset X^f_{\lambda\mu\nu} \ldots$. Wir werden jetzt zeigen, dass die kleinste obere Grenze dieser total geordneten Menge von linearen Räumen mit X^f übereinstimmt. Es sei also X^f_∞ die kleinste obere Grenze der Reihe $X^f_\lambda, X^f_{\lambda\mu}, X^f_{\lambda\mu\nu}, \ldots$. Aus dem

Obengesagten folgt, dass x_0^f in Form einer Linearkombination der Elemente von $X_\lambda^f, X_{\lambda\mu}^f, X_{\lambda\mu\nu}^f, \ldots$ in den entsprechenden linearen Mannigfaltigkeiten $X_\lambda, X_{\lambda\mu}, X_{\lambda\mu\nu}, \ldots$ darstellbar ist.

An der Grenze finden wir dann, dass x_0^f im Raum X mit einer Linearkombination der Elemente von X_∞^f übereinstimmt. Da $x_0^f \in X^f$ beliebig gewählt worden ist, bedeutet dies aber, dass der Raum X_∞^f mit X^f übereinstimmt. Die B^f-Klassen erfüllen also die Bedingung 7° der Definition 1.1-A.

Nach diesen Vorbetrachtungen können wir weiterhin schliessen, dass die B^f-Klassen auch die Bedingung 8° der Definition 1.1-A erfüllen, und unser Satz ist damit vollständig bewiesen.

2.2. *Stetige Funktionale in X^f und der konjugierte (fastkonjugierte) Raum X' von X.* Wir definieren jetzt:

Definition 2.2-A. *Es sei $x' \in X^f$ ein im Raum X definiertes lineares Funktional und es sei weiterhin x ein beliebiges Element in X und $B(x)$ seine B-Klasse. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben.*

Nehmen wir nun an, es gebe immer eine solche Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, dass $|x'(x)| < \varepsilon$, wenn die Norm von x und die Norm jeder Projektion von x auf einer kleineren B-Klasse als $B(x)$ kleiner als δ sind. Dann sagen wir, dass das Funktional $x' \in X^f$ stetig ist.

Es sei nun $\{B_\lambda\,;\, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n < \infty\}$ eine beliebige Menge von endlich vielen B-Klassen, die im Verhältnis zur Klasse $B(x)$ die Eigenschaft C der Definition 1.1-B *haben. Falls das Element $x' \in X^f$ in dem obigen Sinne nicht stetig ist, dabei aber für jedes $x \in B(x)$ und für jede oben definierte endliche Menge $\{B_\lambda\}$ der B-Klassen solche positiven Zahlen k und $\delta = \delta(\varepsilon, \{B_\lambda\}) > 0$ vorhanden sind dass $|x'(kx)| < \varepsilon$, wenn die Norm von kx und die Norm der Projektion von kx auf einer beliebigen B-Klasse $B_\lambda \in \{B_\lambda, \lambda = 0, 1, 2, \ldots, n\}$ kleiner als δ sind, dann sagen wir, dass das Funktional $x' \in X^f$ faststetig ist.*

Es ist leicht zu zeigen, dass die in X definierte Menge von stetigen (faststetigen) Funktionalen des Raumes X^f linear ist. Wir stellen daher die folgende Definition auf.

Definition 2.2-B. *Den linearen Raum, der von den in X definierten linearen stetigen (faststetigen) Funktionalen gebildet wird, nennt man den konjugierten (fastkonjugierten) Raum von X, und man bezeichnet ihn mit X'.*

2.3. *Die Norm im konjugierten (fastkonjugierten) Raum X'.* Wir definieren:

Definition 2.3-A. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Norm zweiter* *oder dritter Art. Unter der Norm des Elements* x' *im konjugierten Raum* X' *von* X *versteht man den Ausdruck*

$$(2.3\text{-}1) \qquad \|x'\| = \inf_{\|x_\lambda\| \geqq 1} |x'(x_\lambda)| \,, \quad \|0'\| = 0 \,,$$

wobei $x_\lambda \in X$ *alle Elemente derjenigen B-Klasse* B_λ *durchläuft, die der das Element* x' *enthaltenden* B'*-Klasse im Raum* X' *entspricht.*

Wir beweisen jetzt den

Satz 2.3-A. *Es sei* $x_\lambda \in X$ *gegeben, und es sei* B_λ *seine B-Klasse* (*d.h. die B-Klasse, zu der* x_λ *gehört*). *Es sei weiterhin* $\{x_\lambda\}$ *die Menge aller derjenigen Elemente von* X, *die zu solchen B-Klassen gehören, die grösser als* B_λ *sind, und deren Projektionen auf* B_λ *mit* x_λ *übereinstimmen. Es sei nun* x' *ein solches Element von* X', *dessen* B'*-Klasse der Klasse* B_λ *in* X *entspricht. Der Ausdruck* (2.3-1) *der Norm für das Element* $x' \in X'$ *ist dann identisch mit dem Ausdruck*

$$(2.3\text{-}2) \qquad \|x'\| = \inf_{x \in \{x_\lambda\}} \left(|x'(x - x_0)| / \inf_{x_0 \in B(x) \sim B_\lambda} \|x - x_0\|\right)$$

oder mit dem Ausdruck

$$(2.3\text{-}3) \qquad \|x'\| = \inf_{x \in \{x_\lambda\}} \left(|x'(x - x_0)| / \sup_{x_0 \in B(x) \sim B_\lambda} \|x - x_0\|\right)$$

je nachdem ob die in X *definierte Norm zweiter oder dritter Art ist.* $B(x) \sim B_\lambda$ *bedeutet hier die Komplementmenge der Klasse* B_λ *im Verhältnis zu der das Element* $x \in \{x_\lambda\}$ *enthaltenden B-Klasse* $B(x)$.

Beweis. Aus der Bestimmungsweise der Klasse B_λ folgt, dass x' in der Klasse $B(x) \sim B_\lambda$ verschwindet, woraus man weiterhin $x'(x - x_0) = x'(x)$ erhält, wenn $x_0 \in B(x) \sim B_\lambda$. Die Menge $\{x - x_0\}$, wobei man $x \in \{x_\lambda\}$ festhält und wobei x_0 alle Elemente von $B(x) \sim B_\lambda$ durchläuft, enthält gemäss der Bedingung 9° der Definition 1.1-A genau ein Element der Klasse B_λ, wogegen alle anderen Elemente dieser Menge zu solchen B-Klassen gehören, die grösser als B_λ sind. Nach den Definitionen 1.2-B und 1.2-C sind die Normen der Projektionen des Elements $x - x_0$ auf der Klasse B_λ dann kleiner oder grösser als die Norm des Elements $x - x_0$ selbst, je nachdem ob die Norm in X zweiter oder dritter Art ist. Daraus folgt, dass dasjenige Element x_0 der Klasse $B(x) \sim B_\lambda$, bei dem sich $\inf_{x_0 \in B(x) \sim B_\lambda} \|x - x_0\|$ oder $\sup_{x_0 \in B(x) \sim B_\lambda} \|x - x_0\|$ ergibt, der Bedingung $x - x_0 \in B_\lambda$ genügt. Dies aber bedeutet, dass die Ausdrücke (2.3-2) und (2.3-3) mit dem Ausdruck (2.3-1), der die Norm von x' definiert, übereinstimmen. Unser Satz ist bewiesen.

Satz 2.3-B. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Norm zweiter oder dritter Art. Dann ist die Norm seines konjugierten (fastkonjugierten) Raums X' entsprechend dritter oder zweiter Art.*

Beweis. Es sei die Norm in X entweder zweiter oder dritter Art. Aus (2.3-1) folgt dann unmittelbar, dass die Norm $\|x'\|$ den Bedingungen (a), (b) und (c) in der Definition 1.2-B genügt. Es sei $B'(x')$ die B'-Klasse des Elements $x' \in X'$, und es sei B_1' eine beliebige B'-Klasse, die kleiner als $B'(x')$ ist; ferner seien $B(x)$ bzw. B_1 die den Klassen $B'(x')$ bzw. B_1' entsprechenden B-Klassen in X. Die Norm der Projektion des Elements x' auf der Klasse B_1' erhält man dann, wenn x_λ in der Gleichung (2.3-1) alle Elemente der Klasse B_1 anstatt derjenigen der Klasse B_λ durchläuft oder wenn in (2.3-2) oder in (2.3-3) x_0 alle Elemente der Komplementklasse $B(x) \sim B_1$ und x alle Elemente der Menge $\{x_\lambda\}$ durchläuft. Falls die Norm in X zweiter oder dritter Art ist, definieren die Ausdrücke

$$\inf_{x_0 \in B(x) \sim B_\lambda} \|x - x_0\| \qquad \text{und} \qquad \inf_{x_0 \in B(x) \sim B_1} \|x - x_0\|$$

bzw.

$$\sup_{x_0 \in B(x) \sim B_\lambda} \|x - x_0\| \qquad \text{und} \qquad \sup_{x \in B(x) \sim B_1} \|x - x_0\|$$

entsprechend die Normen der Projektion von x auf den Klassen B_λ und B_1. Da $B_1 \leqq B_\lambda$, gilt

$$\inf_{x_0 \in B(x) \sim B_\lambda} \|x - x_0\| \geqq \inf_{x_0 \in B(x) \sim B_1} \|x - x_0\| \qquad \text{oder} \qquad \sup_{x_0 \in B(x) \sim B_\lambda} \|x - x_0\| \leqq \sup_{x_0 \in B(x) \sim B_1} \|x - x_0\|$$

je nachdem ob die Norm in X zweiter oder dritter Art ist.

Wir schreiben nun das Element x in der Form

$$x = x_1 + \Theta x_{\sim 1}\,, \tag{2.3-4}$$

wobei x_1 bzw. $\Theta x_{\sim 1}$ die Projektion von x auf der Klasse B_1 bzw. $B(x) \sim B_1$ bedeutet und Θ positiv sowie $x_{\sim 1}$ durch die Bedingung $\|x_{\sim 1}\| = 1$ normiert ist. Wenn die in X definierte Norm dritter Art ist, so folgt aus (2.3-3), dass die Norm der Projektion des zur B'-Klasse $B'(x')$ gehörigen Elements x' auf der Klasse B'_1 kleiner ist als die Norm des Elements x' selbst.

Falls die Norm in X zweiter Art ist, schreiben wir x' analogerweise gemäss (2.3-4) in der Form

$$x' = x_1' + \Theta' x'_{\sim 1}, \tag{2.3-5}$$

wobei x'_1 bzw. $\Theta' x'_{\sim 1}$ die Projektion von x' auf B_1' bzw. auf $B'(x') \sim B_1'$ bedeutet und wobei Θ' positiv sowie $x'_{\sim 1}$ durch die Gleichung $\|x'_{\sim 1}\| = 1$ normiert ist.

Da die Norm in X zweiter Art ist, so gilt offenbar

$$\lim_{\Theta\to 0}\ [\inf\{(x_1' + \Theta' x_{\sim 1}')\,(x_1 + \Theta x_{\sim 1})/\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\|\}] = \inf\{x_1'(x_1)/\|x_1\|\}\,,$$

wobei x_1 bzw. $x_{\sim 1}$ alle Elemente der Klasse B_1 bzw. $B(x) \sim B_1$ und mit der Norm 1 durchläuft. Da weiterhin die Menge $\{x_1 + \Theta x_{\sim 1}\}$, bei der Θ beliebige positive Werte erhalten kann, mehr Elemente enthält als die Menge $\{x_1 + \Theta x_{\sim 1}\}$, bei der Θ nun nur kleine positive Werte, z.B. kleinere Werte als die Zahl $1/\|x_{\sim 1}\|$, erhält, so haben wir dann unter Berücksichtigung der Gleichung (2.3-1)

$$\text{(2.3-6)}\qquad \begin{aligned}\|x'\| &= \inf((x_1' + \Theta' x_{\sim 1})\,(x_1 + \Theta x_{\sim 1})/\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\|) \leqq \\ &\leqq \inf x_1'(x_1)/\|x_1\| = \|x_1'\|\,.\end{aligned}$$

Falls also die Norm in X zweiter Art ist, bedeutet die obige Ungleichung, dass die Norm der Projektion von x' auf einer solchen B'-Klasse, die kleiner als die von x' ist, grösser ist als die Norm des Elements x' selbst.

Wir nehmen weiterhin an, dass die Norm in X zweiter Art ist, und lassen in (2.3-5) Θ' gegen ∞ streben. Damit auf der linken Seite der Ungleichung (2.3-6) das Infinum erhalten bleibt, kann Θ bei grossen Θ' nur sehr kleine positive Werte erhalten. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aus (2.3-6) erhalten wir dann

$$\begin{aligned}\|x_1'\| &\geqq \inf[(x_1' + \Theta' x_{\sim 1}')\,(x_1 + \Theta x_{\sim 1})/\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\|] > \\ &> \inf(x_1'(x_1)/\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\|) = \\ &= \inf\left[\frac{x_1'(x_1)}{\|x_1\|}\cdot\frac{\|x_1\|}{\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\|}\right] \geqq (1-\varepsilon)\,\|x_1'\|\,,\end{aligned}$$

wenn wir Θ klein genug wählen. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt worden ist, folgt aus der obigen Ungleichung aber unmittelbar

$$\lim_{\Theta'\to\infty} \|x_1' + \Theta' x_{\sim 1}'\| = \|x_1'\|\,.$$

Wenn nun $\Theta' \to 0$, so sehen wir unmittelbar aus (2.3-6), wenn wir nun Θ genügend grosse Werte annehmen lassen, dass

$$\lim_{\Theta'\to\infty} \|x_1' + \Theta' x_{\sim 1}'\| = 0\,.$$

Es sei nun die Norm in X von dritter Art. Wir lassen in (2.3-5) $\Theta' \to 0$ gehen. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da dann nach der Bedingung (e3) der Definition (1.2-C) $\lim_{\Theta\to\infty}\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\| = \|x_1\|$ ist, haben wir nach dem Obengesagten

$$\|x_1'\| \leqq \|x'\| = \inf\,[(x_1' + \Theta' x_{\sim 1})\,(x_1 + \Theta x_{\sim 1})/\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\|] =$$

$$= \inf \left[\frac{x_1'(x_1) + \Theta'\Theta x_{\sim 1}'(x_{\sim 1})}{\|x_1\|} \cdot \frac{\|x_1\|}{\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\|} \right] < (1+\varepsilon)\,\|x_1'\|\,,$$

wenn wir zuerst Θ gross genug und damit Θ' klein genug wählen. Als unmittelbare Folge der obigen Ungleichung haben wir dann

$$\lim_{\Theta' \to 0} \|x_1' + \Theta' x_{\sim 1}'\| = \|x_1'\|\,.$$

Aus

$$\|x'\| = \|x_1' + \Theta' x_{\sim 1}'\| = \inf\,[(x_1' + \Theta' x_{\sim 1}')\,(x_1 + \Theta x_{\sim 1})/\|x_1 + \Theta x_{\sim 1}\|]$$

folgt weiterhin unmittelbar, wenn wir $\Theta' \to \infty$ streben lassen, dass

$$\lim_{\Theta' \to \infty} \|x_1' + \Theta' x_{\sim 1}'\| = \infty\,.$$

Die Norm $\|x'\|$ des Elements $x' \in X'$ erfüllt also die Bedingung (e3) oder (e2) der Definition 1.2-C oder 1.2-B, je nachdem ob die Norm in X zweiter oder dritter Art ist. — Unser Satz ist bewiesen.

2.4. *Der konjugierte Raum von* l^p $(p \leqq 1, p \neq 0)$. Wir betrachten jetzt den Raum $X = l^p$, wobei $-\infty \leqq p \leqq 1, p \neq 0$. Es sei $x' = (b_i)$ ein Element des Raums $X' = l^q$, wobei $1/p + 1/q = 1$. Um die Norm des Elements $x' \in X'$ zu bestimmen, betrachten wir nun ein solches im übrigen beliebiges Element $x = (a_i)$ von X, das jedoch die Bedingungen $a_i b_i \geqq 0$ mit jedem Wert des Indexes $i = 1, 2, \ldots$ erfüllt, und zwar so, dass das Gleichheitszeichen nur dann gültig ist, wenn bei dem gleichen Wert von i die Bedingung $a_i = b_i = 0$ gilt. Es sei bemerkt, dass die Komponenten von x und x' die zu Beginn von Nr. 1.6 erwähnten Bedingungen erfüllen müssen.

Wir sagen, dass die auf obige Weise definierte Menge der Elemente $\{x\}$ die B-Klasse in X bestimmt, die dem Element $x' \in X' = l^q$ entspricht. Wir definieren jetzt das Funktional x' folgendermassen:

$$x'(x) = \sum{}' b_i a_i\,.$$

Nach der Gleichung (2.3-1) haben wir dann $\|x'\| = \inf_{\|x_\lambda\| \geqq 1} |x'(x_\lambda)|$, wobei x_λ alle Elemente derjenigen B-Klasse $B(x)$ durchläuft, die dem Element x' entsprechen. Falls $p < 0$ ist, normieren wir das Element $x = (a_i)$ der Klasse $B(x)$ so, dass $(\Sigma' |a_i^p|)^{1/p} = 1$. Wir haben dann

$$\|x'\| = \inf_{x \in B(x)} |\sum{}' b_i a_i|\,,$$

wobei $x = (a_i)$ alle die Normbedingung $\|x\| = 1$ erfüllenden Elemente der Klasse $B(x)$ durchläuft.

Nach der rückläufigen Hölderschen Ungleichung haben wir andererseits

$$\sum b_i a_i = \sum{}' b_i a_i \geqq \left(\sum{}' |b_i|^{p'} \right)^{1/p'} \left(\sum{}' |a_i|^p \right)^{1/p} = \left(\sum{}' |b_i|^{p'} \right)^{1/p'} .$$

Da $x \in B(x)$ und $\|x\| = 1$, während x im übrigen beliebig gewählt worden ist, erhalten wir dann nach der Gleichung (2.3-1)

$$\|x'\| \geqq \left(\sum{}' |b_i|^{p'} \right)^{1/p'} .$$

In dieser letzten Ungleichung kann man das $\geqq$ - Zeichen durch ein Gleichheitszeichen ersetzen. Diese Tatsache beweisen wir erst später in Nr. 2.6.

Um zu beweisen, dass das Funktional x' im Sinne der Definition 2.2-A stetig ist, betrachten wir zuerst den Fall, in dem $1 \geqq q > 0$ und damit $p < 0$ gilt. Es sei $M = \sup |a_i|$ und $N = \sup |b_i|$. Aus dem zu Beginn von Nr. 1.6. Gesagten folgt, dass $0 < M < \infty$ und $0 < N < \infty$ gelten. Wir haben dann

$$|x'(x)| = |\sum{}' b_i a_i| \leqq M \sum{}' |b_i| = MN \sum{}' \left| \frac{b_i}{N} \right| \leqq MN \sum{}' \left| \frac{b_i}{N} \right|^q \leqq MN^{1-q} \|b\|^q .$$

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir multiplizieren nun x mit der Zahl $\delta / M = = \varepsilon / MN^{1-q} \|b\|^q$ und bezeichmen mit x das so erhaltene Element. Dann ist die Norm der Projektion von x auf jeder B-Klasse, die kleiner als diejenige von a selbst ist, kleiner als δ. Weiterhin gilt bei einem solchen x, dass $x'(x) < \varepsilon$. Falls $1 \geqq q > 0$, $p < 0$, ist die Stetigkeit von x' damit bewiesen. Im Falle $q < 0$, $0 < p \leqq 1$ ist der Beweis völlig analog, und wir überlassen daher den Beweis dieser Tatsache dem Leser.

2.5. *Einige Eigenschaften des konjugierten (fastkonjugierten) Raums X'.* Wir werden jetzt einige Sätze beweisen, die im konjugierten (fastkonjugierten) Raum X', dessen Norm zweiter oder dritter Art ist, gültig sind und die wir später brauchen werden. Die analogen Sätze für den Raum mit einer Norm erster Art sind allgemein bekannt (vgl. z.B. TAYLOR [4], S. 185—188).

Satz 2.5-A. *Es sei M ein wesentlicher Unterraum des linearen Raums zweiter oder dritter Art, und zwar so, dass es eine solche B-Klasse $B(m)$ der Elemente von X gibt, dass die Elemente $B(m)$ die Mannigfaltigkeit M aufspannen. Es sei $B'(m')$ die der Klasse $B(m)$ entsprechende B'-Klasse im Raum X'. Wir bezeichnen mit M' den linearen Raum, der von den in M definierten stetigen Funktionalen gebildet wird.*

Falls $m' \in M'$, *so gibt es ein im ganzen* X *definiertes Funktional* $x' \in X'$ *so, dass* $\|x'\| = \|m'\|$ *und* $x'(x) = m'(x)$, *wenn* $x \in M$.

Beweis. Es sei $m' \in M'$ gegeben, und es sei $C'(m')$ diejenige B'-Klasse der Elemente von M', die das Element m' enthält. Es sei weiterhin $C(m)$ die B-Klasse in M und also auch in X, die der B'-Klasse $C'(m')$ in X' entspricht, und es sei m ein beliebiges Element von $C(m)$. Wir haben dann

$$\|m'\| = \inf |m'(m)| ,$$

wobei m alle die Elemente der Klasse $C(m)$ durchläuft, die der Bedingung $\|m\| \geqq 1$ genügen. Es sei nun x ein solches beliebiges Element von X, das zu einer solchen B-Klasse in X gehört, die grösser als $C(m)$ ist, und zwar so, dass die Projektion von x auf der Klasse $C(m)$ mit m übereinstimmt. Es sei jetzt x' das Element von X', das durch die folgenden Bedingungen definiert wird: es ist im ganzen X definiert und stimmt in M und also auch in der von den Elementen von $C(m)$ aufgespannten linearen Mannigfaltigkeit mit m' überein. Weiterhin nehmen wir an, dass x' die Bedingung

$$x'(x) = x'(m)$$

erfüllt. Die B-Klasse in X, die dem Element x' entspricht, stimmt dann nach Nr. 2.1 mit $C(m)$ überein. Nach der Definition der Norm in X' haben wir dann

$$\|x'\| = \inf x'(x) = \inf x'(m) = \inf m'(m) = \|m'\| ,$$

wobei x alle die Elemente durchläuft, die zu grösseren B-Klassen als $C(m)$ gehören, und zwar so, dass, wenn wir mit m die Projektion des Elements x auf der Klasse $C(m)$ bezeichnen, immer $\|m\| \geqq 1$ gilt; m durchläuft hier also alle der Bedingung $\|m\| \geqq 1$ genügenden Elemente von $C(m)$. Unser Satz ist damit bewiesen.

Bevor wir weitergehen, schränken wir die Menge der linearen Räume mit einer Norm zweiter oder dritter Art ein, die wir im folgenden untersuchen wollen. Hierzu geben wir die folgende

Definition 2.5-A. *Es sei* X *ein linearer Raum mit einer Norm zweiter Art oder dritter Art mit der speziellen Normbedingung* (e3x), *und es sei* X' *sein konjugierter (fastkonjugierter) Raum. Wir sagen, dass der Raum* X *die Eigenschaft* E *hat, falls folgendes gilt:*

Für jedes Element von $x' \in X'$, *dessen Norm von Null verschieden ist, gibt es wenigstens ein Element* $x \in X$ *mit* $\|x\| \neq 0$, *und zwar so, dass die* B*-Klasse* $B(x)$ *von* x *der* B'*-Klasse von* x' *entspricht und dass*

$$x'(x) = \|x'\| \, \|x\|$$

gilt.

Bezeichnen wir weiterhin mit $\{B_\lambda\,;\,\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ *eine beliebige Menge der B-Klassen, die alle kleiner als* $B(x)$ *sind und die im Verhältnis zu* $B(x)$ *die Eigenschaft C der Definition* 1.1-B *haben. Es sei* x_λ *die Projektion von* x *auf der Klasse* B_λ *und* x'_λ *die Projektion von* x' *auf derjenigen* B'*-Klasse, die der Klasse* $B_\lambda \in \{B_\lambda\,;\,\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ *in* X *entspricht, und es sei* $x_{\sim\lambda}$ *bzw.* $x'_{\sim\lambda}$ *die Projektion von* x *bzw.* x' *auf der Komplementklasse von* B_λ *bzw.* B'_λ *im Verhältnis zur Klasse* $B(x)$ *bzw.* $B'(x')$. *Dann gibt es bei jedem Paar von positiven Zahlen* α, β *solche positiven Zahlen* k_α, k_β, *dass*

$$(\alpha x'_\lambda + \beta x'_{\sim\lambda})\,(k_\alpha x_\lambda + k_\beta x_{\sim\lambda}) = \|\alpha x'_\lambda + \beta x'_{\sim\lambda}\| \, \|k_\alpha x_\lambda + k_\beta x_{\sim\lambda}\| \, .$$

Wir betrachten als Beispiel den Raum l^p, wobei $-\infty < p < 1$, $p \neq 0$. Es sei $a' = (a'_1, a'_2, \ldots)$ ein beliebiges Element des Raums l^q, wobei $1/q + 1/p = 1$, und zwar so, dass $\|a'\| = 1$ (wir werden in Nr. 2.6 zeigen, dass l^q mit dem konjugierten Raum von l^p kongruent ist). Es sei $B'(a')$ die B'-Klasse in l^q, zu der a' gehört. Wir haben also $\Sigma' |a'_i|^q = 1$. Wir betrachten jetzt das Element $b = (b_1, b_2, \ldots) = (\Theta_1\, a_1'^{q/p}, \Theta_2\, a_2'^{q/p}, \ldots)$, wobei man $a_i'^{q/p} = 0$ setzt, falls $a'_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, und wobei die komplexen Zahlen $\Theta_1, \Theta_2, \ldots$ so gewählt worden sind, dass sie alle den absoluten Betrag 1 haben und dass weiterhin $\Theta_i\, a'_i\, a_i'^{q/p} \geqq 0$ bei jedem Wert von $i = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Das Element b gehört zu l^p genau dann, wenn unter den Komponenten von $a' = (a'_1, a'_2, \ldots)$ nur endlich viele von Null verschieden sind. Dies beruht auf folgendem: Falls $-\infty < q < 0$, gibt es eine solche endliche Zahl M, dass $\sup |a'_i| = M$. Da $q/p < 0$ gilt, ist $\inf |b_i| = \inf |\Theta_i\, a'^{q/p}| = M^{q/p}$. Die Bedingung $\Sigma |b_i|^p < \infty$ gilt, und das Element b gehört zu l^p somit nur dann, wenn von den Komponenten $b_1, b_2, \ldots$ und also von den Komponenten $a'_1, a'_2, \ldots$ nur endlich viele von Null verschieden sind. Dass dies auch im Falle $0 < q < 1$ gilt, beweist man in analoger Weise.

Falls also $b \in l^p$, gehört es dann nach Nr. 2.4 zu derjenigen B-Klasse in l^p, die der B'-Klasse $B'(a')$ entspricht. Offenbar gilt

$$\|b\| = (|a'_1|^q + |a'_2|^q + \ldots)^{1/p} = 1 \, .$$

Wenn wir jetzt das Funktional $a' = (a'_1, a'_2, \ldots) \in l^q$ wie in Nr. 2.4 definieren, so haben wir

$$a'(b) = \sum{}' a'_i\, b_i = \sum{}' \Theta_i\, a'_i\, a_i'^{q/p} = \sum{}' |a_i|'^q = 1 = \|a'\| \, \|b\| \, .$$

Der Raum l^p hat also im Falle $-\infty < p < 1$, $p \neq 0$ die Eigenschaft E, aber nur dann, wenn l^p endlichdimensional ist. Demgegenüber hat der

Raum L^p, den wir später in Nr. 3.2 definieren werden, im Falle $p < 1$, $p \neq 0$ ohne Einschränkung die Eigenschaft E.

Wir beweisen nun folgende Hilfssätze:

Hilfssatz 2.5-B. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Norm zweiter Art oder dritter Art mit der Normbedingung* (e3α) *der Definition* 1.2-C. *Es habe X weiterhin die Eigenschaft E, und es sei x' ein beliebiges Element des konjugierten (fastkonjugierten) Raums X' von X. Es sei weiterhin x ein solches Element von X, für welches*

$$x'(x) = \|x'\| \, \|x\|$$

gilt, und zwar so, dass die B-Klasse $B(x)$ von x gleich oder kleiner ist als die B-Klasse, die der Klasse $B'(x')$ von X' in X entspricht.

Bezeichnen wir mit $\{B_\lambda\,; \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ eine beliebige Menge der B-Klassen, die alle kleiner als $B(x)$ sind und die im Verhältnis zu $B(x)$ die Eigenschaft C der Definition 1.1-B *haben. Es sei weiterhin x_λ die Projektion von x auf der Klasse B_λ und x'_λ die Projektion von x' auf derjenigen B'-Klasse B'_λ, die der Klasse $B_\lambda \in \{B_\lambda, \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ in X entspricht, und es sei $x_{\sim\lambda}$ bzw. $x'_{\sim\lambda}$ die Projektion von x bzw. x' auf der Komplementklasse von B_λ bzw. B'_λ im Verhältnis zur Klasse $B(x)$ bzw. $B'(x')$. Dann haben wir*

$$x'(x) = x'_\lambda(x_\lambda) + x'_{\sim\lambda}(x_{\sim\lambda}) \tag{2.5-3}$$

und

$$x'_\lambda(x_\lambda) = \|x'_\lambda\| \, \|x_\lambda\| \quad \textit{und} \quad x'_{\sim\lambda}(x_{\sim\lambda}) = \|x'_{\sim\lambda}\| \, \|x_{\sim\lambda}\| \,. \tag{2.5-4}$$

Beweis. Die Gültigkeit der Gleichung (2.5-3) folgt unmittelbar aus der Definition der B'-Klassen. Um (2.5-4) zu beweisen, betrachten wir nun das Element $x'_{k\Sigma} \in X'$, das durch die Gleichung

$$x'_{k\Sigma} = k'\, x'_\lambda + \tilde{k}'\, x'_{\sim\lambda} \tag{2.5-5}$$

definiert ist, wobei k' und $\tilde{k}'$ positive Zahlen bedeuten. Im Falle $k' = \tilde{k}' = 1$ stimmt $x'_{k\Sigma}$ mit x' überein. Das Element $x_{k\Sigma}$ der Klasse $B(x)$, bei welchen

$$x'_{k\Sigma}(x_{k\Sigma}) = \|x'_{k\Sigma}\| \, \|x_{k\Sigma}\| \,,$$

hat dann nach der Definition 2.5-A die Form

$$x_{k\Sigma} = k x_\lambda + \tilde{k} x_{\sim\lambda} \,, \tag{2.5-6}$$

wobei $\tilde{k}$ und k positive Zahlen bedeuten, die offenbar von k' und $\tilde{k}'$ abhängen. Wenn z.B. $k' = \tilde{k}' = 1$, ist nach dem Obigen $k = \tilde{k} = 1$.

Nehmen wir zuerst an, dass die Norm im Raum X' dritter Art und die Norm in X damit zweiter Art sei. Wir geben jetzt den beiden Zahlen k' und $\tilde{k}'$ den Anfangswert 1, halten danach $\tilde{k}'$ zuerst fest und lassen k' gegen ∞ streben. Wir untersuchen, wie sich die Zahlen $k', \tilde{k}'$ und damit auch die Zahlen $\tilde{k}, k$ ändern, wenn wir sie in diesem Zusammenhang noch so ändern, dass die Bedingungen

$$(2.5\text{-}7) \qquad x'_{k\Sigma}(x_{k\Sigma}) = \|x'_{k\Sigma}\| \, \|x_{k\Sigma}\| = 1 , \quad \|x_{k\Sigma}\| = 1$$

gültig werden. Wenn $k' \to \infty$, muss $k \to 0$ gehen, da sonst auf der rechten Seite der Ungleichung

$$(2.5\text{-}8) \qquad \begin{aligned} 1 &= x'_{k\Sigma}(x_{k\Sigma}) = k' \, k x'_{\lambda}(x_{\lambda}) + \tilde{k}' \, \tilde{k} x'_{\sim\lambda}(x_{\sim\lambda}) \geqq \\ &\geqq k' \, k \, \|x'_{\lambda}\| \, \|x_{\lambda}\| + \tilde{k}' \, \tilde{k} \, \|x'_{\sim\lambda}\| \, \|x_{\sim\lambda}\| \end{aligned}$$

$k' \, k x'_{\lambda}(x_{\lambda}) \geqq k' \, k \, \|x'_{\lambda}\| \, \|x_{\lambda}\| \to \infty$ muss, was der obigen Ungleichung widerspricht. Wenn also $k \to 0$, dann folgt somit aus der Normbedingung (e3) der Definition 1.2-B $\|\tilde{k} x_{\sim\lambda}\| \to \|x_{k\Sigma}\| = 1$. Aus (2.5-8) folgt dann weiterhin, dass auch $\tilde{k}' \|x'_{\sim\lambda}\| \to 1$. Dies beruht darauf, dass die Norm $k' \|x'_{\lambda}\|$ der Projektion von $x'_{k\Sigma}$ auf einer solchen B'-Klasse, die kleiner als diejenige von $x'_{k\Sigma}$ ist, grösser ist als die Norm des Elements $x'_{k\Sigma}$ selbst. Aus (2.5-8) folgt dann unmittelbar $x'_{\sim\lambda}(x_{\sim\lambda}) = \|x'_{\sim\lambda}\| \, \|x_{\sim\lambda}\|$.

Wir geben jetzt, wie oben, den beiden Zahlen k' und $\tilde{k}'$ den Anfangswert 1 und halten danach $\tilde{k}'$ zuerst fest, lassen nun aber k' gegen 0 streben. Wir betrachten, wie sich die Zahlen k', $\tilde{k}'$ und damit auch die Zahlen k, $\tilde{k}$ ändern, wenn wir sie in diesem Zusammenhang noch so ändern, dass die Bedingungen (2.5-7) gültig werden. In diesem Prozess muss $\tilde{k}'$ schliesslich gegen ∞ streben. Dies beruht darauf, dass nach Einsetzen der Bedingung (2.5-7) immer $k' \geqq 1/\|x'_{\lambda}\|$ gilt. Nach dem Obengesagten kann man dann schliessen, dass am Ende des obigen Prozesses $\tilde{k} \to 0$ und damit $k\|x_{\lambda}\| \to 1$. Aus (2.5-8) erhalten wir dann aber $x'_{\lambda}(x_{\lambda}) = \|x'_{\lambda}\| \, \|x_{\lambda}\|$.

Nehmen wir nun zweitens an, dass die Norm in X dritter Art ist und die Normbedingung (e3α) der Definition 1.2-C hat. Wir halten $\tilde{k}'$ zuerst fest und lassen k' gegen Null streben. Nach Einsetzen der Bedingung (2.5-7) gilt dann $\tilde{k}' \, \|x'_{\sim\lambda}\| \to 1$ und $\tilde{k}'\|x'_{\sim\lambda}\| \leqq 1$. Wir werden jetzt zeigen, dass am Schluss dieses Prozesses k gegen ∞ und $\tilde{k} \, \|x_{\sim\lambda}\|$ gegen 1 strebt.

Da die Norm in X dritter Art mit der Normbedingung (e3α) ist und also $\tilde{k} \, \|x_{\sim\lambda}\| > \|x_{k\Sigma}\| = 1$ gilt, muss, da $\tilde{k}'\|x'_{\sim\lambda}\| \to 1$, auch $\tilde{k}\|x_{\sim\lambda}\| \to 1$ gelten. Dies aber bedeutet, dass die Zahl $\tilde{k}$ stets grössere Werte als $1/\|x_{\sim\lambda}\|$

erhält und zuletzt an der Grenze diesen Wert erreicht. Wenn aber die Zahl $\tilde{k}$ in (2.5-8) abnimmt, muss k dann wachsen, damit die Bedingung $\|x_{k\Sigma}\| = 1$ ihre Gültigkeit behält. Falls nämlich k in diesem Zusammenhang nicht wachsen würde, so würde man nach (2.5-8), (2.5-7) und (2.3-1)

$$1 > x'_{k\Sigma}(x_{k\Sigma}) \geqq \|x'_{k\Sigma}\| \, \|x_{k\Sigma}\| = \|x_{k\Sigma}\|$$

haben, wenn wir $x'_{k\Sigma}$ mit der Normbedingung $\|x'_{k\Sigma}\| = 1$ fest halten.

Wenn also $\tilde{k}$ gegen $1/\|x_{\sim\lambda}\|$ abnimmt, wächst gleichfalls k, und es hat daher eine kleinste obere Grenze. Falls diese Grenze von k nicht mit ∞ übereinstimmt, haben wir an der Grenze ein Element

$$x_{k\Sigma} = k x_\lambda + \tilde{k} x_{\sim\lambda} ,$$

das bei endlichem k die Bedingung (2.5-7) erfüllt, unabhängig davon, ob k' bei diesem Wert den Wert 0 erreicht. Da nach der Normbedingung (e3α) der Definition 1.2-C immer

$$\|x_{k\Sigma}\| < \tilde{k} \|x_{\sim\lambda}\|$$

gilt und da $\tilde{k}\|x_{\sim\lambda}\|$ an der Grenze den Wert 1 erreicht, ist dies unter der Bedingung $\|x_{k\Sigma}\| = 1$ nicht möglich. Wenn also $k' \to 0$, dann strebt k gegen ∞, woraus folgt, dass in diesen Prozessen $\tilde{k}\|x_{\sim\lambda}\| \to 1$ geht. Aus (2.5-8) erhalten wir aber dann $x'_\lambda(x_\lambda) = \|x'_\lambda\| \, \|x_\lambda\|$. Indem man nun in (2.5-5) $\tilde{k}'$ gegen Null und damit auch $k'\|x'_\lambda\|$ gegen 1 streben lässt, beweist man analogerweise, dass dann $\tilde{k} \to \infty$ und $k\|x_\lambda\| \to 1$. Die Gültigkeit der Bedingung $x'_{\sim\lambda}(x_{\sim\lambda}) = \|x'_{\sim\lambda}\| \, \|x_{\sim\lambda}\|$ folgt dann unmittelbar aus (2.5-8). Wir haben damit die Gültigkeit der beiden Gleichungen (2.5-4) gezeigt, und unser Hilfssatz ist damit bewiesen.

Hilfssatz 2.5-C. *Es mögen X, x, x_λ $(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ die gleichen Bedeutungen und die gleichen Eigenschaften wie im Hilfssatz* 2.5-B *haben. Wir betrachten weiterhin das Element*

$$x_\Sigma = \sum_\lambda k_\lambda \, x_\lambda , \tag{2.5-9}$$

wobei λ jede ganze Zahl durchläuft und wobei die k_λ beliebige positive Zahlen sein können. Dann gibt es in der B'-Klasse von X', die der Klasse $B(x)$ in X entspricht, ein solches Element x'_Σ, dass

$$x'_\Sigma(x_\Sigma) = \|x'_\Sigma\| \, \|x_\Sigma\| .$$

Beweis. Nehmen wir jetzt an, dass die Norm in X zweiter oder dritter Art ist und dass sie in diesem letzten Fall die Normbedingung (e3α) hat. Folglich ist die Norm in X' entsprechend dritter oder zweiter Art.

Aus dem Beweis des vorigen Hilfssatzes folgt dann, dass, wenn wir das Verhältnis $k'/\tilde{k}'$ von 0 gegen ∞ streben lassen, während (2.5-7) die ganze Zeit hindurch gültig ist, das Verhältnis $k/\tilde{k}$ sich gleichfalls von ∞ bis 0 ändert und diese Änderung stetig ist. Wir können also $k/\tilde{k}$ so wählen, dass das Verhältnis der Koeffizienten der Elemente x_0 und x_1 in den Ansdrücken der Projektionen des Elements $x_{k\Sigma}$ auf den Klassen B_0 und B_1 $(\in \{B_\lambda\,;\, \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\})$ dem Verhältnis der Koeffizienten der gleichen Elemente x_0 und x_1 in dem in (2.5-9) gegebenen Ausdruck des Elements x_Σ gleich ist.

Wenn wir so fortsetzen, finden wir durch vollständige Induktion, dass es ein solches Element x'_Σ in der B'-Klasse $B'(x')$ gibt, dass dasjenige Element x_Σ in der B-Klasse $B(x)$ in X, das die Eigenschaft

$$x'_\Sigma(x_\Sigma) = \|x'_\Sigma\|\,\|x_\Sigma\|$$

besitzt, die Form

$$x_\lambda = \sum_\Sigma k_\lambda\, x_\lambda$$

hat, wobei die Koeffizienten der Elemente x_λ, $\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ mit den Koeffizienten des in (2.5-9) definierten Elements bis auf einen multiplikativen konstanten Faktor übereinstimmen. Unser Hilfssatz ist damit bewiesen.

Satz 2.5-D. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Norm dritter Art mit der Normbedingung* (e3α) *der Definition* 1.2-C *oder mit einer Norm zweiter Art. Es habe X weiterhin die Eigenschaft E der Definition* 2.5-A, *und es sei x_0 ein Element von X, so dass $\|x_0\| \neq 0$, und es sei $B(x_0)$ dessen B-Klasse. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gehört zu der Klasse $B'(x_0')$, die der Klasse $B(x_0)$ entspricht, ein solches Element x', dass $\|x'\| = 1$ und*

$$(1 + \varepsilon)\|x_0\| \geqq x'(x_0) \geqq \|x_0\|\,.$$

Beweis. Es sei $x_0 \in X$ mit der Eigenschaft $\|x_0\| \neq 0$ gegeben, und es sei x' ein beliebiges Element der Klasse $B'(x_0')$ in X'. Offenbar können wir ohne Einschränkung der Behauptung das Element x_0 so normieren, dass $\|x_0\| = 1$ ist. Es sei weiterhin $x \in X$ dasjenige Element der Klasse $B(x_0)$, bei dem

$$x'(x) = \|x'\|\,\|x\|\,. \tag{2.5-10}$$

Das Element x existiert, da X die Eigenschaft E hat.

Es sei nun δ eine beliebige Zahl im Intervall $1 > \delta > 0$, für die wir später noch eine spezielle Einschränkung festlegen werden. Wir bezeichnen mit $\{B_\lambda\,;\, \lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ die Menge solcher B-Klassen, die die

Eigenschaft C der Definition 1.1-B im Verhältnis zur Klasse $B(x_0)$ haben. Bezüglich der Menge $\{B_\lambda\}$ nehmen wir noch an, dass, wenn x_λ und $x_{0\lambda}$ die Projektionen von x bzw. x_0 auf der Klasse B_λ $(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sind, die Bedingungen

$$(1-\delta)^\lambda x_\lambda - x_{0\lambda} \in B_\lambda \quad \text{und} \quad x_{0\lambda} - (1-\delta)^{\lambda+1} x_\lambda \in B_\lambda$$

gelten. Dies ist nach Bedingung 10° der Definition 1.1-A immer möglich.

Wir bezeichnen mit x_a ein solches Element der Klasse $B(x_0)$, dessen Projektion auf der Klasse B_λ $(\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ gleich $(1-\delta)^\lambda x_\lambda$ ist. Dann gilt offenbar

$$x_a - x_0 \in B(x_0) \quad \text{und} \quad x_0 - (1-\delta)x_a \in B(x_0)\,.$$

Weiterhin gilt nach der Bedingung (a) in den Definitionen 1.2-B und 1.2-C der Normen zweiter und dritter Art

$$1 = \|x_0\| \geqq \|x_0 - (1-\delta)x_a\| + (1-\delta)\,\|x_a\|\,,$$

woraus unmittelbar folgt

$$\|x_a\| \leqq \frac{1}{1-\delta}\,. \tag{2.5-11}$$

Weiterhin haben wir nach der oben erwähnten Normbedingung (a) $\|x_a\| \geqq \|x_a - x_0\| + \|x_0\| = \|x_a - x_0\| + 1$, womit nach (2.5-11)

$$\left\{\begin{array}{l} 1 < \|x_a\| \leqq \dfrac{1}{1-\delta} \qquad \text{oder} \qquad 0 < \|x_a\| - \|x_0\| \leqq \dfrac{\delta}{1-\delta}\,, \\[2ex] \|x_a - x_0\| \leqq \dfrac{1}{1-\delta} - 1 = \dfrac{\delta}{1-\delta} \end{array}\right. \tag{2.5-12}$$

gelten.

Nach dem Hilfssatz 2.5-C können wir nun ein solches Element x_a' der Klasse $B'(x_0')$ bestimmen, dass

$$\|x_a'\| = 1 \quad \text{und} \quad 1 < x_a'(x_a) = \|x_a'\|\,\|x_a\| < \frac{1}{1-\delta}\,.$$

Wir haben dann

$$0 < x_a'(x_a - x_0) < x_a'(x_a - x_0) + x_a'(x_0 - (1-\delta)x_a) =$$
$$= \delta x_a'(x_0) < \frac{\delta}{1-\delta}$$

oder

$$x_a'(x_0) < x_a'(x_a) < \frac{1}{1-\delta}.$$

Andererseits haben wir, da x_a' und x_0 zu einander entsprechenden B'- und B-Klassen gehören,

$$x_a'(x_0) \geqq \|x_a'\| \, \|x_0\| = 1 .$$

Als Ergebnis erhalten wir also

$$1 = \|x_a'\| \, \|x_0\| \leqq x_a'(x_0) < \frac{1}{1-\delta} < 1 + \varepsilon = (1+\varepsilon)\|x_a'\| \, \|x_0\| ,$$

wenn wir die Zahl δ so wählen, dass auch $\delta < \dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$ gilt. Unser Satz ist damit bewiesen.

Satz 2.5-E. *Es sei x ein Element des linearen Raums X mit einer Norm zweiter oder dritter Art und zwar so, dass $x'(x) = 0$ bei jedem $x' \in X'$ gilt. Dann haben wir $x = 0$.*

Beweis. Bezeichnen wir mit $B(x)$ die das Element x enthaltende B-Klasse und mit $B'(x')$ die der Klasse $B(x)$ in X' entsprechende B'-Klasse. Es sei $x' \in X'$ ein beliebiges Element der Klasse $B'(x')$. Aus der Annahme folgt $x'(x) = 0$. Nach der Definition der Einteilung der Elemente von X' in B'-Klassen ist dies aber nur möglich, wenn sowohl $x' = 0$ als $x = 0$ ist. Unser Satz ist damit bewiesen.

2.6. *Funktionale im konjugierten Raum von l^p $(p \leqq 1, p \neq 0)$.* Den Raum l^p haben wir schon oft in § 1 und 2 betrachtet. Wir assoziieren jetzt mit jeder Zahl $p \leqq 1$, $p \neq 0$ eine Zahl p', so dass

$$\begin{aligned} p' &= p/p-1 \,, && \text{wenn } -\infty < p < 1 \,, \\ p' &= -\infty && \text{, wenn } p = 1 \,, \\ p' &= 1 && \text{, wenn } p = -\infty \,. \end{aligned}$$

Besonders sei bemerkt, dass aus der Bedingung $0 < p < 1$ oder $-\infty < p < 0$ die Ungleichung $-\infty < p' < 0$ bzw. $0 < p' < 1$ folgt. Wir definieren nun

$$\operatorname{sgn} c = \begin{cases} 0, & \text{wenn } c = 0 \,, \\ c/|c|, & \text{wenn } c \neq 0 \,, \end{cases}$$

wobei c eine beliebige komplexe Zahl bedeutet.

Falls $x = (\xi_n) \in l^p$, bezeichnen wir mit u_k, $k = 1, 2, \ldots$ dasjenige x, bei dem $\xi_k = 1$ und $\xi_n = 0$ ist, wenn $n \neq k$. Wenn $p \leqq 1, p \neq 0$ ist, erhält man dann nach der Definition der Norm zweiter oder dritter Art

$$\|x - \textstyle\sum' \xi_k u_k\| = 0 .$$

Aus der Definition der Norm zweiter Art folgt dann unmittelbar

(2.6-1) $$x = \sum{}' \xi_k u_k = \sum \xi_k u_k \,.$$

Falls $p < 0$ und also eine Norm dritter Art in Frage steht, können wir schliessen, dass jedes Element u_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ zu einer solchen B-Klasse B_k von l^p gehört, deren Elemente die eindimensionale lineare Mannigfaltigkeit aufspannen. Die Projektion von $x - \Sigma' \xi_k u_k$ verschwindet auf jeder der oben erwähnten B-Klassen B_k, $k = 1, 2, \ldots$, und damit also auf jeder B-Klasse, die kleiner als die x enthaltende B-Klasse $B(x)$ ist. Daraus aber folgt dann nach der Definition der Norm dritter Art, dass (2.6-1) auch im Falle $p < 0$ gilt. Aus (2.6-1) folgt dann

(2.6-2) $$x'(x) = \sum \xi_k \, x'(u_k) \,,$$

wobei $x' \in X'$.

Das Problem, das Element $x' \in X'$ darzustellen, geht damit in das Problem über, die Werte für die Ausdrücke

$$x'(u_k), \; k = 1, 2, \ldots$$

zu bestimmen und anschliessend mit Hilfe dieser Werte der Norm $\|x'\|$ einen Ausdruck zu geben. Zu diesem Zweck beweisen wir den folgenden

Satz 2.6-A. *Es sei* $0 < p \leqq 1$. *Jedes in* l^p *definierte stetige Funktional kann man dann auf eine und nur eine Weise in der Form*

(2.6-3) $$x'(x) = \sum \alpha_k \xi_k$$

darstellen, wobei $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) = (\alpha_k)$ *ein Element von* $l^{p'}$ *bedeutet. Man kann dann jedes Element von* $l^{p'}$ *anwenden um ein Element von* $(l^p)'$ *zu definieren, und der Zusammenhang zwischen den Elementen* $x' \in (l^p)'$ *und* $a \in l^{p'}$ *ist eine Kongruenz zwischen den Räumen* $(l^p)'$ *und* $l^{p'}$. *Besonders gilt*

(2.6-4) $$\|x'\| = \begin{cases} \left(\sum{}' |\alpha_k|^{p'}\right)^{1/p'}, & \textit{wenn } 0 < p < 1, \\ \inf{}' |\alpha_k| \,, & \textit{wenn } p = 1 \,. \end{cases}$$

Beweis. Es sei $x' \in (l^p)'$ gegeben. Wir definieren $\alpha_k = x'(u_k)$ Dann bestimmen die Gleichungen (2.6-2) und (2.6-3) den Ausdruck $x'(x)$. Nehmen wir zuerst $0 < p < 1$ an. Den Fall $p = 1$ werden wir später betrachten. Wenn n eine beliebige positive Zahl bedeutet, wählen wir das Element $x \in l^p$ so, dass

(2.6-5) $$\xi_k = \begin{cases} |\alpha_k|^{p'-1} \operatorname{sgn} \bar{\alpha}_k \,, & \text{wenn } 1 \leqq k \leqq n \quad \text{und} \quad \alpha_k \neq 0 \,, \\ 0 \,, & \text{wenn } k > n \quad \text{oder} \quad \alpha_k = 0 \,. \end{cases}$$

Dann gilt, wenn $1 \leqq k \leqq n$ und wenn $\alpha_k \neq 0$, $\alpha_k \xi_k = |\alpha_k|^{p'} = |\xi_k|^p$ sowie damit

$$\|x\| = \left(\sum{}' |\alpha_k|^{p'}\right)^{1/p} \text{ und } x'(x) = \sum{}' |\alpha_k|^{p'} .$$

Wenn das Element $x = (\xi_i)$ in (2.6-3) so gewählt worden ist, dass die ihm entsprechende B'-Klasse in $(l^p)'$ mit derjenigen von x' übereinstimmt, haben wir nach der die Norm definierenden Gleichung (2.3-1)

$$x'(x) \geqq \|x'\| \, \|x\| ,$$

woraus folgt

$$\sum{}' |\alpha_k|^{p'} \geqq \|x'\| \left(\sum{}' |\alpha_k|^{p'}\right)^{1/p} .$$

Hieraus folgt weiterhin

$$\|a\| = \left(\sum{}' |\alpha_k|^{p'}\right)^{1/p'} \geqq \|x'\| . \tag{2.6-6}$$

Da die Komponenten der Elemente $a = (\alpha_i) \in l^{p'}$ und $x = (\xi_i) \in l^p$ solchen Bedingungen genügen, die man an die Koeffizienten der rückläufigen Hölderschen Ungleichung (1.6-2) stellt, erhält man aus dieser Ungleichung

$$x'(x) = \sum \alpha_k \xi_k \geqq \left(\sum{}' |\alpha_k|^{p'}\right)^{1/p'} \left(\sum{}' |\xi_k|^{p}\right)^{1/p} = \|a\| \, \|x\| .$$

Da man weiterhin x beliebig aus derjenigen B-Klasse von l^p, die dem Element a entspricht, wählen kann, erhält man

$$\|x'\| \geqq \|a\| . \tag{2.6-7}$$

Aus den Gleichungen (2.6-6) und (2.6-7) folgt dann $\|x'\| = \|a\|$.

Es sei andererseits das Element $a = (\alpha_n) \in l^{p'}$ gegeben. Nach (2.6-3) kann man dann das Element $x' \in (l^p)'$ definieren. Zwischen den Elementen von $l^{p'}$ und $(l^p)'$ besteht also isometrische Isomorphie, d.h. Kongruenz, wenn $0 < p < 1$ ist.

Wenn $p = 1$ ist, wählen wir das Element $x = x_n = (\xi_k) \neq 0$ so, dass

$$\xi_k = \begin{cases} \operatorname{sgn} \bar{\alpha}_k , & \text{wenn } k = n , \\ 0 , & \text{wenn } k \neq n . \end{cases}$$

Dann folgt aus (2.6-3), dass $x'(x) = |\alpha_n|$ ist. Es sei nun x_n' die Projektion von x' auf derjenigen B'-Klasse $B'(x_n')$ von $(l^p)'$, die derjenigen B-Klasse $B(x_n)$ entspricht, die das Element x_n enthält. Wir haben dann $|\alpha_n| = x'(x) = x_n'(x_n) = \|x_n'\| \, \|x_n\| \geqq \|x_n'\|$, da nach der Definition von x_n die Bedingung $\|x_n\| \geqq 1$ gilt und da weiterhin die Elemente der Klassen $B(x_n)$ und $B'(x_n')$ beide eindimensionale lineare Mannigfaltigkeiten aufspannen und folglich $x_n'(x_n) = \|x_n'\| \, \|x_n\|$ gilt. Da die Norm von $(l^p)'$ dritter

Art ist, haben wir weiterhin $\|x_n'\| \geqq \|x'\|$, und da $|\alpha_n| \geqq \|x_n'\|$, gilt also $|\alpha_n| \geqq \|x'\|$ bei jedem Wert von $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dies aber bedeutet, dass die Norm des Elements $a = (\alpha_n) \in l^{-\infty}$ der Bedingung

$$\|a\| = \inf{}' |\alpha_n| \geqq \|x'\|$$

genügt, wobei $\inf{}' |\alpha_n|$ das Infinum der von Null verschiedenen Zahlen der Menge $\{|\alpha_n|\,;\, n = 1, 2, \ldots\}$ bedeutet. Da $a = (\alpha_k)$ und $x = (\xi_k)$ zu den einander entsprechenden B'- und B-Klassen in den Räumen $l^{-\infty}$ und l^1 gehören, haben wir andererseits

$$x'(x) = \sum{}' \alpha_k \, \xi_k \geqq (\inf{}' |\alpha_k|) \sum{}' |\xi_i| = \|a\| \, \|x\| \, .$$

Da x beliebig aus seiner B-Klasse gewählt werden kann, erhält man aus der letzten Ungleichung $\|x'\| \geqq \|a\|$. Aus den beiden obigen Ungleichungen folgt dann, dass zwischen den Elementen der Räume $(l^p)'$ und $l^{p'}$ auch im Falle $p = 1$ Kongruenz besteht, w.z.b.w.

§ 3 Der zweite konjugierte Raum

3.1. *Die kanonische Transformation des Raums* X. Es sei X ein linearer Raum mit einer Norm zweiter oder dritter Art, und es sei X' sein konjugierter (fastkonjugierter) Raum. Wir bezeichnen mit X'' den konjugierten (fastkonjugierten) Raum von X'. X'' wird auch *der zweite konjugierte* (*fastkonjugierte*) *Raum* von X genannt. Es sei x'' ein beliebiges Element von X''. Wir schreiben im folgenden oft $\langle x', x'' \rangle$ statt $x''(x')$.

Es bedeute nun X^f wie in Nr. 2.1 die Menge aller linearen Funktionale vom Raum X zu seinem assoziierten skalären Feld A. Wir bezeichnen entsprechend mit X^{ff} oder mit $(X')^f$ die Menge aller linearen Funktionale von X^f oder von X' zu ihren assoziierten skalären Feldern A^{ff} oder $(A')^f$. Obgleich X' ein Unterraum von X^f ist, ist X'' im allgemeinen nicht ein Unterraum von X^{ff}. Dagegen ist X'' immer ein Unterraum von $(X')^f$. Jedoch gibt es die kanonische Transformation von X zu X'', die der kanonischen Transformation von X zu X^{ff} ähnlich ist. Wir bezeichnen mit J diese kanonische Transformation von X zu X''. Die Transformation J wird durch die Gleichung

$$\langle x', Jx \rangle = \langle x, x' \rangle, \; x \in X, x' \in X' \tag{3.1-1}$$

definiert, wobei $x''(x') = x'(x)$ und damit also $Jx = x''$ gilt. Wir haben offenbar $x'' \in (X')^f$.

Ebenso wie in 2.1 die Elemente von X' in B'-Klassen eingeteilt wurden, kann man die Elemente von X'' entsprechend in Klassen einteilen, die wir B''-Klassen nennen wollen und die die gleichen Bedingungen wie die in X definierten B-Klassen in der Definition 1.1-A erfüllen. Gleichfalls können wir zeigen, dass die B-, B'- und B''-Klassen der Elemente der Räume X, X', X'' eindeutig einander entsprechen. Besonders sei in diesem Zusammenhang bemerkt, dass sich in der Transformation $x'' = Jx$ die Elemente ein und derselben B-Klasse in X zu den Elementen der entsprechenden B''-Klasse in X'' transformieren.

Es seien nun das Element $x \in B(x)$ und die kanonische Transformation $x'' = Jx$ gegeben. Es sei weiterhin $x' \in X'$ ein beliebiges Element derjenigen B'-Klasse $B'(x')$ von X', die der Klasse $B(x)$ entspricht. Da die Normen in X, X' und X'' nach dem Satz 2.3-B entweder zweiter oder dritter Art sind, erhalten wir nach der Definition 2.3-A

$$x''(x') = x'(x) \geqq \|x'\| \, \|x\| \,, \tag{3.1-2}$$

wobei $x'' = Jx$ bei jedem $x' \in B'(x')$ ist.

Nehmen wir nun an, dass der Raum die Eigenschaft E hat und, falls die Norm in X dritter Art ist, diese Norm der Bedingung (e3α) der Definition 1.2-C genügt. Es mögen weiterhin x, x' und x'' die gleichen Bedeutungen wie oben haben. Nach dem Satz 2.5-D können wir dann die positive Zahl $\varepsilon > 0$ beliebig und das Element x' aus der Klasse $B'(x')$ so wählen, dass

$$(1 + \varepsilon) \, \|x'\| \, \|x\| \geqq x'(x) \geqq \|x'\| \, \|x\| \,. \tag{3.1-3}$$

Da $x''(x') = x'(x)$, wenn $x'' = Jx$ ist, und da andererseits $\|x''\| = = \inf\limits_{\|x'\| = 1} x''(x')$, wobei x' alle der Bedingung $\|x'\| = 1$ genügenden Elemente der Klasse $B'(x')$ durchläuft, folgt aus den Bedingungen (3.1-2) und (3.1-3)

$$(1 + \varepsilon)\|x\| \geqq \inf_{\|x'\| = 1} x''(x') = \|x''\| = \|Jx\| \geqq \|x\| \,. \tag{3.1-4}$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt worden ist, erhalten wir schliesslich

$$\|Jx\| = \|x\| \,. \tag{3.1-5}$$

Hieraus folgt nun unmittelbar, dass, wenn X ein linearer Raum mit einer Norm zweiter oder dritter Art mit der Eigenschaft (e3α) und mit der Eigenschaft E ist, zwischen dem in X'' liegenden Wertevorrat der kanonischen Transformation J und dem Raum X isometrische Isomorphie, also Kongruenz besteht.

Wir stellen nun die folgende Definition auf:

Definition 3.1-A. *Es sei X ein linearer Raum mit einer Norm zweiter oder dritter Art mit der Bedingung* (e3α) *und mit der Eigenschaft E. Falls dann der Wertevorrat von J den ganzen Raum X'' enthält, sagt man, dass*

X *normreflexiv* (*normfastreflexiv*) *oder, kürzer gesagt, reflexiv* (*fastreflexiv*) *ist.*
Wir beweisen den

Satz 3.1-A. *Falls* X *reflexiv* (*fastreflexiv*) *ist, so ist der Raum* X' *fastreflexiv* (*reflexiv*).

Beweis. Es seien J_0 und J_1 die kanonischen Transformationen von X zu X'' bzw. von X' zu X'''. Wir werden zeigen, dass aus der Bedingung $R(J_0) = X''$ die Gleichung $R(J_1) = X'''$ folgt. $R(J_0)$ und $R(J_1)$ bedeuten hier die Wertevorräte von J_0 bzw. J_1, und X''' bedeutet den konjugierten (fastkonjugierten) Raum von X''.

Es sei nun $x''' \in X'''$ beliebig. Wir definieren das Funktional $x' \in X^f$ durch die Gleichung

$$\langle x, x' \rangle = \langle J_0 x, x''' \rangle \,, \tag{3.1-6}$$

wobei x sämtliche Elemente von X durchläuft. Wir bezeichnen $x'' = J_0 x$, womit wir die Gleichung (3.1-6) auch in der Form

$$x'(x) = x'''(x'') \tag{3.1-7}$$

schreiben können. Das Element x''' ist eine im Sinne der Definition 2.2-A stetige (faststetige) Funktion von x'', sowie x'' gleichfalls von x' fast-stetig (stetig) abhängt. Aus (3.1-2), (3.1-7) und (3.1-5) folgt dsnn, dass auch x' von x stetig (faststetig) abhängt und daher $x' \in X'$. Aus (3.1-6) erhalten wir weiterhin

$$\langle x, x' \rangle = \langle x', J_0 x \rangle = \langle J_0 x, x''' \rangle \,,$$

woraus unmittelbar $J_1 x' = x'''$ folgt. Unser Satz ist damit bewiesen.

Weiterhin ist leicht zu zeigen, dass jeder endlichdimensionale Raum mit einer Norm zweiter oder dritter Art reflexiv ist. Wir überlassen jedoch den Beweis dem Leser.

3.2. *Der Raum* L^p. Wir haben in dieser Arbeit nur den Raum l^p als Beispiel betrachtet. Die entsprechenden Ergebnisse kann man auch für den Raum L^p beweisen, d.h. für die Menge, deren Elemente mit solchen Funktionen übereinstimmen, die im Intervall $(a, b; -\infty \leqq a, b \leqq \infty)$ definiert sind und für die das Lebesgue-Integral

$$\int_a^{b}{}' \, |f|^p \, dx$$

definiert ist. Die Bezeichung $\int'$ bedeutet hier, dass nur über diejenigen Punkte im Intervall (a, b) integriert wird, in denen $f \neq 0$ ist. Die Norm des Elements $f \in L^p$ wird dann durch die Gleichung

$$(3.2\text{-}1) \qquad \|f\| = \left(\int_a^{b'} |f|^p \, dx \right)^{1/p}$$

definiert.

Die Einteilung der Elemente des Raumes L^p in B-Klassen erfolgt dadurch, dass man die Elemente $f, g \in L^p$ als zu ein und derselben B-Klasse von L^p gehörig bezeichnet, falls $f\bar{g} \geqq 0$ im ganzen Intervall (a, b) gilt und falls das Gleichheitszeichen nur in denjenigen Punkten des Intervalls (a, b) gültig ist, in denen f und g gleichzeitig verschwinden.

Es gehöre das Element $f \in L^p$ zu einer kleineren B-Klasse in L^p als das Element $g \in L^p$, falls $f\bar{g} \geqq 0$ im ganzen Intervall (a, b) ist und falls aus der Bedingung $fg = 0$ folgt, dass f in diesen Punkten des Intervalls (a, b) verschwindet. Man kann weiterhin zeigen, dass die Norm (3.2-1) erster, zweiter oder dritter Art ist, je nachdem ob $1 \leqq p \leqq \infty$, $0 < p \leqq 1$ oder $-\infty \leqq p < 0$ gilt.

Weiterhin kann man zeigen, dass die rückläufige Höldersche Ungleichung (1.6-2) nun die Form

$$(3.2\text{-}2) \qquad \int_a^b |f\bar{g}| dx \geqq \left(\int_a^{b'} |f|^p \, dx \right)^{1/p} \left(\int_a^{b'} |g|^{p'} \, dx \right)^{1/p'}$$

annimmt, wobei $p \leqq 1, p \neq 0$ und $p' = p/p-1$ ist und f, g jeweils in den gleichen Punkten verschwinden oder von Null verschieden sind.

Die rückläufige Minkowskische Ungleichung (1.7-1) erhält analogerweise die Form

$$(3.2\text{-}3) \qquad \left(\int_a^{b'} |f+g|^p \right)^{1/p} \geqq \left(\int_a^{b'} |f|^p \, dx \right)^{1/p} + \left(\int_a^{b'} |g|^p \, dx \right)^{1/p},$$

wobei $p \leqq 1, p \neq 0$ ist und f, g zu ein und derselben B-Klasse von L^p gehören.

Es sei nun f' ein beliebiges Element von L^q, wobei $q < 0$, und $B'(f')$ sei seine B-Klasse in L^q. Es sei weiterhin $B_1', B_2', \ldots$ eine Reihe von B-Klassen in L^q, und zwar so, dass $B'(f') > B_1' > B_2' > \ldots > B_n' \ldots$ und dass das Lebesgue-Mass derjenigen Punkte im Intervall (a, b), in welchen die Projektion f_n' von f' auf der Klasse B_n' von Null verschieden ist, gegen Null strebt Dann gilt $\|f_n'\| \to \infty$, wenn $n \to \infty$. Daraus folgt, dass es in L^q keine in L^p $(p = q/q-1)$ definierten stetigen Funktionale gibt (vgl. hierzu DAY [2], vgl. auch KÖTHE [3], S. 161—162). Dagegen gibt es dort im Sinne der Definition 2.2-A faststetige Funktionale in L^q, die in L^p definiert sind. Daher kann man in L^q den fastkonjugierten Raum von L^p $(q < 0, p = q/q-1)$ definieren. Dieser so definierte Raum hat weiterhin die Eigenschaft E der Definition 2.5-A. Wir überlassen jedoch die Einzelheiten der Beweise für die in dieser Nummer erwähnten Tatsachen dem Leser.

Universität Oulu
Oulu, Finnland

Schrifttum

[1] Beckenbach, E. F.: A »Workshop» on Minkowski Inequality-Inequalities, edited by Oved Shisha - New York - London 1967.

[2] Day, M. M.: The spaces L^p with $0 < p < 1$ - Bull. Amer. Math. Soc. 46 S. 816—823 (1940).

[3] Köthe, G.: Topologische lineare Räume - Die Grundlehren der Math. Wiss. in Einzeldarstellungen, Bd. 107, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1960.

[4] Taylor, A. E.: Introduction to functional analysis - New York 1958.

Gedruckt Mai 1969