ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

409

VERALLGEMEINERTER RIEMANNSCHER ABBILDUNGSSATZ UND QUASIKONFORME MANNIGFALTIGKEITEN

VON

TAPANI KUUSALO

HELSINKI 1967
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1967.409

Am 12. Mai 1967 vorgelegt von OLLI LEHTO und K. I. VIRTANEN

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1967

Vorwort

Meinen hochverehrten Lehrern, Herrn Prof. Dr. Olli Lehto und Herrn Prof. Dr. K. I. Virtanen sowie Herrn Prof. Dr. Jussi Väisälä will ich hier meinen aufrichtigen Dank für ihre unermüdliche Hilfsbereitschaft aussprechen.

Ferner sei mit Dankbarkeit erwähnt, dass diese Arbeit durch zwei Stipendien von dem Finnischen Kulturfonds und durch ein Staatsstipendium für junge Wissenschaftler finanziell gefördert worden ist.

Helsinki, im Juni 1967.

TAPANI KUUSALO

Einleitung

Die quasikonformen Abbildungen sind eine Art Verallgemeinerung der konformen Abbildungen. Wie infinitesimale Kreise durch konforme Abbildungen eines Gebietes auf ebensolche übergeführt werden, so werden sie durch die differenzierbaren quasikonformen Abbildungen (Grötzsch [6]) auf infinitesimale Ellipsen abgebildet, und zwar so, dass die Dilatationen, d.h. die Achsenverhältnisse der Bildellipsen, eine endliche obere Grenze haben. Die allgemeinen quasikonformen Abbildungen werden etwas anders definiert, sie haben verallgemeinerte Ableitungen und die Dilatationsbedingung soll nur fast überall erfüllt sein (vgl. III.2).

Es erwies sich als ein zentrales Problem der Theorie der quasikonformen Abbildungen zu untersuchen, ob es quasikonforme Abbildungen gibt, die in Punkten eines Gebietes vorgegebene Dilatationen und Dilatationsrichtungen haben (vgl. II.1). Dieses Existenzproblem ist in Spezialfällen früh vor der allgemeinen Theorie der quasikonformen Abbildungen gelöst worden. Schon im Jahr 1822 zeigte Gauss in seiner Kopenhagener Preisschrift [4] die lokale Existenz für quasikonforme Abbildungen mit einer reellanalytischen komplexen Dilatation. Seitdem haben Korn [9] und Lichtenstein [15] das Existenzproblem für Hölderstetige komplexe Dilatationen erledigt, und der Fall stetiger komplexer Dilatationen erhielt seine Lösung in Lavrentieff [11] (für den Zusammenhang zwischen quasikonformen Abbildungen und der Lavrentieffschen Abbildungsklasse s. Näätänen [18]). Die endgültige Lösung des Problems ist von Morrey [17] gegeben, die Bedeutung seiner Resultate für die Theorie der quasikonformen Abbildungen wurde jedoch erst in den 50er Jahren gemerkt (vgl. hierzu auch Martio [16]). Von den späteren Beweisen seien nur diejenigen von Bojarski [3] und Lehto—Virtanen [13] genannt.

Unsere Absicht ist es, hier dem Existenzsatz der quasikonformen Abbildungen einen einfachen und durchsichtigen Beweis mit den Methoden der klassischen Funktionentheorie zu geben.

Im ersten Kapitel werden die quasikonformen Abbildungen von Grötzsch definiert.

Das folgende Kapitel ist den reell-analytischen quasikonformen Abbildungen gewidmet. In diesem Fall können wir das lokale Existenzproblem auf eine gewöhnliche Differentialgleichung zurückführen. Diese Methode ist auch von Ahlfors—Sario [1], S. 125 ff., angewandt worden.

Im dritten Kapitel wird der allgemeine Existenzsatz bewiesen. Hinsichtlich der Funktionen mit verallgemeinerten Ableitungen verweisen wir auf das diesbezügliche Kapitel von Lehto—Virtanen [14]; unsere Normalitätsbetrachtungen sind denjenigen von H. Röhrl in Hurwitz—Courant [7] ähnlich.

Zum Schluss definieren wir sog. quasikonforme Mannigfaltigkeiten. Mit Hilfe des Existenzsatzes wird gezeigt, dass jede quasikonforme Mannigfaltigkeit auch eine analytische Struktur hat.

Es sei noch bemerkt, dass über die vorhandenen Ausführungen schon früher in Lehto [12] referiert worden ist.

I. Reguläre quasikonforme Abbildungen

I.1. *Differenzierbare Abbildungen.* Es sei f eine komplexe Funktion, die in einem Gebiet G der komplexen Ebene $\mathbf{C}$ differenzierbar ist. Dann können wir ihr totales Differential df mit Hilfe der Differentiale dz und $d\bar{z}$ darstellen,

$$df(z) = f_z(z)dz + f_{\bar{z}}(z)d\bar{z}\,, \quad z \in G\,. \tag{1}$$

Die Funktionen f_z und $f_{\bar{z}}$, die auch durch $\partial_z f$ und $\partial_{\bar{z}} f$ bezeichnet werden, heissen die *komplexen Ableitungen* von f. Mit den partiellen Ableitungen f_x und f_y stehen sie im folgenden Zusammenhang:

$$f_x = f_z + f_{\bar{z}}\,, \quad f_y = i(f_z - f_{\bar{z}})\,.$$

Punkte, wo die *Jacobische Funktionaldeterminante*

$$J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 \tag{2}$$

der Abbildung f einen nichtverschwindenden Wert hat, heissen *regulär.* Wenn z ein regulärer Punkt ist und f in einer Umgebung von $w = f(z)$ eine inverse Abbildung g hat, so ist auch g im Punkt w differenzierbar und regulär, und die Ableitungen von g haben die Ausdrücke

$$\begin{aligned} g_z(w) &= (\bar{f}_z/J_f)\,(z)\,, \\ g_{\bar{z}}(w) &= -\,(f_{\bar{z}}/J_f)\,(z)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

I.2. *Quasikonforme Abbildungen.* Nach Grötzsch [6] definiert man die regulären quasikonformen Abbildungen wie folgt:

Definition 1. Eine stetig differenzierbare und homöomorphe Abbildung $f: G \to G'$ zwischen den komplexen Gebieten G und G' ist eine *reguläre quasikonforme Abbildung*, falls sie im Gebiet G eine positive Funktionaldeterminante hat und ihre *maximale Exzentrizität*

(4) $$k_f = \sup_G |f_{\bar{z}}/f_z|$$

kleiner als eins ist.

Unter der *maximalen Dilatation* einer quasikonformen Abbildung f wird die Grösse

(5) $$K_f = (1 + k_f)/(1 - k_f)\,, \quad 1 \leq K_f < \infty\,,$$

verstanden. Wegen der Gleichungen (3) ist auch die Umkehrung g von f quasikonform und hat dieselbe maximale Exzentrizität und Dilatation wie f.

Alle quasikonformen Abbildungen mit einer maximalen Dilatation nicht grösser als K heissen *K-quasikonform.* Die K-Quasikonformität einer Abbildung $f: G \to G'$ ist offensichtlich damit gleichbedeutend, dass alle Richtungsableitungen $\partial_\alpha f$ von f im Gebiet G der Ungleichung

(6) $$|\partial_\alpha f|^2 \leq K J_f$$

genügen. Daraus folgt, dass auch die zusammengesetzte Abbildung $f_1 \circ f_2$ der K_i-quasikonformen Abbildungen f_i eine $(K_1 K_2)$-quasikonforme Abbildung ist. Wir bemerken noch, dass die 1-quasikonformen Abbildungen konform sind und umgekehrt.

I.3. *Modul einer Kurvenschar.* Es sei Γ eine Schar stetig differenzierbarer Kurven in einem Gebiet $G \subset \mathbf{C}$. Alle solchen nichtnegativen Borelschen Funktionen ϱ, die der Ungleichung

(7) $$\int_\gamma \varrho\, |dz| \geq 1$$

für jede Kurve γ der Schar Γ genügen, bilden die *Familie $F(\Gamma)$ der zulässigen Funktionen.* Der *Modul* von Γ wird als die untere Grenze

(8) $$M(\Gamma) = \inf_{F(\Gamma)} \int_G \varrho^2\, d^2 z$$

definiert. Der Modul ist nur von der Schar Γ, nicht von dem enthaltenden Gebiet G abhängig. Für $\Gamma' \subset \Gamma$ gilt offenbar $M(\Gamma') \leq M(\Gamma)$.

Es sei $f: G \to G'$ eine reguläre K-quasikonforme Abbildung. Ist Γ eine Kurvenschar im Gebiet G, $\Gamma' = f(\Gamma)$ ihre Bildschar, ϱ' eine Funktion von $F(\Gamma')$ und $\varrho = (\varrho' \circ f)\,(K J_f)^{1/2}$, so gilt wegen der Ungleichung (6)

$$\int_\gamma \varrho\, |dz| \geq \int_{f(\gamma)} \varrho'\, |dz| \geq 1$$

für alle Kurven $\gamma \in \Gamma$, und ϱ gehört also zu $F(\Gamma)$. Aus

$$\int_G \varrho^2 \, d^2 z = K \int_{f(G)} (\varrho')^2 \, d^2 z$$

folgt deshalb $M(\Gamma) \leq K\, M(\Gamma')$. Auch die Umkehrung von f ist K-quasikonform, und somit erhalten wir die Ungleichungen

$$\frac{1}{K}\, M(\Gamma) \leq M(f(\Gamma)) \leq K\, M(\Gamma) \tag{9}$$

für die Moduln von Γ und $\Gamma' = f(\Gamma)$. Insbesondere folgt aus (9), dass der Modul unter konformen, d.h. 1-quasikonformen Abbildungen, invariant bleibt, der Modul ist also eine *konforme Invariante.*

I.4. *Verzerrung.* Es sei $\Gamma = \Gamma_{q,z}$ die Schar aller stetig differenzierbaren Jordankurven, die im Kreis $B_q(0) = \{z : |z| < q\}$ die Punkte 0 und z, $|z| = d$, von dem Rand $\partial B_q(0)$ des Kreises trennen. Wir definieren in $B_q(0)$ eine Funktion ϱ_0 durch

$$\varrho_0 = \begin{cases} 1/(2\pi\, |z|)\,, & |z| \geq d\,, \\ 1/2d & , \ |z| < d\,. \end{cases}$$

Jede Kurve $\gamma \in \Gamma$ kann in zwei Teile $\gamma_1 = \gamma - B_d(0)$ und $\gamma_2 = \gamma \cap B_d(0)$ zerlegt werden. Für γ_1 erhalten wir

$$\int_{\gamma_1} \varrho_0\, |dz| = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_1} \frac{|dz|}{|z|} \geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma_1} d \arg (z) \right| .$$

Anderseits besteht γ_2 aus offenen Bogen η_i, deren Endpunkte a_i, b auf $\partial B_d(0)$ liegen. Ein einfacher Vergleich der Länge von η_i mit $|\arg (a_i) - \arg (b_i)|$ gibt auch für η_i

$$\int_{\eta_i} \varrho_0\, |dz| \geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\eta_i} d \arg (z) \right| .$$

Daher haben wir

$$\int_{\gamma} \varrho_0\, |dz| \geq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} d \arg (z) \right| = 1\,,$$

und so ist die Funktion ϱ_0 für Γ zulässig. Eine Integration von ϱ_0^2 gibt die Ungleichung $M(\Gamma) \leq (1/2\pi) \log (q/d) + \pi/4$ für den Modul von Γ.

Die Schar Γ enthält auch alle Kreisbogen $\{z : |z| = r\}$, $d < r < q$, die im Kreisring $R = B_q(0) - \overline{B_d(0)}$ liegen. Also erhalten wir mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung für jede Funktion $\varrho \in F(\Gamma)$

$$\left(\int\limits_R \varrho^2 \, d^2z\right)\left(\int\limits_R r^{-2} \, d^2z\right) \geq \left(\int\limits_R \varrho \, dr \, d\varphi\right)^2 =$$

$$\left(\int\limits_d^q d \log(r) \int\limits_0^{2\pi} \varrho \, r \, d\varphi\right)^2 \geq \left(\log \frac{q}{d}\right)^2 .$$

Daraus folgt, dass der Modul von $\Gamma = \Gamma_{q,z}$ nicht kleiner sein kann als $(1/2\pi) \log(q/d)$, und wir haben somit die Ungleichungen

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{q}{|z|} \leq M(\Gamma_{q,z}) \leq \frac{1}{2\pi} \log \frac{q}{|z|} + \frac{\pi}{4} \tag{10}$$

bewiesen.

Hält eine reguläre K-quasikonforme Abbildung $f : B_q(0) \to B_r(0)$ den Nullpunkt fest, so bildet sie $\Gamma_{q,z}$ auf einen Teil von $\Gamma_{r,f(z)}$ ab. Dann gilt wegen (9) die Ungleichung $M(\Gamma_{q,z}) \leq K \, M(\Gamma_{r,f(z)})$ und weiter nach (10)

$$\frac{1}{2\pi} \log \frac{q}{|z|} \leq K \left(\frac{1}{2\pi} \log \frac{r}{|f(z)|} + \frac{\pi}{4}\right),$$

woraus wir die Verzerrungsungleichung

$$|f(z)/r| \leq A \, |z/q|^{\frac{1}{K}} , \quad A = \exp(\pi^2/2) \tag{11}$$

erhalten. In der Tat gilt (11) mit $A = 4$, der Beweis erfordert jedoch umständlichere Betrachtungen (vgl. Lehto—Virtanen [14], S. 67). Übrigens folgt aus der Ungleichung (11), dass kein beschränktes Gebiet K-quasikonform auf die ganze Ebene $\mathbf{C}$ abgebildet werden kann.

Unter Anwendung der konform invarianten Metrik

$$\delta(z_1, z_2) = \left|\frac{z_1 - z_2}{1 - z_1\bar{z}_2}\right| , \quad z_1, z_2 \in B_1(0) , \tag{12}$$

können wir die Ungleichung (11) in der Form

$$\delta(f(z_1), f(z_2)) \leq A \, \delta(z_1, z_2)^{\frac{1}{K}} \tag{13}$$

schreiben, die für alle regulären K-quasikonformen Selbstabbildungen f des Einheitskreises $B_1(0)$ gültig ist.

II. Reell-analytische quasikonforme Abbildungen

II.1. Jeder regulären quasikonformen Abbildung $f: G \to G'$ kann durch $\varkappa_f = f_{\bar{z}}/f_z$ eine stetige Funktion, die *komplexe Dilatation* $\varkappa_f$ von f, zugeordnet werden. Sie bestimmt die Abbildung f bis auf eine konforme Abbildung. Falls nämlich f und g quasikonforme Abbildungen desselben Gebietes G sind, so gilt in G die Gleichung $\varkappa_f = \varkappa_g$ genau dann, wenn f und g durch eine konforme Abbildung h verbunden sind, d.h. $f = h \circ g$ ist.

Wir können umgekehrt eine beliebige in einem Gebiet G messbare Funktionen $\varkappa$,

$$\sup |\varkappa| = k_\varkappa < 1 \,, \tag{14}$$

eine *komplexe Dilatation* mit der *maximalen Exzentrizität* $k_\varkappa$ und der *maximalen Dilatation* $K_\varkappa = (1 + k_\varkappa)/(1 - k_\varkappa)$ nennen. Es gilt dann zu untersuchen, ob es eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung von G gibt, d.h. ob die *Beltramische Gleichung*

$$f_{\bar{z}} = \varkappa f_z \tag{15}$$

in G eine homöomorphe Lösung hat. Um dieses Problem erledigen zu können, ist es nötig, den Begriff der Quasikonformität auf eine umfangsreichere Abbildungsklasse als die Diffeomorphismen zu erweitern. In dem Spezialfall reell-analytischer komplexer Dilatationen kommt man jedoch ohne irgendeine Erweiterung der Abbildungsklasse aus.

II.2. *Reell-analytische komplexe Dilatationen.* Wenn die komplexe Dilatation $\varkappa$ in einem Gebiet G reell-analytisch ist, so kann sie in einer Umgebung irgendeines Punktes $z_0 \in G$ durch eine Potenzreihe in $z - z_0$ und $\overline{z - z_0}$ dargestellt werden. Durch diese Potenzreihendarstellungen wird auch eine analytische Funktion χ zweier komplexen Veränderlichen erklärt, die in einer Umgebung $H \subset \mathbf{C} \times \mathbf{C}$ von $\hat{G} = \{(u, v) : v = \bar{u},\ u \in G\}$ definiert ist und der Gleichung

$$\chi(z\,, \bar{z}) = \varkappa(z)$$

für alle $z \in G$ genügt. Weil $|\varkappa| < 1$ in G gilt, so können wir weiter voraussetzen, dass auch $|\chi| < 1$ in H ist. Der Beltramischen Gleichung (15) entspricht dann eine in H definierte analytische partielle Differentialgleichung

$$t_y = \chi(x\,, y) t_x \,. \tag{16}$$

Denn ist t eine Lösung von (16), so wird durch $f(z) = t(z, \bar{z})$ eine Lösung f der Beltramischen Gleichung gegeben.

Um die Gleichung (16) zu lösen, untersuchen wir in H ihre Charakteristikengleichung

$$\frac{dx}{dy} = - \chi(x, y) . \tag{17}$$

Bekanntlich können wir jedem Punkt $(x_0, y_0) \in H$ eine Umgebung $U \times V$ so zuordnen, dass es für alle $(u, v) \in U \times V$ eine der Anfangsbedingung $g(v) = u$ genügende Lösung $x = g(y; u, v)$ von (17) in V gibt, die eine analytische Funktion aller seiner Argumente in $V \times U \times V$ ist. Setzt man

$$x = h(y, t) = g(y; x_0 + t, y_0 + t) , \tag{18}$$

so gilt die Gleichung $h(y_0 + t, t) = x_0 + t$ identisch für alle t in einer Umgebung des Nullpunktes von $\mathbf{C}$. Wir erhalten daraus durch Differentiation im Punkt $t = 0$

$$- \chi(x_0, y_0) + h_t(y_0, 0) = 1 .$$

Da aber $|\chi(x_0, y_0)| < 1$ ist, so ist $h_t(y_0, 0)$ von Null verschieden. In einer Umgebung $W \subset H$ von (x_0, y_0) können wir also t als eine analytische Funktion $t = t(x, y)$ aus der Gleichung (18) lösen. Dann gilt es in W identisch $h(y, t(x, y)) = x$, und folglich haben wir

$$h_t(y, t)\, t_x(x, y) = 1 ,$$

$$h_t(y, t)\, t_y(x, y) + h_y(y, t) = 0$$

für alle $(x, y) \in W$, $t = t(x, y)$. Aber h ist eine Lösung von (17), und es gilt also in W

$$t_y(x, y) = \chi(x, y)\, t_x(x, y) , \quad t_x(x, y) \neq 0 .$$

Ist insbesondere $(x_0, y_0) = (z_0, \bar{z}_0)$, $z_0 \in G$, so ist die reell-analytische Funktion $f(z) = t(z, \bar{z})$ eine Lösung der Beltramischen Gleichung (15) in einer Umgebung des Punktes z_0. Für die Funktionaldeterminante von f gilt wegen (2) die Formel

$$J_f = (1 - |\varkappa|^2)\, |f_z|^2 .$$

Nun ist $f_z(z_0) = t_x(z_0, \bar{z}_0) \neq 0$, also auch $J_f > 0$, und somit ist f in einer Umgebung D von z_0 homöomorph.

Es sei nun γ ein abgeschlossener analytischer Bogen in G, d.h. γ ist Bild des Intervalls $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ bei einer homöomorphen, reell-analytischen Abbildung mit einer nichtverschwindenden Ableitung. Nach dem vorigen existiert in einer Umgebung D jedes Punktes z_0 von γ eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung f. Weil f reell-analytisch ist, so gibt es in einer Umgebung $D' \subset D$ von z_0 auch eine konforme Abbildung, die auf $\gamma \cap D'$ mit f übereinstimmt. Wenn in einer Umgebung von z_0 eine konforme

Abbildung g gegeben ist, können wir also eine konforme Abbildung h und eine Umgebung $D'' \subset D$ von z_0 finden, so dass die $\varkappa$-quasikonforme Abbildung $h \circ f$ in D'' definiert ist und auf $\gamma \cap D''$ mit g übereinstimmt:

Hilfssatz 1. Sei $\varkappa$ eine im Gebiet G reell-analytische komplexe Dilatation. Dann existiert in einer Umgebung D_0 jedes Punktes z_0 von G eine reell-analytische $\varkappa$-quasikonforme Abbildung f_0. Wenn γ ein abgeschlossener analytischer Bogen ist, $z_0 \in \gamma$, können D_0 und f_0 so bestimmt werden, dass f_0 auf dem Bogen $\gamma \cap D_0$ mit einer vorgegebenen konformen Abbildung übereinstimmt.

Gibt es im Gebiet G eine quasikonforme Abbildung f mit der reell-analytischen komplexen Dilatation $\varkappa$, so muss f nach dem obigen Satz eine reell-analytische Funktion mit einer nichtverschwindenden Funktionaldeterminante sein. Im folgenden nennen wir solche Abbildungen *reell-analytische quasikonforme Abbildungen.* Unter *reell-analytischen quasikonformen Funktionen* werden entsprechend alle (nicht notwendig homöomorphen) Lösungen irgendeiner reell-analytischen Beltramischen Gleichung verstanden. Es ist zu bemerken, dass es quasikonforme Abbildungen gibt, die freilich reell-analytische Funktionen, dabei aber keine reell-analytischen quasikonformen Abbildungen im Sinne unserer Definition sind. Als Beispiel dient die quasikonforme Abbildung $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, $f(z) = z^2 \bar{z}$.

II.3. Mit Hilfe der Uniformisierungstheorie könnten wir nun auch den globalen Existenzsatz für reell-analytische komplexe Dilatationen aus Hilfssatz 1 folgern (vgl. hierzu Lehto—Virtanen [14], S. 205). Die Anwendung der allgemeinen Uniformisierungstheorie wird aber hier durch ein direktes Verfahren vermieden, das der Methode der analytischen Fortsetzung ähnlich ist.

Es sei $\varkappa$ eine im Kreis $B_q(0)$, $0 < q < \infty$, definierte reell-analytische komplexe Dilatation mit der entsprechenden maximalen Dilatation K. Wir untersuchen die Menge R aller solchen Radien $r \leq q$, wofür es eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung f_r des Kreises $B_r(0)$ gibt. Da kein endlicher Kreis K-quasikonform auf $\mathbf{C}$ abgebildet werden kann (vgl. I.4), können wir jede Abbildung f_r vermöge des Riemannschen Abbildungssatzes so normieren, dass sie den Kreis $B_r(0)$ auf einen Kreis $B_{r'}(0)$ abbildet, den Nullpunkt festhält und dort die Bedingung

$$\partial_z f_r(0) = 1 \tag{19}$$

erfüllt.

Wenn r, s, $r \leq s$, zwei Radien aus R sind, so ist $f_s \circ \overleftarrow{f_r}$ eine konforme Abbildung des Kreises $B_{r'}(0)$, und wegen der Bedingung (19) gilt die Gleichung

$$\partial_z (f_s \circ f_r^{\leftarrow})(0) = 1 \, .$$

Für einen Radius $r \in R$ bilden also die konformen Abbildungen $f_s \circ f_r^{\leftarrow}$, $r \leq s \in R$, eine normale Familie in $B_{r'}(0)$ (vgl. Behnke—Sommer [2], S. 388). Wenn nun eine wachsende Folge $r_n \in R$ gegen r konvergiert, so konvergiert deshalb eine Teilfolge der $\varkappa$-quasikonformen Abbildungsfolge f_{r_n} gleichmässig auf kompakten Mengen gegen eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung f von $B_r(0)$. Somit enthält die Menge R auch ihre obere Grenze $\sup R$.

Wir betrachten einen Kreis $\Delta = B_r(0)$, $q > r \in R$, und eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung f von Δ auf sich. Nach Hilfssatz 1 gibt es in einer Umgebung U_a jedes Punktes a des Randes $\partial\Delta$ von Δ eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung g_a, so dass sie den Bogen $\partial\Delta \cap U_a$ identisch auf sich selbst abbildet und $g_a(\overline{\Delta} \cap U_a) = \overline{\Delta} \cap g_a(U_a)$ ist. Die zusammengesetzte Abbildung $f \circ g_a^{\leftarrow}$ ist dann in $g_a(\Delta \cap U_a)$ konform, und kann deshalb mit Hilfe des Schwarzschen Spiegelungsprinzips über den Bogen $\partial\Delta \cap U_a$ zu einer konformen Abbildung h_a fortgesetzt werden. Der Punkt a hat also auch eine solche Kreisumgebung $B(a) \subset U_a$, dass h_a in $g_a(B(a))$ definiert ist. Die Abbildung $f_a = h_a \circ g_a$ stimmt dann in $\Delta \cap B(a)$ mit f überein und gibt folglich eine $\varkappa$-quasikonforme Fortsetzung von f in $\Delta \cup B(a)$. Haben $B(a)$ und $B(b)$ einen nichtleeren Durchschnitt, so gilt $f_a = f_b$ in $\Delta \cap B(a) \cap B(b)$ und daher auch in $B(a) \cap B(b)$. Wir können also f zu einer $\varkappa$-quasikonformen Funktion g in die Umgebung

$$U = \Delta \cup \bigcup_{a \in \partial\Delta} B(a)$$

von $\overline{\Delta}$ fortsetzen. Weil alle Restriktionen $g \mid \Delta = f$ und $g \mid B(a) = f_a$ homöomorph sind und $g(\overline{\Delta} \cap B(a)) = \overline{\Delta} \cap g(B(a))$ ist, so ist g homöomorph auf $\overline{\Delta}$. Es sei $V \subset U$ eine kompakte Umgebung von $\overline{\Delta}$. Weil g lokal homöomorph in U ist, bilden die Punkte $p \in g(V)$, deren Urbild in V aus einem Punkt besteht, eine in $g(V)$ offene Menge W'. Es sei W das Urbild von W' in V. Da g homöomorph auf $\overline{\Delta}$ ist und $g(V - \overline{\Delta}) \cap g(\overline{\Delta}) = \emptyset$ gilt, so ist W eine Umgebung von $\overline{\Delta}$. Die Restriktion von g auf W ist ein Homöomorphismus, besonders können wir einen Kreis $B_s(0) \subset W$, $r < s$, finden, so dass $g \mid B_s(0)$ eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung ist. Daraus folgt, dass $\sup R$ nicht kleiner als q sein kann. Also ist $q = \sup R \in R$, und wir erhalten den folgenden

Satz 1. Es sei $\varkappa$ eine reell-analytische komplexe Dilatation, die in einem Kreis B definiert ist. Dann gibt es eine reell-analytische $\varkappa$-quasikonforme Abbildung f von B auf sich, und alle $\varkappa$-quasikonformen Abbildungen von B sind von der Form $h \circ f$, wo h konform ist.

Auf diesen Linien könnten wir den Satz auch für allgemeinere Gebiete als Kreise beweisen. Um unnötigen Komplikationen vorzubeugen, haben wir ihn nur in dem Umfang begründet, der für uns beim Beweis des allgemeinen Existenzsatzes erforderlich ist.

III. Allgemeine quasikonforme Abbildungen

III.1. *Verallgemeinerte Ableitungen.* Eine im Gebiet G messbare Funktion f heisst *lokal integrierbar*, wenn sie auf jeder kompakten Menge $F \subset G$ integrierbar in bezug auf das Lebesguesche Flächenmass ist. Eine messbare Funktion f *gehört in* G *lokal zu* L^p, $f \in L^p_c(G)$, wenn $|f|^p$ in G lokal integrierbar ist. Die *Konvergenz* wird in $L^p_c(G)$ so definiert, dass eine Folge f_n dann gegen eine Funktion f in $L^p_c(G)$ konvergiert, wenn f_n auf jeder kompakten Menge $F \subset G$ gegen f in $L^p(F)$ konvergiert. Die Folge f_n ist *lokal in* L^p *beschränkt*, wenn sie in jedem $L^p(F)$ beschränkt ist.

Eine stetige Funktion f besitzt im Gebiet G *verallgemeinerte* L^p*-Ableitungen*, falls f absolut stetig auf Geraden in G ist und die fast überall existierenden partiellen Ableitungen f_x und f_y lokal zu L^p gehören (Lehto—Virtanen [14], S. 150 ff.). Die verallgemeinerten komplexen Ableitungen werden dann durch

$$f_z = \tfrac{1}{2}(f_x - if_y)\,, \quad f_{\bar z} = \tfrac{1}{2}(f_x + if_y)\,,$$

definiert.

Aus Hilfssatz 6.2, Lehto—Virtanen [14], S. 152, folgt, dass eine stetige Funktion f dann und nur dann im Gebiet G verallgemeinerte L^p-Ableitungen hat, wenn es zwei Funktionen $g, h \in L^p_c(G)$ gibt, die für alle stetig differenzierbaren Funktionen φ mit einem kompakten Träger in G den folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned} &\int_G (f\varphi_z + g\varphi)\, d^2z = 0\,, \\ (20)\qquad &\int_G (f\varphi_{\bar z} + h\varphi)\, d^2z = 0\,, \end{aligned}$$

genügen. Die verallgemeinerten Ableitungen f_z und $f_{\bar z}$ stimmen dann als Elemente von $L^p_c(G)$ mit g und h überein. Diese Form der Definition der verallgemeinerten Ableitungen rührt von S. L. Sobolew her (vgl. [20], S. 41 ff.).

Es sei f_n eine Folge von Funktionen, die lokal in L^p beschränkte verallgemeinerte Ableitungen hat. Konvergiert f_n gleichmässig auf kompakten Mengen im Gebiet G gegen eine Funktion f, so folgt aus (20), dass auch f verallgemeinerte L^p-Ableitungen in G hat und dass die verallgemeinerten Ableitungen von f_n schwach in L^p gegen f_z und $f_{\bar z}$ konvergieren.

Für eine Funktion f mit verallgemeinerten L^1-Ableitungen gelten die Greenschen Formeln (vgl. Lehto—Virtanen [14], S. 156)

$$\int_{\partial D} f\,dz = 2i \int_D f_{\bar z}\, d^2 z ,$$

$$\int_{\partial D} f\,d\bar z = -\,2i \int_D f_z\, d^2 z ,$$

wo D, $\overline{D} \subset G$, ein Jordangebiet mit einem rektifizierbaren Rand ∂D ist. Aus der ersten Greenschen Formel und dem Moreraschen Satz folgt, dass eine Funktion f mit verallgemeinerten L^1-Ableitungen dann und nur dann in einem Gebiet G analytisch ist, wenn sie in G der *Cauchy-Riemannschen Gleichung*

$$f_{\bar z} = 0$$

genügt.

III.2. *Verallgemeinerte Lösungen der Beltramischen Gleichung.* Sei $\varkappa$ eine im Gebiet G definierte komplexe Dilatation (vgl. II.1). Eine stetige Funktion f mit verallgemeinerten L^2-Ableitungen in G ist eine *verallgemeinerte Lösung* der *Beltramischen Gleichung* (15), wenn ihre Ableitungen f_z und $f_{\bar z}$ in $L_c^2(G)$ der Gleichung genügen.

Definition 2. Ist $\varkappa$ eine messbare komplexe Dilatation im Gebiet G, so heissen alle verallgemeinerten Lösungen der Beltramischen Gleichung

$$f_{\bar z} = \varkappa f_z$$

$\varkappa$-quasikonforme Funktionen, die homöomorphen Lösungen sind *$\varkappa$-quasikonforme Abbildungen.*

Es ist zu beachten, dass reguläre quasikonforme Abbildungen auch gemäss der neuen Definition quasikonform sind. Für äquivalente Definitionen der quasikonformen Abbildungen und Funktionen, siehe z.B. Gehring [5], Lehto—Virtanen [14], insbesondere S. 176 und 194. Aus III.1 folgt übrigens, dass eine quasikonforme Funktion dann und nur dann in einem Gebiet G analytisch ist, wenn ihre komplexe Dilatation fast überall verschwindet.

Sei f eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung des Gebietes G, und k die entsprechende maximale Exzentrizität. Da f verallgemeinerte L^2-Ableitungen besitzt, so ist sie ein absolut stetiger Homöomorphismus (vgl. Lehto—Virtanen [14], S. 158). Nullmengen werden also durch f auf Nullmengen bezogen, das Bild einer messbaren Menge A ist messbar, und weiterhin gilt für das Lebesguesche Flächenmass m die Transformationsformel

$$m(f(A)) = \int_A J_f \, d^2z = \int_A (1 - |\varkappa|^2) \, |f_z|^2 \, d^2z \, . \tag{21}$$

Wir erhalten daraus die folgenden Abschätzungen für die L^2-Normen von f_z und $f_{\bar z}$ auf einer kompakten Menge $F \subset G$:

$$\begin{aligned} \int_F |f_z|^2 \, d^2z &\leq \frac{m(f(F))}{1 - k^2} \, , \\ \int_F |f_{\bar z}|^2 \, d^2z &\leq k^2 \, \frac{m(f(F))}{1 - k^2} \, . \end{aligned} \tag{22}$$

Es sei $f : G \to G'$ eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung und g eine in G' definierte Funktion mit L^2-Ableitungen. Dann besitzt auch die zusammengesetzte Funktion $h = g \circ f$ verallgemeinerte L^1-Ableitungen (Lehto—Virtanen [14], S. 159), und es gilt in $L_c^1(G)$

$$\begin{aligned} h_z &= (g_z \circ f) \, f_z + (g_{\bar z} \circ f) \, \overline{f_{\bar z}} \, , \\ h_{\bar z} &= (g_z \circ f) \, f_{\bar z} + (g_{\bar z} \circ f) \, \overline{f_z} \, . \end{aligned} \tag{23}$$

Vermöge der Gleichung (21) gilt für jede kompakte Menge $F \subset G$

$$(1 - k^2) \int_F |(g_z \circ f) \, f_z|^2 \, d^2z \leq \int_F |(g \circ f)|^2 \, J_z \, d^2z = \int_{f(F)} |g_z|^2 \, d^2z \, .$$

Gleicherweise sehen wir, dass auch die anderen Glieder auf der rechten Seiten der Gleichungen (23) L_c^2-Funktionen sind. Die Funktion $h = g \circ f$ hat also verallgemeinerte L^2-Ableitungen. Ist g insbesondere eine λ-quasikonforme Funktion, so ist auch h quasikonform und hat eine komplexe Dilatation μ, die die Gleichung

$$(f_z + \overline{f_z \varkappa} (\lambda \circ f)) \, \mu = \varkappa f_z + \overline{f_z} (\lambda \circ f)$$

erfüllt und deren maximale Exzentrizität der Ungleichung

$$k_\mu \leq \frac{k_\varkappa + k_\lambda}{1 + k_\varkappa k_\lambda} \tag{24}$$

genügt. Ist g analytisch, d.h. quasikonform mit einer verschwindenden komplexen Dilatation, so hat h dieselbe komplexe Dilatation $\varkappa$ wie f.

III.3. *Existenzsatz der quasikonformen Abbildungen.* Im Einheitskreis $\Delta = B_1(0)$ sei eine komplexe Dilatation $\varkappa$ mit

$$\sup_{\Delta} |\varkappa| = k < 1$$

gegeben. Vermöge der Sätze von Lusin und Stone—Weierstrass können wir eine Folge $\varkappa_n$ von Polynomen in z und $\bar{z}$ mit $\sup |\varkappa_n| \leq k$ finden, die im Mass gegen $\varkappa$ konvergiert. Nach Satz 1 gibt es für jedes $\varkappa_n$ eine reell-analytische $\varkappa_n$-quasikonforme Abbildung f_n des Einheitskreises Δ auf sich, die den Nullpunkt festhält. Diese Abbildungen f_n samt ihren Umkehrungen g_n sind K-quasikonform, $K = (1 + k)/(1 - k)$, und so gelten wegen (13) die Ungleichungen

$$|f_n(z) - f_n(z')| \leq 2A\ \delta(z, z')^{\frac{1}{K}}$$

$$|g_n(z) - g_n(z')| \leq 2A\ \delta(z, z')^{\frac{1}{K}}$$

für alle $z, z' \in \Delta$. Also bilden sowohl $f_n : \Delta \to \bar{\Delta}$ als $g_n : \Delta \to \bar{\Delta}$ eine gleichgradig stetige Familie, die nach dem Satz von Ascoli—Arzelà normal ist. Die Folgen f_n und g_n können deshalb so gewählt werden, dass sie in Δ gleichmässig auf kompakten Mengen gegen stetige Funktionen f und g konvergieren, $f(0) = g(0) = 0$.

Die Funktion δ ist durch (12) auch auf $\Delta \times \bar{\Delta}$ definiert und stetig, und es gilt $\delta(z, z') = 1$ genau dann, wenn (z, z') zu $\Delta \times (\bar{\Delta} - \Delta)$ gehört. Gibt es Punkte $z, z' \in \Delta$ mit $|f(z)| < 1$, $|f(z')| = 1$, so erhalten wir also aus (13)

$$1 = \delta(f(z), f(z')) \leq A\ \delta(z, z')^{\frac{1}{K}}.$$

Die Punkte $z \in \Delta$ mit $f(z) \in \bar{\Delta} - \Delta$ bilden folglich eine offene und abgeschlossene Menge, und wegen $f(0) = 0$ muss diese Menge leer sein. In derselben Weise zeigt man, dass auch g eine Abbildung von Δ in sich ist. Für jedes $z \in \Delta$ gilt ferner

$$\delta(z, g \circ f(z)) = \lim_{n} \delta(g_n \circ f_n(z), g_n \circ f(z)) \leq A \lim_{n} \delta(f_n(z), f(z))^{\frac{1}{K}} = 0,$$

gleicherweise $\delta(z, f \circ g(z)) = 0$. Also sind f und g inverse Abbildungen voneinander und somit Homöomorphismen des Einheitskreises Δ auf sich selbst.

Wegen der Ungleichungen (22) sind die L^2-Normen der verallgemeinerten Ableitungen von f_n und g_n beschränkt, und so haben auch f und g verallgemeinerte L^2-Ableitungen, die in $L^2(\Delta)$ schwache Grenzwerte der Ableitungen von f_n und g_n sind (vgl. III.1). Da aber $\varkappa_n$ im Mass gegen $\varkappa$ konvergiert, so konvergiert wegen der L^2-Beschränktheit von $\partial_z f_n$ auch $\partial_{\bar z} f_n = \varkappa_n \partial_z f_n$ schwach gegen $\varkappa f_z$. Die Funktion f ist also eine verallgemeinerte Lösung der Beltramischen Gleichung und somit eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung.

Die Umkehrfunktion g von f hat L^2-Ableitungen, und da $g \circ f = id$ ist, so folgt aus den Formeln (23), dass für die Funktionaldeterminanten J_f und J_g die Gleichung

$$(J_g \circ f)\, J_f = 1$$

fast überall gilt. Also sind J_f und J_g fast überall von Null verschieden, und auch g ist eine quasikonforme Abbildung mit der fast überall definierten komplexen Dilatation

$$\lambda = -\,(\varkappa f_z / \overline{f_z}) \circ g\,. \tag{25}$$

Weil $f \circ g = id$ ist, verschwindet die komplexe Dilatation von $f \circ g$ und deshalb auch die komplexe Dilatation von $f' \circ g$ für jede in Δ definierte $\varkappa$-quasikonforme Funktion f'. Alle $\varkappa$-quasikonformen Funktionen des Einheitskreises Δ sind also von der Form $h \circ f$, wo h eine analytische Funktion ist.

Die obigen Resultate erweitern sich ohne weiteres für alle endlichen Kreise, und dadurch können wir die lokalen Eigenschaften der quasikonformen Abbildungen beherrschen. Besonders folgt daraus, dass die Umkehrung einer quasikonformen Abbildung quasikonform ist, dass zwei $\varkappa$-quasikonforme Abbildungen desselben Gebietes durch eine konforme Abbildung verbunden sind und dass die Funktionaldeterminante irgendeiner quasikonformen Abbildung fast überall von Null verschieden ist. Wenn eine Abbildung f sowohl $\varkappa$- als λ-quasikonform ist, so muss folglich $\varkappa = \lambda$ fast überall gelten. Darum hat eine quasikonforme Abbildung $f : G \to G'$ eine durch ihre komplexe Dilatation $\varkappa_f$ eindeutig bestimmte maximale Exzentrizität

$$k_f = \sup_G \operatorname{ess} |\varkappa_f| \tag{26}$$

und maximale Dilatation $K_f = (1 + k_f)/(1 - k_f)$. Für zusammengesetzte Abbildungen gilt ferner wegen (24)

$$K_{f \circ g} \le K_f K_g\,. \tag{27}$$

Zunächst werden wir beweisen, dass jeder in der ganzen Ebene $\mathbf{C}$ definierten komplexen Dilatation $\varkappa$ eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung von $\mathbf{C}$ entspricht. Dabei wird auch das Existenzproblem für alle ebenen Gebiete vollständig erledigt. Denn ist eine komplexe Dilatation $\varkappa$ in einem Gebiet $G \subset \mathbf{C}$ definiert, so können wir sie in $\mathbf{C}$ erweitern, indem wir z.B. $\varkappa = 0$ ausserhalb G setzen. Sobald wir eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung f von $\mathbf{C}$

haben, gibt die Restriktion von f auf G eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung von G.

Sei nun eine komplexe Dilatation $\varkappa$ in der ganzen Ebene $\mathbf{C}$ gegeben. In jedem Kreis $B_r(0)$, $1 \leq r < \infty$, existiert dann eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung f_r. Diese können so gewählt werden, dass sie den Nullpunkt festhalten und dass die konformen Abbildungen $f_r \circ \overleftarrow{f_1}$ durch $\partial_z(f_r \circ \overleftarrow{f_1})(0) = 1$ normiert sind. Wie auf S. 13 können wir deshalb eine Folge $r_n \to \infty$ finden, so dass die Abbildungen f_{r_n} gleichmässig auf kompakten Mengen gegen eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung f von $\mathbf{C}$ konvergieren.

Die Umkehrung $\overleftarrow{f} : f(\mathbf{C}) \to \mathbf{C}$ ist eine quasikonforme Abbildung mit einer komplexen Dilatation μ. Wir setzen $\mu = 0$ ausserhalb $f(\mathbf{C})$; es gibt dann eine μ-quasikonforme Abbildung $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$. Die Abbildung $g \circ f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ ist dann konform, und deshalb gilt $g(f(\mathbf{C})) = \mathbf{C}$. Da aber g ein Homöomorphismus von $\mathbf{C}$ ist, so muss auch $f(\mathbf{C}) = \mathbf{C}$ sein. Wir haben also bewiesen:

Satz 2. (Existenzsatz) Jeder komplexen Dilatation $\varkappa$ in $\mathbf{C}$ entspricht eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung von $\mathbf{C}$ auf sich selbst.

Sei $G \subset \mathbf{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Wie wir gesehen haben, gibt es für jede quasikonforme Abbildung f von G eine quasikonforme Abbildung $g : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$, die auf G dieselbe komplexe Dilatation $\varkappa$ hat wie f. Diese gestattet eine Darstellung $f = h \circ g : G \to \mathbf{C}$, wo h konform ist. Weil g ein Homöomorphismus von $\mathbf{C}$ auf sich selbst ist, so sind vermöge des Riemannschen Abbildungssatzes G und $g(G)$, also auch G und $f(G)$ zueinander konform äquivalent. Wenn umgekehrt G' zu G und somit zu $g(G)$ konform äquivalent ist, so gibt es eine konforme Abbildung h, so dass G durch $h \circ g$ $\varkappa$-quasikonform auf G' bezogen wird. Wir haben also den *Riemannschen Abbildungssatz für $\varkappa$-quasikonforme Abbildungen* als eine Folgerung des Existenzsatzes erhalten:

Korollar 2.1. Das einfach zusammenhängende Gebiet G kann dann und nur dann $\varkappa$-quasikonform auf ein anderes Gebiet G' abgebildet werden, wenn G und G' konform äquivalent sind.

Korollar 2.2. Die $\varkappa$-quasikonformen Funktionen in einem Gebiet G sind genau diejenigen Funktionen f, die sich aus einer analytischen Funktion h und einer $\varkappa$-quasikonformen Abbildung g zusammensetzen, $f = h \circ g$.

Beweis: Ist $g : G \to G'$ eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung, so verschwindet die komplexe Dilatation von $f \circ \overleftarrow{g}$ für jede $\varkappa$-quasikonforme Funktion f von G.

IV. Quasikonforme Mannigfaltigkeiten

In Analogie mit der Definition der analytischen Struktur und der Riemannschen Fläche können wir quasikonforme Strukturen und quasikonforme Mannigfaltigkeiten definieren. Unter Anwendung des Existenzsatzes lässt sich jedoch erweisen, dass wir jede quasikonforme Mannigfaltigkeit mit einer analytischen Struktur versehen können. Dieses Resultat zeigt, dass das Abzählbarkeitstheorem von T. Radó auf quasikonforme Mannigfaltigkeiten erweitert werden kann. (Für die im folgenden benutzten Begriffe und Bezeichnungen der Theorie der Mannigfaltigkeiten wird auf Lang [10] verwiesen.)

Definition 3. Sei X eine zweidimensionale reelle Mannigfaltigkeit, die das Hausdorffsche Trennungsaxiom erfüllt. Ein *Atlas* $\mathfrak{Q} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbf{C}), \alpha \in I\}$ von X definiert eine *lokal quasikonforme Struktur* auf X, falls es für jedes $\alpha \in I$ eine endliche Konstante K_α gibt, so dass alle Abbildungen $\varphi_\alpha \circ \overset{\leftarrow}{\varphi_\beta}$, $\beta \in I$, auf $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ K_α-quasikonform sind. Wenn noch alle K_α, $\alpha \in I$, unter einer endlichen Schranke K liegen, so definiert $\mathfrak{Q}$ eine *K-quasikonforme Struktur* auf X. Die mit einer quasikonformen Struktur $\mathfrak{Q}$ versehene Mannigfaltigkeit X wird durch $X_\mathfrak{Q}$ bezeichnet.

Sind alle Abbildungen $\varphi_\alpha \circ \overset{\leftarrow}{\varphi_\beta}$ in der obigen Definition konform, so definiert $\mathfrak{Q}$ eine *analytische Struktur* auf X. $X_\mathfrak{Q}$ ist dann eine analytische Mannigfaltigkeit, und ist X zusammenhängend, so ist $X_\mathfrak{Q}$ eine *Riemannsche Fläche.* Umgekehrt ist jede Riemannsche Fläche eine quasikonforme Mannigfaltigkeit. Wir werden später sehen, dass zusammenhängende quasikonforme Mannigfaltigkeiten in gewissem Sinne nicht allgemeiner sind als Riemannsche Flächen.

Für lokal quasikonforme Mannigfaltigkeiten $X_\mathfrak{Q}$, $X'_{\mathfrak{Q}'}$, kann der Begriff einer quasikonformen Funktion folgendermassen definiert werden:

Definition 4. Die Funktion $f : X_\mathfrak{Q} \to X'_{\mathfrak{Q}'}$ ist *lokal quasikonform*, falls für jede kompakte Menge $E \subset X_\mathfrak{Q}$ alle Funktionen $\varphi'_\alpha \circ f \circ \overset{\leftarrow}{\varphi_\beta}$, $\varphi'_\alpha \in \mathfrak{Q}'$, $\varphi_\beta \in \mathfrak{Q}$, im Inneren von $\varphi_\beta(E \cap U_\beta \cap \overset{\leftarrow}{f}(U'_\alpha)) \subset \mathbf{C}$ quasikonform sind. Wenn alle Funktionen $\varphi'_\alpha \circ f \circ \overset{\leftarrow}{\varphi_\beta}$ auf $\varphi_\beta(U_\beta \circ \overset{\leftarrow}{f}(U'_\alpha))$ K-quasikonform sind, so wird f *K-quasikonform* genannt.

Für ein ebenes Gebiet G ist die lokale Quasikonformität einer Funktion $f : G \to \mathbf{C}$ dazu äquivalent, dass f auf jedem Teilgebiet H mit einer kompakten abgeschlossenen Hülle $\bar{H} \subset G$ quasikonform ist.

Der Zusammenhang zwischen quasikonformen Mannigfaltigkeiten und Riemannschen Flächen geht aus dem folgenden Satz hervor:

Satz 3. Für jede lokal quasikonforme Mannigfaltigkeit $X_{\mathfrak{Q}}$ gibt es eine analytische Struktur $\mathfrak{A}$ auf X, so dass die identische Abbildung $id : X_{\mathfrak{A}} \to X_{\mathfrak{Q}}$ lokal quasikonform ist. Insbesondere sind die Abbildungen φ_α des Atlas $\mathfrak{Q}$ K_α-quasikonform in Bezug auf $\mathfrak{A}$.

Beweis. Wir können wenigstens gewissen Untermannigfaltigkeiten von $X_{\mathfrak{Q}}$ eine analytische Struktur geben, z.B. wird eine solche auf jede Koordinatenumgebung $U_\alpha \subset X$ durch die Abbildung $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbf{C}$ induziert. Wir definieren eine halbgeordnete Familie $\mathfrak{F}$ der *offenen analytischen Untermannigfaltigkeiten* R von X wie folgt: R gehört zu $\mathfrak{F}$, wenn die Restriktion jeder Abbildung $\varphi_\alpha \in \mathfrak{Q}$ auf R eine K_α-quasikonforme Abbildung ist, und $R \leq R'$, wenn $R \subset R'$ und die Inklusionsabbildung $i : R \to R'$ konform ist.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine linear geordnete Unterfamilie von $\mathfrak{F}$. Die Vereinigung

$$R_0 = \bigcup_{R \in \mathfrak{G}} R$$

ist eine offene Untermannigfaltigkeit von X. Weil die analytischen Strukturen von $R \in \mathfrak{G}$ miteinander kompatibel sind, können wir auf R_0 eine analytische Struktur definieren, so dass die Inklusionen $i : R \to R_0$, $R \in \mathfrak{G}$, konform sind. Die Abbildungen $\varphi_\alpha \in \mathfrak{Q}$ sind dann K_α-quasikonform auf R_0 und R_0 gehört zu $\mathfrak{F}$. Eine beliebige linear geordnete Unterfamilie $\mathfrak{G}$ hat also eine obere Grenze in $\mathfrak{F}$, und aus dem Zornschen Lemma folgt die Existenz einer maximalen analytischen Mannigfaltigkeit $R_m \in \mathfrak{F}$.

Es seien U_α eine Koordinatenumgebung des Atlas $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{A} = \{(V_\beta, \ \psi_\beta : V_\beta \to \psi_\beta(V_\beta) \subset \mathbf{C}, \ \beta \in J\}$ ein Atlas der maximalen analytischen Mannigfaltigkeit R_m. Da R_m zu $\mathfrak{F}$ gehört, so sind alle Abbildungen $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{\leftarrow}$ auf $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)$ K_α-quasikonform. Weil zwei Abbildungen $\psi_\beta, \psi_\gamma \in \mathfrak{A}$ in $V_\beta \cap V_\gamma$ durch die konforme Abbildung $\psi_\beta \circ \psi_\gamma^{\leftarrow}$ verbunden sind, so haben die quasikonformen Abbildungen $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{\leftarrow}$ und $\psi_\gamma \circ \varphi_\alpha^{\leftarrow}$ in $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma)$ dieselbe komplexe Dilatation. Es gibt also in $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap R_m)$ eine messbare komplexe Dilatation $\varkappa$, so dass alle Abbildungen $\psi_\beta \circ \varphi_\alpha^{\leftarrow}$ in $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap V_\beta)$ $\varkappa$-quasikonform sind. Setzen wir noch $\varkappa = 0$ ausserhalb $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap R_m)$, so gibt es nach dem Existenzsatz eine $\varkappa$-quasikonforme Abbildung $f : \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \mathbf{C}$. Die Restriktion der Abbildung $\psi = f \circ \varphi_\alpha$ auf R_m ist also konform, und der Atlas $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cup \{(U_\alpha, \psi : U_\alpha \to \psi(U_\alpha) \subset \mathbf{C})\}$ definiert eine analytische Struktur auf $R' = R_m \cup U_\alpha$. Da die Abbildung $\psi = f \circ \varphi_\alpha$ auf $U_\alpha \cap R_m$ in bezug auf $R_m \in \mathfrak{F}$ konform ist und da andererseits die komplexe Dilatation von f ausserhalb $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap R_m)$ verschwindet, so sind alle Abbildungen $\varphi_\beta \circ \psi^{\leftarrow} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{\leftarrow} \circ f^{\leftarrow}$ auf $\psi(U_\alpha \cap U_\beta)$ K_β-quasikonform. Also ist auch R' ein Glied der Familie $\mathfrak{F}$. Es gilt jedoch $R_m \leq R'$, und da R_m maximal ist, so müssen wir $R' = R_m \cup U_\alpha = R_m$ haben. Die analytische Mannigfaltigkeit R_m enthält somit jede Koordinatenumgebung

$U_\alpha \in \mathfrak{Q}$ und muss folglich gleich X sein. Weil R_m zu $\mathfrak{F}$ gehört, so hat ihre analytische Struktur $\mathfrak{A}$ die gewünschten Eigenschaften.

Wir sind nun imstande, eine Verallgemeinerung des Abzählbarkeitstheorems von T. Radó zu beweisen:

Korollar 3.1. Alle lokal quasikonformen Mannigfaltigkeiten sind parakompakt.

Beweis. Die Parakompaktheit einer endlichdimensionalen Mannigfaltigkeit X ist damit gleichbedeutend, dass alle Zusammenhangskomponenten von X das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllen. Wenn nun $X_{\mathfrak{Q}}$ eine lokal quasikonforme Mannigfaltigkeit ist, so können wir sie mit einer analytischen Struktur $\mathfrak{A}$ versehen. Dann sind alle Zusammenhangskomponenten von $X_{\mathfrak{A}}$ Riemannsche Flächen und erfüllen also nach dem Satz von Radó [19] das zweite Abzählbarkeitsaxiom, woraus die Behauptung folgt.

Über das Problem der Abzählbarkeit und Parakompaktheit von Mannigfaltigkeiten vgl. Kneser [8].

Mathematisches Institut
Universität Helsinki

Literatur

[1] Ahlfors, L. V. and L. Sario: Riemann Surfaces. - Princeton, Princeton University Press 1960.

[2] Behnke, H. und F. Sommer: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen, 3. Aufl. - Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag. 1965.

[3] Bojarski, B. V.: Гомеоморфные решения систем Бельтрами. - Докл. Акад. Наук СССР *102* (1955).

[4] Gauss, C. F.: Allgemeine Auflösung der Aufgabe, die Theile einer gegebenen Fläche auf einer andern gegebenen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. - Astronomische Abhandlungen herausgegeben von H. C. Schumacher, 3. Heft, Altona 1825. Auch: Carl Friedrich Gauss Werke, Bd. IV, S. 189–216. - Göttingen, Dieterichsche Universitäts-Druckerei 1880.

[5] Gehring, F. W.: The definitions and exceptional sets for quasiconformal mappings. - Ann. Acad. Sci. Fenn. A I *281* (1960).

[6] Grötzsch, H.: Über die Verzerrung bei schlichten nichtkonformen Abbildungen und über eine damit zusammenhängende Erweiterung des Picardschen Satzes. - Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig *80*, 503–507 (1928).

[7] Hurwitz, A. und R. Courant: Funktionentheorie, 4. Aufl. - Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1964.

[8] Kneser, H.: Analytische Struktur und Abzählbarkeit. - Ann. Acad. Sci. Fenn. A I 251/5 (1958).

[9] Korn, A.: Zwei Anwendungen der Methode der sukzessiven Annäherungen. - Mathematische Abhandlungen Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum, S. 215–229. Berlin, Verlag von Julius Springer 1914.

[10] Lang, S.: Introduction to Differentiable Manifolds. - New York-London, John Wiley & Sons, Inc. 1962.

[11] Lavrentieff, M. A.: Sur une classe de représentations continues. - Rec. Math. *48*, 407–423 (1935).

[12] Lehto, O.: Homeomorphic solutions of a Beltrami differential equation. - Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna, S. 58–65. Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1966.

[13] —»— and K. I. Virtanen: On the existence of quasiconformal mappings with prescribed complex dilatation. - Ann. Acad. Sci. Fenn. A I *274* (1960).

[14] —»— und K. I. Virtanen: Quasikonforme Abbildungen. - Berlin-Heidelberg-New York, Springer-Verlag 1965.

[15] Lichtenstein, L.: Zur Theorie der konformen Abbildungen; Konforme Abbildungen nicht-analytischer singularitätenfreier Flächenstücke auf ebene Gebiete. - Bull. Acad. Sci. Cracovie, 192–217 (1916).

[16] Martio, O.: Boundary values and injectiveness of the solutions of Beltrami equations. - Ann. Acad. Sci. Fenn. A I *402* (1967).

[17] Morrey, C. B.: On the solutions of quasi-linear elliptic partial differential equations. - Trans. Amer. Math. Soc. *43*, 126–166 (1938).

[18] Näätänen, M.: Maps with continuous characteristics as a subclass of quasiconformal maps. - Ann. Acad. Sci. Fenn. A I *410* (1967).

[19] Radó, T.: Über den Begriff der Riemannschen Fläche. - Acta Litterarum Ac Scientiarum II, 101–121, Szeged (1925).

[20] Sobolew, S. L.: Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik. - Berlin, Akademie-Verlag 1964.

Gedruckt Juni 1967