ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

406

ÜBER DIE WERTEVERTEILUNG PSEUDOANALYTISCHER FUNKTIONEN

VON

KLAUS HABETHA

Meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. WOLFGANG HAACK, zu seinem 65. Geburtstag am 24. April 1967 gewidmet

HELSINKI 1967
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1967.406

Am 13. Januar 1967 vorgelegt von R. NEVANLINNA und OLLI LEHTO

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1967

Über die Werteverteilung pseudonalytischer Funktionen *

Einleitung

L. Bers hat in mehreren Veröffentlichungen [2]—[4] eine Funktionentheorie für die pseudoanalytischen Funktionen entwickelt. Diese Funktionenklasse wird dadurch charakterisiert, dass sie anstelle von 1 und i zwei beliebige Funktionen $F(z)$ und $G(z)$ enthält, sowie mit zwei Funktionen auch deren Linearkombinationen mit reellen Koeffizienten und dass eine pseudoanalytische Funktion an ihren Nullstellen komplex differenzierbar ist.

Definition. *Zwei komplexe Funktionen $F(z)$ und $G(z)$ heissen erzeugendes Paar, wenn sie in jeder kompakten Teilmenge des betrachteten Gebietes gleichmässig Hölderstetig sind und wenn*

$$\Delta = \operatorname{Im}\{\bar{F}(z)\, G(z)\} > 0 \tag{0.1}$$

ist.

Dann kann jede komplexe Zahl als reelle Linearkombination von $F(z)$ und $G(z)$ dargestellt werden, insbesondere auch eine beliebige komplexe Funktion:

$$w(z) = \Phi(z)\, F(z) + \Psi(z)\, G(z)\,, \qquad \Phi\,,\ \Psi \quad \text{reell.} \tag{0.2}$$

Definition. *Eine komplexe Funktion $w(z)$ heisst im Gebiet G pseudoanalytisch (1. Art) bezüglich des erzeugenden Paares $F(z)$ und $G(z)$, falls für alle $z_0 \in G$ der Grenzwert*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{w(z) - \Phi(z_0)\, F(z) - \Psi(z_0)\, G(z)}{z - z_0} = \left.\frac{d_{(F,\,G)} w(z)}{dz}\right|_{z=z_0} = \dot{w}(z_0) \tag{0.3}$$

existiert. $\omega(z) = {}_{*}w(z) = \Phi(z) + i\, \Psi(z)$ *heisst pseudoanalytische Funktion 2. Art.*

---

* Vortrag, gehalten im *Kolloquium über mathematische Analysis,* das von de Mathematischen Vereinigung Finnlands in Otaniemi (bei Helsinki) vom 27. bis 31. August 1966 veranstaltet wurde.

L. Bers hat gezeigt, dass aus der Existenz von $\dot{w}(z)$ die Differenzierbarkeit von $\Phi(z)$ und $\Psi(z)$ folgt. Mit den bekannten Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \tag{0.4}$$

gelten die Differentialgleichungen

$$\Phi_{\bar{z}}\, F + \Psi_{\bar{z}}\, G = 0\,, \qquad \Phi_z\, F + \Psi_z\, G = \dot{w}\,, \tag{0.5}$$

woraus man mit

$$-\tau + i\,\sigma = \frac{G}{F}, \qquad \gamma = -\,\frac{F + i\,G}{F - i\,G} \tag{0.6}$$

das System

$$\Phi_x = \tau\,\Psi_x + \sigma\,\Psi_y\,, \qquad \Phi_y = -\,\sigma\,\Psi_x + \tau\,\Psi_y \tag{0.7}$$

oder in komplexer Form

$$\omega_{\bar{z}} = \gamma\,\overline{\omega_z} \tag{0.8}$$

herleitet. $\omega(z)$ ($\not\equiv$ const.) erweist sich (Bers [3], S. 228 ff.) als innere Abbildung, die bis auf isolierte Punkte lokal quasikonform ist mit der Dilatation

$$\varkappa(z) = \frac{1 + |\gamma|^2}{1 - |\gamma|^2} = \frac{1 + \tau^2 + \sigma^2}{2\,\sigma}\,. \tag{0.9}$$

Sind $F(z)$ und $G(z)$ reell differenzierbar, so genügt nach Bers [3], S. 218, mit den Definitionen

$$\begin{aligned} F_{\bar{z}} &= A\,F + B\,\bar{F} & & & A &= \frac{\bar{F}\,G_{\bar{z}} - \bar{G}\,F_{\bar{z}}}{2\,i\,\Delta} \\ & & &\text{oder} & & \\ G_{\bar{z}} &= A\,G + B\,\bar{G} & & & B &= \frac{G\,F_{\bar{z}} - F\,G_{\bar{z}}}{2\,i\,\Delta} \end{aligned} \tag{0.10}$$

und

$$\begin{aligned} F_z &= \tilde{A}\,F + \tilde{B}\,\bar{F} & & & \tilde{A} &= \frac{\bar{F}\,G_z - \bar{G}\,F_z}{2\,i\,\Delta} \\ & & &\text{oder} & & \\ G_z &= \tilde{A}\,G + \tilde{B}\,\bar{G} & & & \tilde{B} &= \frac{G\,F_z - F\,G_z}{2\,i\,\Delta} \end{aligned} \tag{0.11}$$

jede pseudoanalytische Funktion 1. Art den Differentialgleichungen

$$w_{\bar{z}} = A\,w + B\,\bar{w}\,, \tag{0.12}$$

$$\dot{w} = w_z - \tilde{A}\,w - \tilde{B}\,\bar{w}\,. \tag{0.13}$$

Setzt man $w = u + i\,v$, so ist (0.12) einem elliptischen Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} u_x - v_y &= a_{11}(x\,,y)\,u + a_{12}(x\,,y)\,v\,, \\ u_y + v_x &= a_{21}(x\,,y)\,u + a_{22}(x\,,y)\,v \end{aligned} \tag{0.14}$$

äquivalent. Die Theorie der pseudoanalytischen Funktionen ist daher als Funktionentheorie des Systems (0.14) aufzufassen. Solche Systeme sind (ähnlich wie die Systeme (0.7)) vom Standpunkt der partiellen Differentialgleichungen aus viel untersucht worden, ich nenne die Arbeiten von W. Haack und G. Hellwig [6]—[7] sowie I. N. Vekua (zusammenfassend [13]). Letzterer entwickelt in [13] eine Theorie der pseudoanalytischen Funktionen mit verallgemeinerten (Sobolevschen) Ableitungen in geeigneten L_p-Räumen. Dem entsprechen erzeugende Funktionen $F(z)$ und $G(z)$ mit solchen Ableitungen.

Die isolierten Singularitäten pseudoanalytischer Funktionen $w(z)$ lassen sich wie bei analytischen Funktionen als hebbare Singularitäten, Pole oder wesentliche Singularitäten klassifizieren. In der Umgebung letzterer gilt der Satz von Casorati—Weierstrass (Bers [3], S. 238, Vekua [13], S. 121).

In der Umgebung von Null- und Polstellen von $w(z)$ hat man das Verhalten (Bers [3], S. 237 ff.)

$$\begin{aligned} w(z) &= c\,(z-z_0)^n\,(1 + o(1)) \\ \dot{w}(z) &= c\,n\,(z-z_0)^{n-1}\,(1 + o(1)) \end{aligned} \qquad (n \neq 0) \tag{0.15}$$

wodurch die Vielfachheit von Null- und Polstellen angegeben wird. $\dot{w}(z)$ ist übrigens gleichfalls eine pseudoanalytische Funktion 1. Art bezüglich eines sogenannten »Nachfolgerpaares» $F_1(z)$ und $G_1(z)$, dessen Existenz Bers ([3], S. 233 ff.) bewiesen hat, insbesondere gilt

$$A_{(F_1,G_1)} = A_{(F,G)}\,, \qquad B_{(F_1,G_1)} = -\,\tilde{B}_{(F,G)}\,, \tag{0.16}$$

falls $F(z)$ und $G(z)$ differenzierbar sind.

Über die Werteverteilung pseudoanalytischer Funktionen in der Umgebung wesentlicher Singularitäten sind im allgemeinen keine besonderen Aussagen zu erwarten, da über die Funktionen $F(z)$ und $G(z)$ zuwenig vorausgesetzt wird. Man kann jedoch eine Werteverteilungstheorie entwickeln, wenn man die Annahme eines Wertes a durch $w(z)$ mit Bers wie folgt definiert:

Definition. *$w(z)$ nimmt in z_0 den Wert $a = a_1 + i\, a_2$ genau dann an, wenn $\omega(z_0) = {}_*w(z_0) = a$ ist, d. h.*

$$w(z_0) = a_1 F(z_0) + a_2 G(z_0) . \tag{0.17}$$

Die Vielfachheit der a-Stelle sei gleich der Vielfachheit der Nullstelle von $w(z) - a_1 F(z) - a_2 G(z)$ in z_0.

Es handelt sich also um eine Annahme der Werte relativ zum erzeugenden Paar, während $\omega(z)$ die Werte direkt annimmt. Für die quasimeromorphen Funktionen $\omega(z)$ liegt bereits eine Werteverteilungstheorie vor, insbesondere die von G. af Hällström [9]—[10].

Demgegenüber wird hier die Heranziehung der pseudoanalytischen Funktionen 1. Art eine Formulierung des 1. Hauptsatzes der Werteverteilung erlauben, in der das Restglied leicht und befriedigend abgeschätzt werden kann. Da die Vielfachheit der a-Stellen definiert ist, lässt sich der 2. Hauptsatz unter Berücksichtigung der mehrfachen Stellen direkt in integrierter Form herleiten. Dabei ergibt sich das entsprechende bessere Restglied gegenüber der von G. af Hällström verwendeten Methode der Überlagerungsflächen von L. Ahlfors ([12], Kapitel XIII), bei der ein unintegrierter 2. Hauptsatz gewonnen wird, der dann integriert werden kann (A. Dinghas [5]). Allerdings erfasst G. af Hällström alle quasimeromorphen Funktionen, was hier nicht gelingt.

Der Beweis des 2. Hauptsatzes verwendet die von L. Ahlfors [1] angegebene Methode. Eine Ableitung entsprechend der ursprünglichen Form von R. Nevanlinna [11] scheint an der Abschätzung der Schmiegungsfunktion von $\dot{w}(z) / w(z)$ zu scheitern.

Da bei einer konformen Abbildung die Pseudoanalytizität erhalten bleibt (Bers [3], S. 220) und sich die Koeffizienten A und B in (0.12) nur mit der Ableitung der Abbildungsfunktion multiplizieren, wird im folgenden das Normalgebiet im Fall einfachen Zusammenhangs zugrunde gelegt:

$$K_R : \quad |z| < R \leqq \infty . \tag{0.18}$$

Die entsprechenden Entwicklungen für mehrfach zusammenhängende Gebiete (G. af Hällström [8]) lassen sich auch hier durchführen.

1. Der erste Hauptsatz

Voraussetzung. *In K_R (vgl. (0.18)) seien $F(z)$ und $G(z)$ lokal gleichmässig Hölderstetig und bis auf isolierte Punkte stetig differenzierbar, in der Umgebung dieser Punkte seien die Ableitungen von $F(z)$ und $G(z)$ beschränkt. Es sei*

$$
\begin{aligned}
&|F(z)|\,,\ |G(z)| \leqq M < \infty \\
&\Delta = \operatorname{Im}\{\bar{F}(z)\,G(z)\} \geqq \Delta_0 > 0 \qquad (z \in K_R) \\
&\iint\limits_{K_R} \frac{1}{|z|}\{|F_z| + |F_{\bar z}| + |G_z| + |G_{\bar z}|\}\,d\sigma = \pi K < \infty\,.
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

Die Konstanten M, Δ_0 und K kann man auch auf K_r beziehen, für die Abhängigkeit von r ergibt sich dann aus dem 1. Hauptsatz eine geeignete Wachstumsforderung. Da diese Bedingungen für die Beweise unwesentlich sind, werden sie nicht explizit formuliert.

Die Differenzierbarkeitsforderungen können dahin abgeschwächt werden, dass $F(z)$ und $G(z)$ verallgemeinerte Ableitungen in einem geeigneten L_p-Raum haben sollen, wie bei Vekua [13] vorausgesetzt wird. Dieses Ergebnis erhält man durch Grenzübergang von stetig differenzierbaren erzeugenden Paaren auf Grund der Konvergenzsätze von Bers ([3], S. 228 ff.). Die Durchführung soll aber unterbleiben.

Im folgenden ist $w(z)$ stets eine pseudoanalytische Funktion (1. Art, $\not\equiv$ const.) und $\omega(z) = {}_*w(z)$ die zugehörige quasimeromorphe Abbildung.

Definition. *Es sei für* $a = a_1 + i\,a_2$

$$\alpha(z) = a_1\,F(z) + a_2\,G(z) \tag{1.2}$$

die pseudoanalytische Funktion mit ${}_*\alpha(z) = a$. *Für* $a = \infty$ *sei auch* $\alpha = \infty$.

Es ist ${}_*(w - \alpha) = \omega - a$ und $\dot{\alpha} \equiv 0$; an einer n-fachen a-Stelle von $w(z)$ hat also $\dot{w}(z)$ eine $(n-1)$-fache Nullstelle.

Wie üblich sei $n(r\,,a) = n(r\,,a\,,w) = n(r\,,a\,,\omega)$ die Anzahl der a-Stellen (im entsprechenden Sinn) von $w(z)$ in $|z| < r$, mit der jeweiligen Vielfachheit gezählt.

Für eine pseudoanalytische Funktion gilt offenbar das Argumentprinzip (vgl. auch Bers [2] und Vekua [13]). Also folgt für $w(z) - \alpha(z) \neq 0\,,\infty$ auf $|z| = r$

$$n(r\,,a) - n(r\,,\infty) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|z|=r} d\arg(w - \alpha)\,. \tag{1.3}$$

Die isolierten, daher endlich vielen Stellen, an denen $F(z)$ und $G(z)$ wie $w(z) - \alpha(z)$ eventuell nicht stetig differenzierbar sind, stören offenbar nicht. Man schliesse diese Punkte erst durch kleine Kreise aus, deren Radius man dann gegen Null gehen lässt. Die zusätzlichen Integrale gehen dabei gegen Null oder liefern, wenn es sich um eine Null- oder Polstelle handelt, nach (0.15) den gewünschten Betrag.

Nun ist für eine stetig differenzierbare Funktion $f(z) = u + i\,v$ mit Polarkoordinaten r und φ

$$f_{\bar z} = \frac{1}{2}\,e^{i\varphi}\left(u_r - \frac{1}{r}\,v_\varphi + i\left[v_r + \frac{1}{r}\,u_\varphi\right]\right),$$

also

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial \arg\,(w-\alpha)}{\partial\varphi} = \frac{\partial \log|w-\alpha|}{\partial r} - 2\,\mathrm{Re}\left\{e^{-i\varphi}\,\frac{\partial\log\,(w-\alpha)}{\partial\bar z}\right\}.$$

Zusammen mit (0.12) folgt aus (1.3)

$$(1.4)\quad n(r\,,a) - n(r\,,\infty)$$
$$= \frac{r}{2\,\pi}\,\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_{|z|=r}\log|w-\alpha|\,d\varphi - \frac{r^2}{\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\int\limits_{|z|=r}\frac{1}{z}\left[A + B\,\frac{\bar w-\bar\alpha}{w-\alpha}\right]d\varphi\right\}.$$

An dieser Stelle sei auf den Unterschied hingewiesen, der durch die Verwendung von $w(z) - \alpha(z)$ anstelle von $\omega(z) - a$ entsteht. Der letzte Summand in (1.4) hat Restgliedcharakter, insbesondere hängt er von $w(z)$ und a nur noch mit einem Faktor vom Betrag Eins ab. Für $\omega(z) - a$ würde dort $\omega_{\bar z}\,/\,(\omega - a)$ anstelle von $A + B\,(\bar w - \bar\alpha)\,/\,(w-\alpha)$ stehen. Mit (0.8) erhielte man dann $\gamma\,\bar\omega_{\bar z}\,/\,(\omega - a)$, für $\gamma\to 0$ bei $r\to R$ hat dies auch Restgliedcharakter, dem entspricht bei der Dilatation $\varkappa\to 1$. Die wesentliche Abhängigkeit von ω und a liesse sich jedoch nicht ohne weiteres beseitigen.

Definition. *Es sei*

$$(1.5)\qquad m(r\,,a\,,w) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{|z|=r}\log\frac{1}{[w(z)\,,\alpha(z)]}\,d\varphi \qquad (a \neq \infty)\,,$$

$$(1.6)\qquad m(r\,,\infty\,,w) = \frac{1}{2\,\pi}\int\limits_{|z|=r}\log\frac{1}{[w(z)\,,\infty]}\,d\varphi\,,$$

$$(1.7)\qquad N(r\,,a\,,w) = \int\limits_0^r\frac{n(t\,,a\,,w) - n(0\,,a\,,w)}{t}\,dt + n(0\,,a\,,w)\log r\,.$$

Dabei bezeichnet $[a\,,b]$ den chordalen Abstand auf der Riemannschen Kugel. $m(r\,,a\,,w)$ ist eine Schmiegungsfunktion, denn sie erhält ihre grössten Beiträge dort, wo $w(z) - \alpha(z)$ klein ist, d. h. dort, wo $\omega(z) - a$ nahe Null ist.

Sei nun r_0 kleiner als die Absolutbeträge aller von $z = 0$ verschiedenen Null- und Polstellen von $w(z) - \alpha(z)$, dann ergibt sich aus (1.4) durch Integration von r_0 bis r

$$
\begin{aligned}
(1.8)\qquad & N(r\,,a) - n(0\,,a)\log r_0 + m(r\,,a) - m(r_0\,,a) \\
&= N(r\,,\infty) - n(0\,,\infty)\log r_0 + m(r\,,\infty) - m(r_0\,,\infty) \\
&\quad + m(r\,,\infty\,,\alpha(z)) - m(r_0\,,\infty\,,\alpha(z)) \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{\iint\limits_{r_0<|z|<r} \frac{1}{z}\left[A + B\,\frac{\bar{w}-\bar{\alpha}}{w-\alpha}\right] d\sigma\right\},
\end{aligned}
$$

wobei $d\sigma$ das Flächenelement der Ebene ist.

Definition. *Es sei*

$$(1.9)\qquad [w(0)\,,\alpha(0)]_0 = \lim_{z\to 0}\,[w(z)\,,\alpha(z)]\,r^{-n(0,a,w)}$$

und

$$(1.10)\qquad [w(0)\,,\infty]_0 = \lim_{z\to 0}\,[w(z)\,,\infty]\,r^{-n(0,\infty,w)}\,,$$

wobei nur für $w(0) = \alpha(0)$ *bzw.* ∞ *etwas Neues herauskommt. Unter Berücksichtigung von (1.10) sei dann*

$$(1.11)\qquad T^*(r\,,w) = N(r\,,\infty\,,w) + m(r\,,\infty\,,w) + \log\,[w(0)\,,\infty]_0\,.$$

Mit dieser Definition erhält man aus (1.8) durch den Grenzübergang $r_0 \to 0$ den

1. Hauptsatz. *Zu jeder in* K_R *(vgl. (0.18)) pseudoanalytischen Funktion* $w(z)$ *existiert eine nur von* $w(z)$ *abhängige Funktion* $T^*(r)$ *so dass für alle endlichen oder unendlichen* a

$$
\begin{aligned}
(1.12)\qquad & N(r\,,a\,,w) + m(r\,,a\,,w) + \log\,[w(0)\,,\alpha(0)]_0 \\
&= T^*(r\,,w) + K(r\,,a\,,w)
\end{aligned}
$$

gilt unter Berücksichtigung von (1.9) bzw. (1.10). Das Restglied $K(r\,,a\,,w)$ *hat die Form*

$$K(r\,,\infty\,,w) = 0$$

und für $a \neq \infty$

$$
\begin{aligned}
(1.13)\qquad & K(r\,,a\,,w) \\
&= m(r\,,\infty\,,\alpha(z)) + \log\,[\alpha(0)\,,\infty] \\
&\quad - \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{\iint\limits_{|z|<r} \frac{1}{z}\left[A + B\,\frac{\bar{w}-\bar{\alpha}}{w-\alpha}\right] d\sigma\right\}.
\end{aligned}
$$

Für $K(r\,,a\,,w)$ $(a \neq \infty)$ *erhält man die Abschätzung*

$$|K(r\,,a\,,w)| \leqq \frac{M\,K}{\Delta_0} + \frac{1}{2}\log(1+4\,M^2) + \overset{+}{\log}|a| \tag{1.14}$$

mit den Konstanten M, K *und* Δ_0 *aus (1.1).*

Ersetzt man in (1.14) M, K und Δ_0 durch von r abhängige Konstanten, so wäre $K(r\,,a\,,w) = o(T^*(r))$ zu fordern, um den Restgliedcharakter zu erhalten.

Es sei darauf hingewiesen, dass für die Aufstellung von $T^*(r\,,w)$ und für den Vergleich von Null- und Polstellen mittels des 1. Hauptsatzes die explizite Kenntnis von $F(z)$ und $G(z)$ nicht notwendig ist. Sogar die Existenz wird nicht benötigt, solange $w(z)$ einer Differentialgleichung vom Typ (0.12) genügt.

Beweis. Zu beweisen ist nur noch die Abschätzung (1.14). Wegen $|(\bar{w}-\bar{\alpha})/(w-\alpha)| = 1$ und (1.1) in Verbindung mit (0.10) erhält man

$$\begin{aligned}&\left|\frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\left\{\iint\limits_{|z|<r}\frac{1}{z}\left[A + B\frac{\bar{w}-\bar{\alpha}}{w-\alpha}\right]d\sigma\right\}\right| \\ &\leqq \frac{1}{\pi}\iint\limits_{K_R}\frac{1}{|z|}\left(|A| + |B|\right)d\sigma \leqq \frac{M\,K}{\Delta_0}\,.\end{aligned} \tag{1.15}$$

Ferner ist mit $a = a_1 + i\,a_2$

$$\begin{aligned}-\log[\alpha(z)\,,\infty] &= \frac{1}{2}\log(1 + |a_1\,F(z) + a_2\,G(z)|^2) \\ &\leqq \overset{+}{\log}|a| + \frac{1}{2}\log(1+4\,M^2)\,.\end{aligned}$$

Die Anwendung auf $\log[\alpha(0)\,,\infty]$ und $m(r\,,\infty\,,\alpha(z))$ ergibt zusammen mit (1.15) die gewünschte Abschätzung (1.14).

Als nächstes soll die Verbindung mit der Charakteristik von Ahlfors—Shimizu hergestellt werden, diese ist wie folgt definiert:

Definition. $S(r)$ *sei das Verhältnis des sphärischen Inhaltes von* $\omega(|z|<r)$ *zur Oberfläche der Riemannschen Kugel.*

$$T(r) = \int_0^r \frac{S(t)}{t}\,dt \tag{1.16}$$

heisst Charakteristik von Ahlfors und Shimizu.

Diese Charakteristik ist von G. af Hällström bei seinen Untersuchungen verwendet worden, $T(r)$ ist natürlich eine konvexe Funktion von $\log r$.

Satz 1. *Es gilt*

$$|T^*(r) - T(r)| \leqq \frac{M\,K}{\Delta_0} + \frac{1}{2}\log\left[e\,L^2\,(2 + 8\,M^2)\right]$$

mit

$$L = \frac{2\,M}{\Delta_0}\max\{1\,,\,4\,M^2\}\ (\geqq 1)\,. \tag{1.17}$$

Beweis. Wie üblich wird der 1. Hauptsatz (1.12) mit dem sphärischen Flächenelement $d\tau(a)$ multipliziert und über die a-Kugel E integriert. Wegen

$$\frac{1}{\pi}\iint_E N(r\,,\,a)\,d\tau(a) = \int_0^r \frac{S(t)}{t}\,dt = T(r)$$

und (1.14) erhält man

$$\begin{aligned} |T^*(r) - T(r)| & \\ \leqq \frac{M\,K}{\Delta_0} &+ \frac{1}{2}\log(1 + 4\,M^2) + \frac{1}{2}\log 2 \\ &+ \frac{1}{\pi}\left|\iint_E (m(r\,,\,a) + \log[w(0)\,,\,\alpha(0)])\,d\tau(a)\right|\,. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Um hier das restliche Integral abzuschätzen, muss $[w(z)\,,\,\alpha(z)]$ mit $[\omega(z)\,,\,a]$ in Verbindung gebracht werden: Aus $\omega = \Phi + i\,\Psi$ und $w = \Phi\,F + \Psi\,G$ folgt

$$\omega = \frac{1}{\Delta}\left(\operatorname{Im}\{\bar{w}\,G\} + i\operatorname{Im}\{w\,\bar{F}\}\right)\,. \tag{1.19}$$

Für $a \neq \infty$ wird

$$|\omega - a| \leqq \frac{1}{\Delta}\,|w - \alpha|\,(|F| + |G|)$$

und

$$[w(z)\,,\,\alpha(z)] \geqq \frac{\Delta\,|\omega - a|}{(|F| + |G|)\sqrt{1 + |w|^2}\,\sqrt{1 + |\alpha|^2}}\,. \tag{1.20}$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} 1 + |w(z)|^2 = 1 + |\Phi\,F + \Psi\,G|^2 &\leqq 1 + |\omega|^2\,(|F| + |G|)^2 \\ &\leqq (1 + |\omega|^2)\max\{1\,,\,(|F| + |G|)^2\}\,, \end{aligned}$$

also nach (1.20) mit einer entsprechenden Abschätzung für $\alpha(z)$

$$[w(z)\,,\alpha(z)] \geqq \frac{\Delta\,[\omega(z)\,,a]}{(|F| + |G|)\,(\max\{1\,,|F| + |G|\})^2}$$
$$\geqq \frac{1}{L}\,[\omega(z)\,,a]\,.$$

Dies gilt auch für $a = \infty$, denn

$$[w(z)\,,\infty]^2 = \frac{1}{1 + |w|^2} \geqq \frac{1}{1 + |\omega|^2\,(|F| + |G|)^2}$$
$$\geqq \frac{[\omega\,,\infty]^2}{\max\{1\,,4\,M^2\}} \geqq \frac{1}{L^2}\,[\omega(z)\,,\infty]^2\,.$$

Die letzte Ungleichung folgt aus der Definition (1.17) von L sofort für $2\,M\,/\,\Delta_0 \geqq 1$. Ist jedoch $2\,M < \Delta_0$ so ist wegen $\Delta_0 \leqq M^2$ sicher $M > 2$, also $L = 8\,M^3\,/\,\Delta_0 \geqq 8\,M$ und damit $L^2 \geqq 4\,M^2$. Zugleich hat man $L \geqq 1$.

Somit gilt für alle endlichen oder unendlichen a

$$L\,[w(z)\,,\alpha(z)] \geqq [\omega(z)\,,a]\,. \tag{1.21}$$

Diese auch für das Weitere wesentliche Ungleichung dient nun zum Beweis des Satzes. Es ist

$$0 \leqq \frac{1}{\pi}\iint_E \log\frac{1}{[w\,,\alpha]}\,d\tau(a) \tag{1.22}$$
$$\leqq \frac{1}{\pi}\iint_E \log\frac{L}{[\omega\,,a]}\,d\tau(a) \leqq \frac{1}{2} + \log L\,.$$

Daraus ergibt sich

$$0 \leqq \frac{1}{\pi}\iint_E m(r\,,a)\,d\tau(a) \leqq \frac{1}{2} + \log L\,. \tag{1.23}$$

(1.22) und (1.23) liefern zusammen mit (1.18) die Behauptung von Satz 1,

2. Eigenschaften von $T(r\,,w)$, Charakterisierung der rationalen Funktionen

Bei gegebenen $F(z)$ und $G(z)$ sind innerhalb der Menge der pseudoanalytischen Funktionen nur Linearkombinationen mit reellen Koeffizienten möglich. Daher kann man über das Verhalten der Charakteristik bei der Zusammensetzung von Funktionen vorerst nur folgendes aussagen:

Satz 2. a) $w_1, \ldots, w_n$ *seien pseudoanalytische Funktionen zum erzeugenden Paar* $F(z)$, $G(z)$. *Dann gilt*

$$T(r, w_1 + \ldots + w_n) \leqq \sum_{i=1}^{n} T(r, w_i) + O(1) \qquad (r \to R).$$

b) *Für reelles* k *ist*

$$|T(r, k w) - T(r, w)| \leqq |\log |k|| + \frac{2 M K}{\Delta_0} + \log [e L^2 (2 + 8 M^2)].$$

Beweis. Die Aussagen ergeben sich für $T^*(r, w)$ wie im Fall analytischer Funktionen ([12], S. 172), den Übergang zu $T(r, w)$ ermöglicht Satz 1.

Ist c eine komplexe Zahl und genügt $w(z)$ der Differentialgleichung (0.12), so erfüllt $c\, w(z)$ die Gleichung

$$(c\, w)_{\bar z} = A\,(c\, w) + \left(B \frac{c}{\bar c}\right) \overline{(c\, w)}, \tag{2.1}$$

d. h. der Koeffizient B hat sich um einen konstanten Faktor vom Betrag 1 geändert.

Betrachtet man $1/w$, so genügt diese Funktion der Differentialgleichung

$$\left(\frac{1}{w}\right)_{\bar z} = (-A) \frac{1}{w} + \left(-B \frac{\bar w^2}{w^2}\right)\left(\frac{1}{\bar w}\right). \tag{2.2}$$

Hier lauten die neuen Koeffizienten $-A$ und $-B \bar w^2 w^{-2}$, letzterer ist an den Null- und Polstellen von $w(z)$ unstetig, aber beschränkt.

Nach Vekua [13], S. 128 ff., existieren zu $A, B \in L_{p,2}(E)$ $(p > 2)$ erzeugende Funktionen $F(z)$ und $G(z)$ in $C_{(p-2)/2}(E)$ mit verallgemeinerten Ableitungen in $L_{p,2}(E)$. Dabei gilt die folgende

Definition. a) $C_\alpha(E)$ *ist die Menge der in der abgeschlossenen Ebene gleichmässig Hölderstetigen Funktionen zum Exponenten* α.

b) $f(z) \in L_{p,2}(E)$, *falls* $f(z) \in L_p(|z| \leqq 1)$ *und* $f(z)\, |z|^{2-4/p} \in L_p(|z| \geqq 1)$.

Falls das hier betrachtete Gebiet der Kreis $|z| < R = 1$ ist, so stellt $A, B \in L_p(|z| \leqq 1)$ eine Bedingung dar, die nicht in (1.1) enthalten ist. Ausserhalb von $|z| = 1$ kann man A und B etwa geeignet fortsetzen, so dass die zweite Forderung in der Definition dann ohne Bedeutung ist. Ist $R = \infty$, so ist $A, B \in L_p(|z| \leqq 1)$ nach (1.1) erfüllt, jetzt stellt aber die zweite Forderung eine nicht selbstverständliche Bedingung dar.

Macht man die Voraussetzung $A, B \in L_{p,2}(E)$, so existieren also dazu gleichmässig Hölderstetige erzeugende Funktionen, die nach Vekua [13], S. 132, Formel (6.6), gleichmässig in der abgeschlossenen Ebene der

Bedingung (0.1) genügen. Damit erfüllen diese erzeugenden Funktionen die Forderungen aus (1.1) und sind wegen (0.12) bis auf isolierte Punkte stetig differenzierbar.

Mit diesen neuen erzeugenden Funktionen lässt sich dann die Werteverteilung von $c\,w$ (c komplex) und w^{-1} untersuchen:

Satz 3. *Zusätzlich zu (1.1) seien* F_z, $F_{\bar{z}}$, G_z, $G_{\bar{z}}$ *in* $L_{p,2}(E)$, *dann gilt*

$$\text{(a)} \qquad |T(r\,,c\,w) - T(r\,,w)| \leqq |\log|c|| + O(1) \qquad (r \to R)\,,$$

$$\text{(b)} \qquad T\left(r\,,\frac{1}{w}\right) = T(r\,,w) + O(1) \qquad (r \to R)$$

mit entsprechend gedeuteten Charakteristiken.

Beweis. Der Beweis verläuft für $T^*(r)$ wieder wie im analytischen Fall, auf Grund von Satz 1 kann man zu $T(r)$ übergehen.

Bers ([1], S. 88) und Vekua ([13], S. 127) haben rationale pseudoanalytische Funktionen erklärt und untersucht. Unter den Voraussetzungen des Satzes 3 lassen sich die Ergebnisse von Vekua verwenden.

Definition. *Eine pseudoanalytische Funktion heisst rational, wenn sie in der abgeschlossenen Ebene höchstens Pole besitzt.*

Bers zeigt, dass unter seinen Voraussetzungen $\omega(z) = {}_*w(z)$ jeden Wert gleich oft annimmt, nach Vekua sind jedenfalls die Anzahlen der Null- und Polstellen gleich. Hier lässt sich beweisen:

Satz 4. *In (0.18) sei* $R = \infty$, *und zusätzlich zu (1.1) gelte* F_z, $F_{\bar{z}}$, G_z, $G_{\bar{z}} \in L_{p,2}(E)$. *Dann ist* $w(z)$ *genau dann rational, wenn*

$$\liminf_{r\to\infty} \frac{T(r\,,w)}{\log r} < \infty\,. \tag{2.3}$$

$\omega(z) = {}_*w(z)$ *nimmt dabei jeden Wert gleich oft an.*

Beweis. Ist $w(z)$ rational, so sei $a = 0$ oder ∞ und $a \neq w(\infty)$. Dann gilt

$$N(r\,,a) = N \log r\,(1 + o(1))\,, \qquad m(r\,,a) = O(1)\,,$$

also

$$T(r) = N \log r\,(1 + o(1))\,,$$

wobei N die Anzahl der Null- oder Polstellen ist.

Aus (2.3) folgt andererseits

$$\sup_{r,a} n(r\,,a) = n(\infty\,,a_0) = N < \infty\,.$$

$\omega(z)$ besitzt dann in der endlichen Ebene genau N a_0-Stellen $z_1\,,\ldots,z_N$. Da $\omega(z)$ eine innere Abbildung ist, muss $(\omega(z) - a_0)^{-1}$ in der Umgebung von ∞ beschränkt bleiben, weshalb ∞ nach dem Satz von Casorati—Weierstrass höchstens eine Polstelle von $w(z)$ sein kann, $w(z)$ ist also rational.

Für rationale $w(z)$ muss offenbar $n(r, a) \equiv N$ für $r > r_0(a)$ sein bis auf $a = w(\infty)$. $w(\infty)$ wird aber einschliesslich in ∞ auch N-mal angenommen, so dass jeder Wert genau N-mal auftritt.

Zum Abschluss dieses Paragraphen sei noch erwähnt, dass man eine dem Weierstrass'schen Produkt analoge Zerlegung für pseudoanalytische Funktionen nicht erwarten kann, da die Menge dieser Funktionen nicht gegen Multiplikationen abgeschlossen ist.

Wegen des Ähnlichkeitsprinzips (z. B. Bers [3], S. 237) hat man jedoch die Darstellung

$$w(z) = H(z)\, e^{s(z)},$$

wo $H(z)$ meromorph und $s(z)$ stetig ist. $H(z)$ ist bis auf eine von Null verschiedene Funktion bestimmt, man kann $H(z)$ etwa als das den Null- und Polstellen von $w(z)$ entsprechende kanonische Produkt wählen. Damit hat man einen Ersatz für die Produktdarstellung.

3. Der zweite Hauptsatz

Wie in der Einleitung erwähnt, soll der 2. Hauptsatz auf dem von L. Ahlfors [1] angegebenen Weg bewiesen werden. Dazu ist ein Hilfssatz notwendig.

Definition. *Es seien* $a_1, \ldots, a_q$ $(q > 2)$ *verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen. Dann sei*

$$(3.1) \qquad \Pi_0 = \Pi_0(a) = \prod_{\nu=1}^{q} [a, a_\nu]^{-1}, \qquad \Pi = \Pi(z) = \prod_{\nu=1}^{q} [w(z), \alpha_\nu(z)]^{-1}$$

und

$$(3.2) \qquad \varrho_0(a) = C\, \Pi_0^2 \log^{-4} (8\, L^q\, \Pi_0),$$

$$(3.3) \qquad \varrho(z) = C\, \Pi^2 \log^{-4} (8\, \Pi)$$

mit der Konstanten L *aus (1.17);* C *werde so bestimmt, dass*

$$\iint_E \varrho_0(a)\, d\tau(a) = 1$$

gilt, wobei $d\tau(a)$ *das sphärische Oberflächenelement der* a*-Kugel* E *sei.*

Ferner sei

$$S_\varrho(r) = \iint\limits_{|z|<r} \frac{|\dot{w}|^2}{(1+|w|^2)^2}\,\varrho(z)\,d\sigma \tag{3.4}$$

und

$$T_\varrho(r) = \int\limits_0^r S_\varrho(t)\,\frac{dt}{t}\,. \tag{3.5}$$

Dann gilt der

Satz 5. *Es ist*

$$T_\varrho(r) \leqq M^2 L^{2q+4}\, T(r) + C_0 \tag{3.6}$$

mit M *aus (1.1) und* L *aus (1.17),* C_0 *ist eine von* M, Δ_0, K, L *und der gegenseitigen Lage der* a_ν *abhängige Konstante.*

Beweis. Man multipliziere den 1. Hauptsatz (1.12) mit $\varrho_0(a)$ und integriere über die a-Kugel E. Wegen (1.14) gilt

$$\left|\iint\limits_E K(r\,,a\,,w)\,\varrho_0(a)\,d\tau(a)\right| \leqq C_1 \tag{3.7}$$

mit einer Konstanten C_1 (gleiche Abhängigkeit wie bei C_0); wegen (1.21) hat man

$$0 \leqq \iint\limits_E \log\frac{1}{[w\,,\alpha]}\,\varrho_0(a)\,d\tau(a) \leqq C_2\,. \tag{3.8}$$

Berücksichtigt man (3.7) und (3.8) bei der Integration des 1. Hauptsatzes, so erhält man

$$\iint\limits_E N(r\,,a)\,\varrho_0(a)\,d\tau(a) \leqq T^*(r) + C_1 + C_2\,. \tag{3.9}$$

Nun gilt aber

$$\iint\limits_E N(r\,,a)\,\varrho_0(a)\,d\tau(a) = \int\limits_0^r \frac{dt}{t}\iint\limits_{|z|<t}\frac{J\,\varrho_0(\omega)}{(1+|\omega|^2)^2}\,d\sigma$$

mit J als Funktionaldeterminante der durch $\omega(z)$ vermittelten Abbildung der z-Ebene auf die Riemannsche Kugel. Aus (0.5) erhält man mit leichter Rechnung

$$J = \Phi_x\,\Psi_y - \Phi_y\,\Psi_x = |\dot{w}|^2\,\Delta^{-1}\,,$$

also folgt zusammen mit (1.1)

(3.10) $$\iint_E N(r\,,\,a)\,\varrho_0(a)\,d\tau(a) \geqq \frac{1}{M^2}\int_0^r \frac{dt}{t}\iint_{|z|<t} \frac{|\dot{w}|^2}{(1+|\omega|^2)^2}\,\varrho_0(\omega)\,d\sigma.$$

Wegen (1.21) ist weiter

(3.11) $$\Pi_0(\omega) \geqq L^{-q}\,\Pi(z) \geqq L^{-q}\,.$$

Betrachtet man nun die Funktionen

$$f(x) = x^2 \log^{-4}(8\,L^q\,x) = \frac{1}{64}\,L^{-2q}\,y^2 \log^{-4} y = g(y)$$

mit $y = 8\,L^q\,x$, so ist $g(y)$ für $y \geqq e^2$ monoton wachsend, also für $y \geqq 8$. Damit ist $f(x)$ für $x \geqq L^{-q}$ monoton wachsend, und das ergibt mit (3.11), (3.2) und (3.3)

(3.12) $$\varrho_0(\omega) \geqq L^{-2q}\,\varrho(z)\,.$$

Schliesslich ist noch nach (1.19) und (1.17)

$$\begin{aligned} 1+|\omega|^2 &\leqq 1+|w|^2\,\Delta^{-2}\,(|F|+|G|)^2 \\ &\leqq (1+|w|^2)\,(\max\{1\,,\,2\,M\,/\,\Delta_0\})^2 \leqq L^2\,(1+|w|^2)\,, \end{aligned}$$

so dass zusammen mit (3.10) und (3.12) sowie der Definition (3.5) von $T_\varrho(r)$ folgt

$$\iint_E N(r\,,\,a)\,\varrho_0(a)\,d\tau(a) \geqq M^{-2}\,L^{-2q-4}\,T_\varrho(r)\,.$$

In Verbindung mit (3.9) und Satz 1 erhält man die Behauptung von Satz 5.

Bevor der 2. Hauptsatz formuliert und bewiesen wird, sei daran erinnert, dass $\dot{w}(z)$ wieder eine pseudoanalytische Funktion ist (vgl. (0.16)). Man kann daher auch für $\dot{w}(z)$ eine Charakteristik definieren. Da bezüglich $\dot{w}(z)$ nur die Werte 0 und ∞ interessieren, sind die zu den Koeffizienten A und $-\tilde{B}$ gehörigen erzeugenden Funktionen ohne Interesse, wie im Anschluss an den 1. Hauptsatz bemerkt wurde. Es genügt zu wissen, dass A und $-\tilde{B}$ dasselbe Wachstumsverhalten wie A und B haben.

Definition. *Es sei*

$$N_1(r) = N(r\,,\,0\,,\,\dot{w}) + 2\,N(r\,,\,\infty\,,\,w) - N(r\,,\,\infty\,,\,\dot{w})\,.$$

$N_1(r)$ zählt die mehrfachen Stellen von $w(z)$ mit um Eins verminderter Vielfachheit. Damit kann der 2. Hauptsatz formuliert werden.

2. Hauptsatz. $a_1\,,\ldots,\,a_q$ $(q > 2)$ *seien verschiedene, endliche oder unendliche komplexe Zahlen. Dann ist*

$$(3.13)\qquad (q-2)\,T(r) = \sum_{\nu=1}^{q} N(r\,,a_\nu) - N_1(r) + R(r)$$

mit

$$(3.14)\qquad R(r) \leqq [1+o(1)]\left(\log \eta(r) + \frac{5}{2}\log T(r)\right) + o(\log r)$$

falls r *nicht in einer Menge* I *mit*

$$\int_I \eta(r)\,dr < \infty$$

liegt, $\eta(r)$ *ist stetig und positiv, sonst beliebig. Es interessieren nur* $\eta(r)$ *mit*

$$\int^R \eta(r)\,dr = \infty\,.$$

Speziell gilt bei endlicher Ordnung von $T(r)$ *für alle* r

$$(3.15)\qquad \begin{aligned} R(r) &= O(\log r) \qquad (R=\infty)\,,\\ R(r) &= O\left(\log\frac{1}{1-r}\right) \qquad (R=1)\,. \end{aligned}$$

Selbstverständlich bleiben die üblichen Folgerungen über Defekte usw. erhalten. Die Konstante $5/2$ in (3.14) kann zu 1 verbessert werden, allerdings erfordert das einige Rechnung.

Beweis. Der Beweis wird nur skizziert, man vergleiche [12]. Aus der Definition von $R(r)$, dem 1. Hauptsatz und Satz 1 erhält man nach leichter Rechnung

$$(3.16)\qquad R(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{|z|=r} \log\left\{\Pi\,\frac{|\dot{w}|}{1+|w|^2}\right\} d\varphi + O(1)\,.$$

Dabei hat man nur die Abschätzung (1.14) für $K(r\,,a_\nu\,,w)$ zu berücksichtigen, sowie

$$K(r\,,0\,,\dot{w}) = -\frac{1}{\pi}\,\mathrm{Re}\left\{\iint_{|z|<r} \frac{1}{z}\left(A - \tilde{B}\,\frac{\overline{\dot{w}}}{\dot{w}}\right) d\sigma\right\} = O(1)\,,$$

letzteres wegen (0.11) und (1.1).

Auf Grund der bekannten Ungleichung

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \log f(x)\,dx \leqq \log\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right) \qquad (a<b\,,\ f(x)\geqq 0)$$

folgt zusammen mit (3.3) und (3.4)

$$(3.17)\quad R(r) \leqq \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{r}S'_{\varrho}\right) + 2\log\left(\sum_{\nu=1}^{q} m(r, a_\nu) + \log 8\right) + O(1)$$

$$\leqq \frac{1}{2}\log\left(\frac{1}{r}S'_{\varrho}\right) + 2\log T(r) + O(1)\ .$$

Es gilt nun der

Hilfssatz. *Für* $x_0 \leqq x < x_1$ *sei* $g(x) > 1$, *stetig, monoton wachsend und bis auf isolierte Punkte differenzierbar. Dann ist das Mass der Menge*

$$\{\, x \mid g'(x) > g(x)\log^2 g(x)\,,\ x_0 \leqq x < x_1 \,\}$$

nach oben beschränkt.

Führt man die Variable

$$(3.18)\qquad \xi(r) = \int_0^r \eta(t)\,dt \qquad (\eta(r) > 0)$$

ein, so erhält man aus (3.17) unter Verwendung des obigen Hilfssatzes bis auf eine Ausnahmemenge

$$R(r) \leqq \frac{1}{2}\log\frac{\xi'}{r} + \frac{1}{2}(1+o(1))\log S_{\varrho}(r) + 2\log T(r) + O(1)\ .$$

Nochmalige Anwendung des Hilfssatzes liefert schliesslich die Behauptung (3.14) mit der Ausnahmemenge I,

$$\int_I \eta(r)\,dr < \infty\ .$$

Der Beweis der Spezialfälle (3.15) soll ganz unterbleiben mit einem Verweis auf die Literatur ([12], S. 257—258).

Technische Universität Berlin
Deutschland

Literatur

[1] AHLFORS, L.: Über eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen. - Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math. 8:10, 1935.

[2] BERS, L.: Theory of pseudo-analytic functions. - [Hektographierte Vorlesungsausarbeitung.] Institute for Mathematics and Mechanics, New York University, New York, 1953.

[3] —»— Local theory of pseudoanalytic functions. - Lectures on functions of a complex variable, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1955, S. 213—244.

[4] —»— An outline of the theory of pseudoanalytic functions. - Bull. Amer. Math. Soc. 62, 1956, S. 291—331.

[5] DINGHAS, A.: Eine Bemerkung zur Ahlforsschen Theorie der Überlagerungsflächen. - Math. Z. 44, 1938, S. 568—572.

[6] HAACK, W.: Allgemeine Randwertprobleme für Differentialgleichungen vom elliptischen Typus. Die Überführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf Fredholmsche Integralgleichungen. II. - Math. Nachr. 7, 1952, S. 1—30.

[7] HAACK, W., und G. HELLWIG: Die Überführung des Randwertproblems für Systeme elliptischer Differentialgleichungen auf Fredholmsche Integralgleichungen. I. - Math. Nachr. 4, 1950/1951, S. 408—418.

[8] AF HÄLLSTRÖM, G.: Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten. - Acta Acad. Abo. Math. Phys. 12:8, 1939.

[9] —»— Wertverteilungssätze pseudomeromorpher Funktionen. - Acta Acad. Abo. Math. Phys. 21:9, 1958.

[10] —»— A new approach to the first fundamental theorem on value distribution. - Michigan Math. J. 9, 1962, S. 241—248.

[11] NEVANLINNA, R.: Zur Theorie der meromorphen Funktionen. - Acta Math. 46, 1925, S. 1—99.

[12] —»— Eindeutige analytische Funktionen. - Zweite verbesserte Auflage, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 46, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1953.

[13] VEKUA, I. N.: Verallgemeinerte analytische Funktionen. - Mathematische Lehrbücher und Monographien II.15, Akademie-Verlag, Berlin, 1963.

Gedruckt September 1967