

Series A

I. MATHEMATICA

405

**BEMERKUNGEN ÜBER
QUADRATISCHE DIFFERENTIALE MIT
GESCHLOSSENEN TRAJEKTORIEN**

VON

KURT STREBEL

Herrn Professor Dr. ALBERT PFLUGER zum 60. Geburtstag gewidmet

HELSINKI 1967
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1967.405

Am 10. März 1967 vorgelegt von OLLI LEHTO und K. I. VIRTANEN

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1967

1. Einführung

1. Mit R wird im Folgenden eine kompakte Riemannsche Fläche bezeichnet, auf der eine endliche (eventuell leere) Menge von Punkten P_i ausgezeichnet ist. Ein System von paarweise disjunkten Jordankurven γ_i , $i = 1, \dots, p$ ($p \geq 1$), auf der punktierten Fläche $R - \{P_i\}$ nennen wir zulässig, wenn die Homotopieklassen der γ_i bezüglich der punktierten Fläche $R - \{P_i\}$ voneinander verschieden sind und keine derselben (bzw. ihre abgeschlossene Hülle) einen Punkt auf R enthält, auch nicht einen der ausgezeichneten Punkte P_i .

Ferner bedeute φ ein quadratisches Differential, das auf $R - \{P_i\}$ holomorph ist, endliche Norm

$$\|\varphi\| = \iint_R |\varphi(z)| dx dy$$

besitzt¹⁾ und dessen reguläre Trajektorien (die also nicht in einem Pol oder einer Nullstelle von φ enden) geschlossene Linien und daher Jordankurven sind: Wir nennen ein solches φ kurz ein quadratisches Differential mit geschlossenen Trajektorien. Lassen wir diejenigen regulären Trajektorien weg, die durch einen ausgezeichneten Punkt P_i gehen, in dem φ jedoch von null und unendlich verschieden ist, so liegen alle übrigen auf $R - \{P_i\}$ und zerfallen in Homotopieklassen bezüglich der punktierten Fläche. Jede Homotopieklasse überdeckt ein Ringgebiet R_j . Diese Ringgebiete sind disjunkt und überdecken R bis auf eine Nullmenge (gebildet von den kritischen Trajektorien mit deren Endpunkten und den regulären Trajektorien, die durch ein P_i gehen). Wir nennen sie die charakteristischen Ringgebiete von φ auf $R - \{P_i\}$ und bezeichnen deren Moduln mit M_j . Jedem quadratischen Differential φ mit geschlossenen Trajektorien wird nun in natürlicher Weise ein zulässiges Kurvensystem auf $R - \{P_i\}$ zugeordnet, indem man in jedem R_j eine Trajektorie α_j beliebig auszeichnet. Falls jedes α_j zu einem γ_i eines gegebenen zulässigen Kurvensystems $\{\gamma_i\}_{i=1, \dots, p}$ homotop ist, wobei nicht notwendig alle γ_i auftreten müssen, nennen wir φ zum System $\{\gamma_i\}_{i=1, \dots, p}$ gehörig. Kommt

¹⁾ Die Punkte P_i sind dann entweder Pole erster Ordnung von φ oder holomorphe Stellen.

unter den Homotopieklassen der α_j diejenige eines γ_i nicht vor, so sagen wir, das betreffende Ringgebiet R_i sei ausgeartet und setzen dessen Modul $M_i = 0$.

In [2] wurde der folgende Satz bewiesen: Sei $\{\gamma_i\}_{i=1,\dots,p}$ ein zulässiges System von Jordankurven auf $R - \{P_i\}$, und $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_p)$ ein beliebiger nicht-negativer Einheitsvektor: $m_i \geq 0$. Dann gibt es ein auf $R - \{P_i\}$ holomorphes quadratisches Differential φ endlicher Norm, mit geschlossenen Trajektorien, das zum System $\{\gamma_i\}$ gehört, und dessen charakteristische Ringgebiete $R_i \subset R - \{P_i\}$ Moduln M_i haben, die im Verhältnis $M_1 : M_2 : \dots : M_p = m_1 : m_2 : \dots : m_p$ stehen. φ ist bis auf einen positiven Zahlfaktor eindeutig bestimmt.²⁾

2. Ist nun ein zulässiges Kurvensystem $\{\gamma_i\}_{i=1,\dots,p}$ auf $R - \{P_i\}$ beliebig gegeben, so wird demnach jedem Einheitsvektor \mathbf{m} mit lauter nicht-negativen Komponenten ein Modulvektor $\mathbf{M} = (M_1, M_2, \dots, M_p) = \lambda \mathbf{m}$ eindeutig zugeordnet. In dieser Arbeit soll gezeigt werden, dass die von den Vektoren \mathbf{M} beschriebene »Modulfläche« \mathfrak{M} für $p \geq 2$ stetig und stark konvex ist und mit Einschluss des Randes eine sich stetig verändernde Tangentialebene besitzt, deren Normalenvektor $\mathbf{a} = (a_1^2, a_2^2, \dots, a_p^2)$ ist. Hier bedeutet a_i die untere Grenze der Längen

$$\int_{\gamma} |\varphi(z)|^{1/2} |dz|$$

aller zu γ_i auf $R - \{P_i\}$ homotopen geschlossenen Kurven γ , und φ ein festes, dem Vektor \mathbf{m} entsprechendes quadratisches Differential. Es ist zweckmässig, den unbestimmten positiven Zahlfaktor durch die Bedingung $\|\varphi\| = 1$ festzulegen: Wir bezeichnen die Menge der so normierten, zum System $\{\gamma_i\}$ gehörigen Differentiale mit Γ . Dadurch ist auch die Länge von \mathbf{a} und nicht nur dessen Richtung eindeutig bestimmt. Ist $M_i \neq 0$, so ist $a_i = |x_i|$ gleich der Länge einer zu γ_i homotopen geschlossenen Trajektorie von φ . Mit Hilfe einer solchen Fläche \mathfrak{M} wird in Nr. 8 ein Resultat bewiesen, das in [2], S. 124, verwendet, jedoch nur andeutungsweise in einer Anmerkung bewiesen wurde.

3. Ist R von analytischen Jordankurven berandet, wobei nun auch auf dem Rand ausgezeichnete Punkte liegen dürfen, so geht man zur Verdoppelung über. Wegen der Eindeutigkeit der Lösung φ und der Symmetrie der Verdoppelung, ist auch φ symmetrisch, und $\varphi(z) dz^2$

²⁾ Die Lösung φ ist per definitionem nur von denjenigen Kurven γ_i abhängig, auf denen $m_i > 0$ ist.

wird reell längs dem Rand. Unter den Kurven γ_i können nun auch Querschnitte von R vorkommen; diesen entsprechen dann »halbe« Ringgebiete, d. s. Streifen auf $R - \{P_i\}$. Diese Verallgemeinerung wird im Folgenden jeweils nicht ausgeführt.

4. Die maximale Anzahl N von Kurven, die ein zulässiges System enthalten kann, ist bei gegebenem Geschlecht g der Fläche und r ausgezeichneten Punkten $N = 3(g-1) + r$, ausser in den folgenden Fällen: $g = 0$, $r = 2$ (hier ist offenbar $N = 0$); $g = 1$, $r = 0$ (hier ist $N = 1$).

Dies sieht man leicht durch Induktion nach g ein. Sei zunächst $g = 0$. Ist $r = 3$, so ist $N = 0$, denn eine beliebige Jordankurve γ in $R - \{P_i\}$ ist auf der punktierten Fläche homotop zu einem Punkt von R . In einem der beiden Teile, in die R durch γ zerlegt wird, liegt nämlich höchstens ein ausgezeichneter Punkt. Sei nun $r > 3$ und die Formel bewiesen für $r-1$ ausgezeichnete Punkte. Wir betrachten ein zulässiges Kurvensystem $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_p$ und zerschneiden R längs γ_1 . Dadurch entstehen zwei berandete Flächen R_1 und R_2 . Die beiden aus γ_1 entstehenden Randkurven von R_1 und R_2 behandeln wir wie ausgezeichnete Punkte. Bezeichnen wir deren Anzahlen mit r_1 bzw. r_2 , so ist also $r_1 + r_2 = r + 2$, $3 \leq r_\nu \leq r - 1$, $\nu = 1, 2$, und die beiden Maximalzahlen sind daher $N_\nu = r_\nu - 3$. Somit wird $p \leq N_1 + N_2 + 1 = r_1 + r_2 - 5 = r - 3$. Andererseits kann man sofort ein System von $r - 3$ Kurven angeben, sodass $N = r - 3$ ist.

Ist $g = 1$ und $r = 0$, und schneiden wir R längs der (notwendig nicht null-homotopen) Jordankurve γ_1 auf, so erhalten wir ein Ringgebiet, das keine weitere Kurve zulässt. Daher ist $N = 1$.

Sei nun $g \geq 1$, die Aussage bewiesen für Flächen vom Geschlecht $g-1$ und beliebiges r , und wiederum $\gamma_1, \dots, \gamma_p$ ein zulässiges Kurvensystem. Wir dürfen annehmen, dass eine der Kurven, etwa γ_1 , die Fläche nicht zerlegt, da wir sonst das System vergrössern könnten. Schneiden wir nun R längs γ_1 auf, so erhalten wir eine Fläche vom Geschlecht $g-1$ mit $r+2$ ausgezeichneten Punkten (die beiden Randkomponenten wieder dazugezählt). Somit ist $p \leq 3(g-2) + (r+2) + 1 = 3(g-1) + r$. Auch hier kann man leicht ein Kurvensystem mit $N = 3(g-1) + r$ Kurven angeben.

2. Stetigkeit des Modulvektors M

5. Für ein festes zulässiges Kurvensystem $\{\gamma_i\}_{i=1, \dots, p}$ sei der Einheitsvektor $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_p)$ beliebig gewählt (es dürfen einzelne $m_i = 0$ sein) und φ dasjenige quadratische Differential, das zu \mathbf{m} gehört;

$\mathbf{M} = \lambda \mathbf{m}$ der Modulvektor von φ . Wir betrachten eine beliebige Folge von nichtnegativen Einheitsvektoren $\mathbf{m}_k \rightarrow \mathbf{m}$ und zeigen, dass $\varphi_k \rightarrow \varphi$, wo φ_k das zu \mathbf{m}_k gehörige Differential ist. Daraus folgt nach [2], Nr. 15 (S. 122), für die Modulvektoren \mathbf{M}_k der Differentiale $\varphi_k: \mathbf{M}_k \rightarrow \mathbf{M}$.

Würde $\varphi_k \rightarrow \varphi$ nicht gelten, so gäbe es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\|\varphi_k - \varphi\| \geq \varepsilon$ für unendlich viele k , und daher (wieder nach [2], Nr. 15) eine Teilfolge φ_{k_i} , die gegen ein φ_0 konvergiert. φ_0 gehöre zu \mathbf{m}_0 , und $\mathbf{M}_0 = \lambda_0 \mathbf{m}_0$ sei der entsprechende Modulvektor. Dann gilt $\mathbf{M}_{k_i} = \lambda_{k_i} \mathbf{m}_{k_i} \rightarrow \mathbf{M}_0$, daher $\lambda_{k_i} \rightarrow \lambda_0$ und $\mathbf{m}_{k_i} \rightarrow \mathbf{m}_0$. Da andererseits $\mathbf{m}_{k_i} \rightarrow \mathbf{m}$, ist $\mathbf{m} = \mathbf{m}_0$, und somit wegen der Eindeutigkeit $\varphi = \varphi_0$, im Widerspruch zu $\|\varphi_0 - \varphi\| \geq \varepsilon$. Also gilt $\varphi_k \rightarrow \varphi$, und daher auch $\mathbf{M}_k \rightarrow \mathbf{M}$.

Damit ist die Stetigkeit des Modulvektors \mathbf{M} im abgeschlossenen Winkelraum $m_i \geq 0$ bewiesen. Daraus folgt die Beschränktheit von \mathbf{M} , und da $\mathbf{M} \neq 0$ für jede Richtung \mathbf{m} , ist $\min |\mathbf{M}| > 0$. In § 4 wird sich ergeben, dass das Minimum von $|\mathbf{M}|$ nur im Innern (d. h. wo alle $m_i > 0$ sind) angenommen wird.

3. Tangentialebene in den inneren Punkten von \mathfrak{M} . Konvexität³⁾

6. Sei \mathbf{M} ein innerer Punkt und \mathbf{M}' ein beliebiger Punkt von \mathfrak{M} , φ das zu \mathbf{M} gehörige Differential und $\mathbf{a} = (a_1^2, \dots, a_p^2)$, wo $a_i = |x_i|$ die Länge einer geschlossenen, zu γ_i homotopen Trajektorie α_i von φ (in der Metrik $|\varphi(z)|^{1/2} |dz|$) ist. Dann sind die Ringgebiete R'_i des zu \mathbf{M}' gehörenden Differentials φ' ein Vergleichssystem für die Ringgebiete R_i von φ , und daher gilt (vgl. [2], Nr. 6)

$$\sum_{i=1}^p a_i^2 M'_i \leq \sum_{i=1}^p a_i^2 M_i,$$

und Gleichheit besteht nur, wenn $R'_i = R_i$ und also $M'_i = M_i$ für $i = 1, \dots, p$. Wir bezeichnen mit $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_p)$ einen beliebigen Vektor des p -dimensionalen reellen Raumes. Die Ebene E :

$$\sum a_i^2 x_i = \sum a_i^2 M_i$$

mit dem positiven Normalenvektor $\mathbf{a} = (a_1^2, \dots, a_p^2)$ hat den Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{M}$, und nur diesen, mit der Fläche \mathfrak{M} gemeinsam. Jeder andere Punkt \mathbf{M}' liegt auf derselben Seite von E wie der Nullpunkt. E ist somit Stützebene von \mathfrak{M} im Punkte \mathbf{M} , und dies ist der einzige gemeinsame Punkt.

7. Die Ebene E ist aber sogar Tangentialebene. Ist nämlich nun \mathbf{M}' ein von \mathbf{M} verschiedener innerer Punkt der Fläche \mathfrak{M} , so gelten die bei-

³⁾ Ein Spezialfall dieser Betrachtungen ist in [3], S. 657, vermerkt.

den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \sum a_i^2 M_i' &\leq \sum a_i^2 M_i, \\ \sum a_i'^2 M_i &\leq \sum a_i'^2 M_i', \end{aligned}$$

wo die a_i' die Längen der geschlossenen Trajektorien des Differentials φ' sind. Als Skalarprodukte geschrieben heisst das

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}, \mathbf{M}' - \mathbf{M}) &\leq 0, \\ (\mathbf{a}', \mathbf{M} - \mathbf{M}') &\leq 0, \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{a}' = (a_1'^2, \dots, a_p'^2)$ ist. Daraus folgt für den Einheitsvektor $\mathbf{v} = (\mathbf{M}' - \mathbf{M})/|\mathbf{M}' - \mathbf{M}|$: $(\mathbf{a}, \mathbf{v}) \leq 0$ und $-(\mathbf{a}, \mathbf{v}) - (\mathbf{k}, \mathbf{v}) \leq 0$, da $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \mathbf{k}$ mit $|\mathbf{k}| \rightarrow 0$ für $\mathbf{M}' \rightarrow \mathbf{M}$. Somit ist

$$\lim_{\mathbf{M}' \rightarrow \mathbf{M}} (\mathbf{a}, \mathbf{v}) = 0,$$

d. h. der Normalenvektor \mathbf{a} auf der Stützebene ist auch Normalenvektor auf der Fläche. Die Stetigkeit von \mathbf{a} in den inneren Punkten von \mathfrak{M} wurde in [2], Nr. 15, bewiesen.

8. Damit lässt sich nun die in [2], Nr. 19 (S. 124), ausgesprochene Vermutung beweisen. Es seien R und R' homöomorphe Riemannsche Flächen, $h: R \rightarrow R'$ ein Homöomorphismus von R auf R' , der die ausgezeichneten Punkte P_i von R in die ausgezeichneten Punkte P_i' von R' überführt. Ein zulässiges Kurvensystem $\{\gamma_i\}_{i=1, \dots, p}$ auf $R - \{P_i\}$ wird durch h in ein zulässiges Kurvensystem $\{\gamma_i'\}_{i=1, \dots, p}$ auf $R' - \{P_i'\}$ übergeführt, wo $\gamma_i' = h(\gamma_i)$ ist. Jedem nichtnegativen Einheitsvektor $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_p)$ entspricht je ein quadratisches Differential φ auf $R - \{P_i\}$ und φ' auf $R' - \{P_i'\}$ mit Modulvektoren $\mathbf{M} = \lambda \mathbf{m}$, $\mathbf{M}' = \lambda' \mathbf{m}$. λ und λ' sind stetige, positive Funktionen von \mathbf{m} im abgeschlossenen Winkelraum $m_i \geq 0$, und es gibt daher ein $\mathbf{m}_0 = (m_{01}, \dots, m_{0p})$ mit minimalem Quotienten λ'/λ . Seien etwa m_{01}, \dots, m_{0q} , $2 \leq q \leq p$, die von null verschiedenen Komponenten von \mathbf{m}_0 . Auf der zum Kurvensystem $\{\gamma_i\}_{i=1, \dots, q}$ gehörigen Modulfläche \mathfrak{M}_0 ist daher $\mathbf{M}_0 = \lambda_0 \mathbf{m}_0$ ein innerer Punkt, und aus der Minimaleigenschaft folgt, dass die beiden Tangentialebenen an die Flächen \mathfrak{M}_0 und \mathfrak{M}'_0 in den Punkten \mathbf{M}_0 und $\mathbf{M}'_0 = \lambda'_0 \mathbf{m}_0$ parallel sind. Das heisst aber: $a'_{0i} = \text{konst. } a_{0i}$, $i = 1, \dots, q$, w. z. b. w. Wenn $q = 1$, ist die Aussage trivial.

4. Tangentialebene in den Randpunkten von \mathfrak{M}

9. In jedem inneren Punkt von \mathfrak{M} ist der Normalenvektor $\mathbf{a} = (a_1^2, \dots, a_p^2)$, wo $a_i = |\alpha_i|$ die Länge einer geschlossenen, zu γ_i auf

$R - \{P_i\}$ homotopen Trajektorie ist. Das ist gleichzeitig die untere Grenze der Längen aller zu γ_i homotopen geschlossenen Kurven:

$$a_i = \inf_{\gamma \sim \gamma_i} \int_{\gamma} |\varphi(z)|^{1/2} |dz| .$$

Die zweite Definition hat auch für solche i einen Sinn, für die $M_i = 0$ ist, und es soll nun zunächst gezeigt werden, dass der so definierte Vektor auch am Rande stetig ist.

Wir betrachten allgemein eine Folge φ_k von quadratischen Differentialen endlicher Norm, die auf $R - \{P_i\}$ holomorph sind und in Norm gegen ein quadratisches Differential φ konvergieren. γ_0 sei eine geschlossene, nicht notwendig doppelpunktfreie Kurve auf $R - \{P_i\}$, die nicht zu einem Punkt von R homotop ist, und a_k bzw. a die untere Grenze der Längen aller zu γ_0 auf $R - \{P_i\}$ homotopen geschlossenen Kurven γ , gemessen in den Metriken $|\varphi_k(z)|^{1/2} |dz|$ und $|\varphi(z)|^{1/2} |dz|$. Dann gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = a .$$

Man könnte beweisen, dass in der abgeschlossenen Hülle der Kurvenmenge $\{\gamma\}$ eine kürzeste existiert (eine solche geht i. allg. durch gewisse ausgezeichnete Punkte P_i). Der Beweis wird hier jedoch mit Näherungskurven geführt.

Ist $\gamma \sim \gamma_0$ eine beliebige rektifizierbare Kurve auf $R - \{P_i\}$, so gilt

$$a_k \leq \int_{\gamma} |\varphi_k(z)|^{1/2} |dz|$$

und

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\gamma} |\varphi_k(z)|^{1/2} |dz| = \int_{\gamma} |\varphi(z)|^{1/2} |dz|$$

(vgl. [2], Nr. 15). Daraus folgt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq \int_{\gamma} |\varphi(z)|^{1/2} |dz| ,$$

und da γ beliebig ist,

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} a_k \leq a .$$

10. Um eine Ungleichung in der anderen Richtung zu bekommen, wählen wir zu jedem $k = 1, 2, \dots$ ein $\gamma_k \sim \gamma_0$, sodass

$$\int_{\gamma_k} |\varphi_k(z)|^{1/2} |dz| \leq a_k + \frac{1}{k}$$

ist. Diese γ_k können wir als geodätische Polygone, also stückweise analytisch voraussetzen. Ferner überdecken wir R durch ein festes System von Parameterumgebungen $U \leftrightarrow |z| \leq 1$. Dabei dürfen wir annehmen, dass jede Nullstelle von φ und jeder ausgezeichnete Punkt P_i (also insbesondere auch jeder Pol von φ) von genau einem $U = U_\nu$ überdeckt wird und im Mittelpunkt $z_\nu = 0$ liegt, und dass diese U_ν disjunkt sind.

Sei nun γ_k eine beliebige unserer Kurven. Wir betrachten diejenigen Intervalle γ_{ki} auf γ_k , die mit Ausnahme ihrer Endpunkte ausserhalb der Vereinigung $\cup U_\nu$ liegen, und die, falls die Endpunkte auf demselben ∂U_ν liegen, nicht homotop sind (bei festen Endpunkten und bezüglich der punktierten Fläche $R - \{P_i\}$) zu einer auf ∂U_ν gelegenen Kurve. Es gibt nun ein $\delta > 0$, sodass $|\varphi(z)| \geq \delta$ ausserhalb $\cup U_\nu$ (bezogen auf einen beliebigen der festgelegten Parameter). Aus $\varphi_k \rightarrow \varphi$ folgt $|\varphi_k(z)| \geq \delta/2$ auf $R - \cup U_\nu$ für alle hinreichend grossen k (vgl. [2], Nr. 15) und daher

$$|\gamma_k|_k \equiv \int_{\gamma_k} |\varphi_k(z)|^{1/2} |dz| \geq \int_{\sum_i \gamma_{ki}} |\varphi_k(z)|^{1/2} |dz| \geq \sqrt{\frac{\delta}{2}} \int_{\sum_i \gamma_{ki}} |dz|.$$

Aus der Beschränktheit der Längen $|\gamma_k|_k$ folgt daher die Beschränktheit der Längen der Intervallsummen $\sum_i \gamma_{ki}$, gemessen in den lokalen Parametern. Da andererseits jeder dieser Bogen offenbar eine gewisse, von k unabhängige Mindestlänge hat, folgt die Beschränktheit der Anzahl dieser Intervalle. Sei N eine solche von k unabhängige Schranke. Wählen wir in den U_ν konzentrische kleinere Umgebungen U'_ν und bilden wir, analog wie oben für die U_ν , die Teilintervalle γ'_{ki} , aber diesmal bezüglich U'_ν , so enthält offenbar jedes γ'_{ki} mindestens ein γ_{ki} , sodass die Schranke N auch für die Anzahl der γ'_{ki} gilt.

Wir können nun zu gegebenem $\varepsilon > 0$ die Umgebungen U'_ν so klein wählen, dass deren Radien (= kürzeste Verbindung zum Mittelpunkt, gemessen in der φ -Metrik) $< \varepsilon/(6N)$ sind. Ersetzen wir die zu den γ'_{ki} komplementären Intervalle γ''_{ki} deren Endpunkte also je auf demselben $\partial U'_\nu$ liegen und die bei festen Endpunkten in eine Kurve auf $\partial U'_\nu$ deformiert werden können, durch die beiden Radien, so erhalten wir eine Kurve $\tilde{\gamma}_k$, die in der abgeschlossenen Hülle der Homotopieklasse von γ_0 liegt, und für deren φ -Länge daher gilt:

$$a \leq |\tilde{\gamma}_k| \leq \sum_i |\gamma'_{ki}| + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Es gibt ein $\delta' > 0$, sodass $|\varphi(z)| \geq \delta'$ in $R - \cup U'_\nu$, und daher wie oben eine von k unabhängige Schranke M' für die Längen

$$\sum_i \int_{\gamma_{ki}} |dz|.$$

Wir wählen $k_0 > 3/\varepsilon$ so gross, dass für $k \geq k_0$ in $R - \cup U'_\nu$ gilt:

$$||\varphi_k(z)|^{1/2} - |\varphi(z)|^{1/2}| < \varepsilon/(3 M').$$

Dann sind folgende Ungleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} a_k &> |\gamma_k|_k - \frac{1}{k} \geq \sum_i |\gamma'_{ki}|_k - \frac{1}{k} \\ &= \sum_i |\gamma'_{ki}| - \left(\sum_i |\gamma'_{ki}| - \sum_i |\gamma'_{ki}|_k \right) - \frac{1}{k} \\ &\geq a - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{1}{k} > a - \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k \geq a,$$

q. e. d.

11. Sei nun $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_p)$ ein Randpunkt von \mathfrak{M} , indem etwa M_1, \dots, M_q von null verschieden seien und $M_{q+1} = \dots = M_p = 0$, $1 \leq q \leq p-1$. \mathbf{M}' und \mathbf{M}'' seien innere Punkte. Die Normalenvektoren bezeichnen wir mit \mathbf{a} , \mathbf{a}' , \mathbf{a}'' . Dann gilt zunächst:

$$\sum_{i=1}^p a_i''^2 M'_i \leq \sum_{i=1}^p a_i''^2 M_i.$$

In dieser Ungleichung kann man $\mathbf{M}' \rightarrow \mathbf{M}$ gehen lassen, und man erhält

$$\sum_{i=1}^p a_i''^2 M_i \leq \sum_{i=1}^p a_i''^2 M_i''.$$

Andererseits können wir bei festem \mathbf{M}' den Vektor $\mathbf{M}'' \rightarrow \mathbf{M}$ gehen lassen, wobei $\mathbf{a}'' \rightarrow \mathbf{a}$ geht. Daraus folgt

$$\sum_{i=1}^p a_i^2 M'_i \leq \sum_{i=1}^p a_i^2 M_i,$$

und dies wiederum auch dann, wenn \mathbf{M}' ein Randvektor ist. Wir können daher in dieser Ungleichung \mathbf{M} und \mathbf{M}' auf \mathfrak{M} beliebig wählen. Es gelte nun für zwei Vektoren \mathbf{M} und $\mathbf{M}' \neq \mathbf{M}$ Gleichheit. Der Punkt

$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{M} + (1-\lambda) \mathbf{M}'$, $0 \leq \lambda \leq 1$, liegt wegen der Konvexität von \mathfrak{M} zwischen dem Nullpunkt und \mathfrak{M} . Andererseits liegt er auf der Ebene $\sum a_i^2 (x_i - M_i) = 0$ und damit ausserhalb \mathfrak{M} . Also ist $\mathbf{x} \in \mathfrak{M}$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Die Tangentialebene in einem inneren Punkt der Verbindungsstrecke müsste daher die ganze Verbindungsstrecke enthalten, was nach früherem unmöglich ist.

Um schliesslich zu zeigen, dass in den Randpunkten auch die Tangentialebene existiert und die Form $\sum a_i^2 (x_i - M_i) = 0$ hat, können wir vorgehen wie in Nr. 7 bei inneren Punkten.

5. Extremale Metrik

12. Von J. A. Jenkins wurde in [1] folgende Aufgabe gelöst: Auf einer punktierten, kompakten Riemannschen Fläche $R - \{P_i\}$ ist ein zulässiges Kurvensystem $\{\gamma_i\}_{i=1, \dots, p}$ gegeben, und jeder Kurve γ_i ist eine Zahl $c_i \geq 0$ zugeordnet. Wir betrachten Metriken $\varrho(z) |dz|$ auf R , sodass die Länge

$$\int_{\gamma} \varrho(z) |dz| \geq c_i$$

ist für $\gamma \sim \gamma_i$ auf $R - \{P_i\}$, $i = 1, \dots, p$. Es soll in dieser Klasse

$$\|\varrho\|^2 = \iint_R \varrho^2(z) dx dy$$

minimal gemacht werden. Die Lösung existiert und hat die Form $\varrho(z) |dz| = |\varphi(z)|^{1/2} |dz|$, für ein geeignetes, eindeutig bestimmtes quadratisches Differential φ mit geschlossenen Trajektorien.

Um sie zu finden, kann man im Rahmen unserer Darstellung folgendermassen vorgehen: Man legt eine Stützebene mit dem Normalenvektor $\mathbf{c} = (c_1^2, \dots, c_p^2)$ an die zum System $\{\gamma_i\}_{i=1, \dots, p}$ gehörige Fläche \mathfrak{M} (den trivialen Fall $c_i = 0$, $i = 1, \dots, p$, schliessen wir aus). Berührt diese Ebene die Fläche in einem inneren Punkt \mathbf{M} , und ist $\tilde{\varphi}$ ein zu \mathbf{M} gehöriges quadratisches Differential mit den Längen \tilde{a}_i , so ist $\tilde{\mathbf{a}} = (\tilde{a}_1^2, \dots, \tilde{a}_p^2)$ der Normalenvektor auf \mathfrak{M} im Punkte \mathbf{M} , und daher $\tilde{\mathbf{a}} = \lambda^2 \mathbf{c}$. Für $\varphi = \tilde{\varphi}/\lambda^2$ gilt $a_i = \tilde{a}_i/\lambda = c_i$, $i = 1, \dots, p$. Sei $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_p)$ ein Randpunkt, etwa M_1, \dots, M_q von null verschieden und M_{q+1}, \dots, M_p gleich null, und wieder $\tilde{\varphi}$ ein zugehöriges quadratisches Differential. Dann ist $\tilde{a}_i = \lambda c_i$, $i = 1, \dots, q$, und $\tilde{a}_i \geq \lambda c_i$, $i = q+1, \dots, p$. Für $\varphi = \tilde{\varphi}/\lambda^2$ gilt $a_i = c_i$, $i = 1, \dots, q$, und $a_i \geq c_i$, $i = q+1, \dots, p$. Somit ist $|\varphi(z)|^{1/2} |dz|$ in beiden Fällen Vergleichsmetrik. Dass es die

extremale ist, sieht man mittels der Schwarzschen Ungleichung: Man bildet die radial aufgeschlitzten charakteristischen Ringgebiete von φ auf der Fläche $R - \{P_i\}$ auf horizontale Rechtecke konform ab und berechnet darin die Norm von ϱ .

Universität Zürich
Schweiz

Literatur

- 1] JENKINS, J. A.: On the existence of certain general extremal metrics. - Ann. of Math. 66, 1957, S. 440—453.
- [2] STREBEL, K.: Über quadratische Differentiale mit geschlossenen Trajektorien und extremale quasikonforme Abbildungen. - Festband zum 70. Geburtstag von Rolf Nevanlinna, Springer-Verlag, Berlin / Heidelberg / New York, 1966, S. 105—127.
- [3] TEICHMÜLLER, O.: Untersuchungen über konforme und quasikonforme Abbildungen. - Deutsche Math. 3, 1938, S. 621—678.