ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

398

ÜBER EINE DETERMINANTENIDENTITÄT UND DEN ERSTEN FAKTOR DER KLASSENZAHL DES KREISKÖRPERS

VON

SEPPO HYYRÖ

HELSINKI 1967
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1967.398

Am 13. Januar 1967 vorgelegt von P. J. Myrberg und K. Inkeri

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1967

Über eine Determinantenidentität und den ersten Faktor der Klassenzahl des Kreiskörpers

Wir betrachten für ein gegebenes Polynom F das Produkt

$$\prod F(x_1, \ldots, x_m), \tag{1}$$

wobei x_i für $i = 1, \ldots, m$ die Zahlen α_{ij} $(j = 1, \ldots, n(i))$ durchläuft. Das Hauptziel des vorliegenden Aufsatzes ist, über eine Methode zu diskutieren für Darstellung von (1) als eine $n(1) \ldots n(m)$-reihige Determinante mit Elementen aus dem Ring der Koeffizienten von F und der symmetrischen Grundfunktionen der $n(i)$ Zahlen $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$. Dies kommt z.B. in der Theorie der Klassenzahl des Kreiskörpers zur Anwendung (s. Nr. 2).

1. *Determinantenidentität.* Es sei $F(x_1, \ldots, x_m)$ ein gegebenes Polynom. Es seien $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in(i)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ gegebene Zahlen, wobei $n(1), \ldots, n(m)$ natürliche Zahlen sind. Wir setzen

$$f_i(x) = x^{n(i)} - (x - \alpha_{i1}) \ldots (x - \alpha_{in(i)}) \qquad (i = 1, \ldots, m).$$

Dann sind die Koeffizienten von $f_i(x)$, von den Vorzeichen abgesehen, symmetrische Grundfunktionen der Zahlen $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in(i)}$. Gibt es in $F(x_1, \ldots, x_m)$ Potenzen von x_i, deren Exponenten $\geqq n(i)$ sind, so wenden wir, nötigenfalls wiederholt, die Substitution

$$x_i^{n(i)} = f_i(x_i) \qquad (i = 1, \ldots, m) \tag{2}$$

an, so dass das Polynom $F(x_1, \ldots, x_m)$ die Form $F_1(x_1, \ldots, x_m)$ bekommt, wobei der Grad von F_1 in bezug auf x_i höchstens gleich $n(i) - 1$ ist. Dabei bleibt das Produkt (1) unverändert.

Für $i = 1, \ldots, m$; $j = 0, \ldots, N - 1$, mit $N = n(1) \ldots n(m)$, definieren wir die Zahlen $r(i, j)$, indem wir $q_0 = j$ und dann der Reihe nach für $i = 1, \ldots, m$

$$q_{i-1} = q_i n(i) + r(i, j), \qquad 0 \leqq r(i, j) < n(i)$$

mit ganzen $q_1, \ldots, q_m$ setzen. Weiter setzen wir

$$y_i = x_1^{r(1,i)} \dots x_m^{r(m,i)} \qquad (i = 0, \dots, N-1),$$
$$Y = (y_0, \dots, y_{N-1}).$$

Nun können wir kurz

$$F_1(x_1, \dots, x_m) = c_{00}\, y_0 + \dots + c_{0,N-1}\, y_{N-1} = G(Y)$$

schreiben. Die Zahlen c_{ij} (für $i > 0$) sind durch die Gleichungen

$$y_i G(Y) = \sum_{j=0}^{N-1} c_{ij}\, y_j \qquad (i = 0, \dots, N-1)$$

definiert, wobei die Potenzen von x_i mit den Exponenten $\geqq n(i)$ $(i = 1, \dots, m)$ mittels (2) eliminiert sind.

Wir haben den

Satz. *Das Produkt* (1) *ist gleich der Determinante*

(3) $$|c_{ij}| \qquad (i, j = 0, \dots, N-1).$$

Für den Beweis führen wir noch die Bezeichnungen

$$s(i, j) = r(i, j) + 1 \qquad (i = 1, \dots, m;\ j = 0, \dots, N-1),$$
$$a_{ij} = \alpha_{1\, s(1,j)}^{r(1,i)} \dots \alpha_{m s(m,j)}^{r(m,i)} \qquad (i, j = 0, \dots, N-1),$$
$$A_i = (a_{0i}, \dots, a_{N-1,i}) \qquad (i = 0, \dots, N-1)$$

ein. Dabei ist

$$F(\alpha_{1\, s(1,i)}, \dots, \alpha_{m s(m,i)}) = G(A_i) \qquad (i = 0, \dots, N-1).$$

Im Beweis brauchen wir den Hilfssatz:

Die verallgemeinerte Vandermondesche Determinante

(4) $$|a_{ij}| \qquad (i, j = 0, \dots, N-1)$$

kann mittels der Vandermondeschen Determinanten

$$|\alpha_{kj}^i| \qquad (i = 0, \dots, n(k) - 1;\ j = 1, \dots, n(k))$$

in der Form

(5) $$|\alpha_{1j}^i|^{N/n(1)} \dots |\alpha_{mj}^i|^{N/n(m)}$$

dargestellt werden.

Die Matrix (a_{ij}) ist nämlich von der Form $B_1 B_2$ mit

$$B_1 = (\delta_{ij} B) \qquad (i, j = 1, \dots, n(m)),$$
$$B_2 = (\alpha_{mj}^i I) \qquad (i = 0, \dots, n(m) - 1;\ j = 1, \dots, n(m)),$$

wobei δ_{ij} das Kroneckersche Symbol, B eine $q \times q$-Matrix $(q = N/n(m))$ und I die q-reihige Einheitsmatrix bedeutet. Daher ist

$$|a_{ij}| = |B|^{n(m)} \, |\alpha_{mj}^{i}|^{q} ,$$

woraus der Hilfssatz durch Induktion folgt.

Für den Beweis des Satzes setzen wir zuerst voraus, dass für jedes i die Zahlen $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in(i)}$ verschieden sind. Dann ist jede Determinante in (5), damit auch die Determinante $|a_{ij}|$ von Null verschieden. In diesem Fall folgt der Satz also aus

$$|c_{ij}| \, |a_{ij}| = |a_{ij} \, G(A_j)| = G(A_0) \ldots G(A_{N-1}) \, |a_{ij}| \, . \tag{6}$$

Sind nötigenfalls einige der Zahlen α_{ij} durch Veränderliche ersetzt, so gilt der Satz nach dem Obigen in einer »Umgebung» der Werte α_{ij}. Aus der Stetigkeit der Funktionen (1) und (3) ergibt sich nun, dass der Satz auch für die α_{ij} richtig ist.

2. *Anwendungen.* Als ein Beispiel sei ein Ausdruck für den ersten Faktor der Klassenzahl des Kreiskörpers der p^u-ten Einheitswurzeln diskutiert, wobei p eine ungerade Primzahl und u eine natürliche Zahl $\geqq 2$ bedeutet. Es sei g eine primitive Wurzel $(\bmod\, p^u)$ und g_i der kleinste positive Rest von g^i $(\bmod\, p^u)$. Weiter sei

$$H(x) = g_0 + g_1 x + \ldots + g_t x^t , \qquad t = \varphi(p^u) - 1 ,$$
$$w = \varphi(p^{u-1})/2 , \qquad v = (p-1)\, w$$

gesetzt. Dann lässt sich der genannte erste Faktor in der Form

$$h_1 = 2^{-v} \, p^{-vu+1} \, h_1' \prod H(\Theta) \tag{7}$$

darstellen, wobei h_1' den ersten Faktor der Klassenzahl des Kreiskörpers der p^{u-1}-ten Einheitswurzeln bezeichnet und Θ die Wurzeln der Gleichung

$$(x^{pw} + 1)/(x^w + 1) = 0 \tag{8}$$

durchläuft (s. [1]). Unter Anwendung von (8) kann man

$$\Theta^i H(\Theta) = \sum_{j=0}^{v-1} b_{ij} \Theta^j \qquad (i = 0 , \ldots , v-1)$$

schreiben. Also ist das Produkt $\Pi H(\Theta)$ in (7) gleich der Determinante $|b_{ij}|$. Dies ist ein Ergebnis von LEPISTÖ [1], Nr. 35 (abgesehen vom Vorzeichen und von der Reihenfolge der Zeilen der Determinante). Die Begründungsweise (6) (für $m = 1$) ist jedoch einfacher als die von [1].

T. Metsänkylä hat dem Verfasser mitgeteilt, dass er Betrachtungen von [1] in einem allgemeinen Kreiskörper generalisiert hat, wobei Determinantendarstellung für Produkte der Form (1) mit $m > 1$ zur Anwendung kommt. Hier sei nur auf die Arbeit [2] hingewiesen.

3. *Über eine Abschätzung von* Lepistö [1]. Es sei hierbei noch bemerkt, dass die erste Abschätzung (8.10) in [1] sich in die Form $K \leqq 2^{1+(u-5)w/2}$ verbessern lässt, wenn die Formeln (10.5) und (8.4) statt (8.7) angewendet werden. Dadurch ergibt sich für den ersten Faktor der Klassenzahl des Kreiskörpers der 2^u-ten Einheitswurzeln ($u \geqq 3$) statt der Abschätzung (8.11) von [1] die etwas bessere Abschätzung

$$h_1(2^u) \leqq 2^U , \qquad U = (u-6)\, 2^{u-3} + u \, .$$

Universität Oulu, Finnland

und

Universität Turku, Finnland

Literatur

[1] Lepistö, T.: On the first factor of the class number of the cyclotomic field and Dirichlet's L-functions. - Ann. Acad. Sci. Fenn. A I, 387 (1966), 1—53.

[2] Metsänkylä, T.: Über den ersten Faktor der Klassenzahl des Kreiskörpers (in Vorbereitung).

Gedruckt Januar 1967