ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

391

ZUR THEORIE DER SYMMETRISCHEN BILINEARABBILDUNGEN

VON

HARRI RIKKONEN

HELSINKI 1966
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

doi:10.5186/aasfm.1967.391

Am 14 Oktober 1966 vorgelegt von Olli Lehto und K. I. Virtanen.

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1966

Symmetrische Bilinearabbildungen

Diese Untersuchung ist eine Fortsetzung der früheren Arbeit [3] des Verfassers.

1. Es seien E^m und E^n zwei lineare m- bzw. n-dimensionale Räume über einem unendlichen kommutativen Körper A. Y sei eine bilineare symmetrische Abbildung von E^m in E^n.

Wir nehmen an, dass $\{a_1, \ldots, a_m\}$ eine Basis von E^m ist, und führen die folgende Bezeichnung ein:

$$M_{tu} = \{Ya_i a_j ; t \leqq j \leqq u , t \leqq i \leqq j\} .$$

M_{tu} ist also eine Menge von $\frac{1}{2}(u - t + 1)(u - t + 2)$ Vektoren des Raumes E^n. Speziell spannt M_{1m} die lineare Hülle $H(Y)$ der ganzen Bildmenge von Y auf. Bezeichnet man

$$\dim H(Y) = p ,$$

so gilt

$$p \leqq \tfrac{1}{2} m (m + 1) , \; p \leqq n .$$

Durch Fixierung eines von den beiden Argumenten von Y entsteht eine lineare Abbildung $Y h : E^m \to E^n$. Die Dimension des Bildraums $B(h)$ dieser Abbildung sei $r(h)$. Im folgenden betrachten wir den minimalen (für $h \neq 0$)[1]) und maximalen Wert von $r(h)$, in dem Falle, dass p gegeben ist.

2. Wir wiederholen zuerst den Satz 2 von [3] und ergänzen ihn mit einer Bemerkung.

Satz 1: *Ist*

$$s^2 - s + 2 \leqq 2p \leqq s^2 + s \quad (1 \leqq s \leqq m) ,$$

so gilt

$$\max \{r(h)\} \geqq s .$$

---

[1]) Natürlich gilt: $r(0) = 0$.

Diese Schranke ist bestmöglich.

Der Beweis in [3] der ersten Behauptung war zwar konstruktiv, aber liess doch offen, ob die Schranke tatsächlich erreicht wird. Um das zu zeigen konstruieren wir jetzt eine passende »Grenzabbildung».

Die Vektoren von M_{1m} sind im voraus unabhängig und können frei ausgewählt werden; dadurch wird die Abbildung Y völlig bestimmt. Von den $\frac{1}{2}(s^2 + s)$ Vektoren von M_{1s} seien genau p $(\geqq \frac{1}{2}(s^2 - s + 2))$ linear unabhängig. Wir setzen

$$H = 0 \quad \text{für } H \in M_{1m} - M_{1s}\,.$$

$H(Y)$ ist dann sicher p-dimensional und somit $\max\{r(h)\} \geqq s$. Es bleibt noch zu zeigen, dass $\max\{r(h)\} \leqq s$ gilt.

Sei h ein beliebiger Vektor von E^m. Dann gilt eindeutig

$$h = \lambda^1 a_1 + \ldots + \lambda^m a_m, \quad \lambda^i \in \Lambda \; (i = 1, \ldots, m)\,.$$

und entsprechend

$$Y\,h\,a_j = \lambda^1\,Y\,a_1\,a_j + \ldots + \lambda^m\,Y\,a_m\,a_j \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, m\,.$$

Die Menge $\{Y\,h\,a_1, \ldots, Y\,h\,a_m\}$ spannt den Bildraum $B(h)$ auf. Für $j > s$ ist aber $Y\,h\,a_j$ eine Linearkombination von Vektoren der Menge $M_{1m} - M_{1s}$, sodass

$$Y\,h\,a_j = 0 \quad \text{für } j = s + 1, \ldots, m\,,$$

woraus folgt: $r(h) \leqq s$. w.z.b.w.

3. Die Zahl $\max\{r(h)\}$ kann unmittelbar nach oben beschränkt werden. Es gilt der folgende

Satz 2: $\max\{r(h)\} \leqq \min\{m, p\}$.

Diese Schranke ist bestmöglich.

Grössere Werte kommen natürlich nicht in Frage. Es genügt also wieder zu zeigen, dass das Gleichheitszeichen gelten kann.

Für $p \geqq m$ wählen wir die Menge $\{Y\,a_1\,a_1, \ldots, Y\,a_1\,a_m\}$ linear unabhängig, sodass $r(a_1) = m$, und für $p < m$ die Menge $\{Y\,a_1\,a_1, \ldots, Y\,a_1\,a_p\}$, sodass $r(a_1) = p$. w.z.b.w.

4. Weil die Sätze 1 und 2 zusammen etwas unanschaulich sind, fügen wir eine kleine Tabelle hinzu, aus der die möglichen Werte von $\max\{r(h)\}$ für $m \leqq 7$ und der Inhalt der Sätze deutlicher hervorgehen (Tab. 1)

5. Schwieriger als $\max\{r(h)\}$ ist die Zahl $\min\{r(h)\}$ (also für $h \neq 0$) zu behandeln. Doch kann man leicht folgendes beweisen:

Satz 3: $\min\{r(h)\} \geqq \max\{0, p - \frac{1}{2}(m^2 - m)\}$.

Tabelle 1.

p \ m	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2		2	2	2	2	2	2
3		2	2, 3	2, 3	2, 3	2, 3	2, 3
4			3	3, 4	3, 4	3, 4	3, 4
5			3	3, 4	3, 4, 5	3, 4, 5	3, 4, 5
6			3	3, 4	3, 4, 5	3, . . , 6	3, . . , 6
7, . . , 10				4	4, 5	4, 5, 6	4, . . , 7
11, . . , 15					5	5, 6	5, 6, 7
16, . . , 21						6	6, 7
22, . . , 28							7

Diese Schranke ist bestmöglich.

Es sei zuerst $p \leqq \frac{1}{2}(m^2 - m)$. Man behauptet, dass es eine solche Abbildung Y gibt, dass $\min\{r(h)\}$ den Wert 0 erreicht. Wir wählen einfach

$$Y\, a_1\, a_j = 0 \quad \text{für} \quad j = 1, \ldots, m\,,$$

sodass $r(a_1) = 0$. Nun gibt es in der Menge

$$M_{1m} - \{Y\, a_1\, a_j\,;\, 1 \leqq j \leqq m\} = M_{2m}$$

noch $\frac{1}{2}(m^2 - m)$ Vektoren, die wir so wählen können, dass $\dim H(Y) = p$ ist.

Es sei $p > \frac{1}{2}(m^2 - m)$. Gibt es nun $a_1 \in E^m$ $(a_1 \neq 0)$, sodass

$$r(a_1) \leqq p - \tfrac{1}{2}(m^2 - m) - 1\,,$$

so kann in der Menge M_{1m} wegen

$$M_{1m} = \{Y\, a_1\, a_j\,;\, 1 \leqq j \leqq m\} \cup M_{2m}$$

höchstens $p - 1$ linear unabhängige Vektoren sein, was einen Widerspruch enthält. Also gilt

$$\min\{r(h)\} \geqq p - \tfrac{1}{2}(m^2 - m)\,.$$

Um eine »Grenzabbildung» zu konstruieren wählt man a_1 so, dass

$$r(a_1) = p - \tfrac{1}{2}(m^2 - m)\,.$$

M_{2m} wählt man so, dass sie linear unabhängig ist und dass die lineare Hülle dieser Menge und der Unterraum $B(a_1)$ linear unabhängig sind. Dann gilt: $\dim H(Y) = p$. w.z.b.w.

6. Eine triviale obere Schranke für $\min\{r(h)\}$ ist die entsprechende Zahl $\max\{r(h)\}$. Wir geben im folgenden zwei Beispiele, die von verschiedener Natur sind. In dem ersten ist $r(h)$ eine Konstante und also[1])

$$\min\{r(h)\} = \max\{r(h)\};$$

in dem zweiten dagegen notwendig

$$\min\{r(h)\} < \max\{r(h)\}.$$

Das letztgenannte Beispiel zeigt, dass die obengenannte obere Schranke für jedes 3-tupel $(m, p, \max\{r(h)\})$ nicht bestmöglich ist.

Im folgenden ist Λ der Körper der reellen Zahlen.

7. $\{a_1, a_2, a_3\}$ sei eine Basis von E^3. Wir definieren die Abbildung Y durch folgende Annahmen:

1° Die Menge

$$\{Y a_1 a_1,\ Y a_1 a_2,\ Y a_1 a_3,\ Y a_2 a_2,\ Y a_2 a_3\}$$

ist linear unabhängig.

2° $Y a_3 a_3 = - Y a_2 a_2$.

Es gilt also $p = 5$ und $\max\{r(h)\} = 3$. Wir behaupten, dass $r(h) = 3$ für jedes $h \neq 0$.

Es sei

$$h = \lambda^1 a_1 + \lambda^2 a_2 + \lambda^3 a_3 .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Y h a_1 &= \lambda^1 Y a_1 a_1 + \lambda^2 Y a_1 a_2 + \lambda^3 Y a_1 a_3 ,\\ Y h a_2 &= \lambda^1 Y a_1 a_2 + \lambda^2 Y a_2 a_2 + \lambda^3 Y a_2 a_3 ,\\ Y h a_3 &= \lambda^1 Y a_1 a_3 + \lambda^2 Y a_2 a_3 - \lambda^3 Y a_2 a_2 . \end{aligned}$$

Setzen wir

$$\alpha_1 Y h a_1 + \alpha_2 Y h a_2 + \alpha_3 Y h a_3 = 0 ,$$

so erhalten wir wegen der Annahme 1 das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lllll} \lambda^1 \alpha_1 & & & = & 0\\ \lambda^2 \alpha_1 & + \lambda^1 \alpha_2 & & = & 0\\ \lambda^3 \alpha_1 & & + \lambda^1 \alpha_3 & = & 0\\ & \lambda^2 \alpha_2 & - \lambda^3 \alpha_3 & = & 0\\ & \lambda^3 \alpha_2 & + \lambda^2 \alpha_3 & = & 0 . \end{array}$$

Dieses System hat für jedes 3-tupel $(\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$ mit $(\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2 > 0$ nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, wie leicht zu sehen ist. Die Menge

[1]) Diese Gleichung gilt sicher in dem Falle: $p = \frac{1}{2} m (m + 1)$.

$\{Y\,h\,a_1,\ Y\,h\,a_2,\ Y\,h\,a_3\}$ ist also für jedes $h \neq 0$ linear unabhängig und somit $r(h) = 3$. w.z.b.w.

8. Jetzt nehmen wir an, dass

$$m = p = \max\{r(h)\} = 3\,.$$

a_1 sei ein »maximaler» Vektor, sodass die Menge

$$\{Y\,a_1\,a_1,\ Y\,a_1\,a_2,\ Y\,a_1\,a_3\}$$

linear unabhängig ist. Die anderen Vektoren der Menge M_{13} haben die Form:

$$\begin{aligned} Y\,a_2\,a_2 &= \xi^1\,Y\,a_1\,a_1 + \xi^2\,Y\,a_1\,a_2 + \xi^3\,Y\,a_1\,a_3 \\ Y\,a_2\,a_3 &= \eta^1\,Y\,a_1\,a_1 + \eta^2\,Y\,a_1\,a_2 + \eta^3\,Y\,a_1\,a_3 \\ Y\,a_3\,a_3 &= \zeta^1\,Y\,a_1\,a_1 + \zeta^2\,Y\,a_1\,a_2 + \zeta^3\,Y\,a_1\,a_3\,. \end{aligned}$$

Nehmen wir einen beliebigen Vektor $h \in E^3$:

$$h = \lambda^1\,a_1 + \lambda^2\,a_2 + \lambda^3\,a_3\,,$$

stellen die Vektoren $Y\,h\,a_j\ (j = 1,\ 2,\ 3)$ mit Hilfe der Basisvektoren $Y\,a_1\,a_j\ (j = 1,\ 2,\ 3)$ dar und setzen schliesslich

$$\alpha_1\,Y\,h\,a_1 + \alpha_2\,Y\,h\,a_2 + \alpha_3\,Y\,h\,a_3 = 0\,,$$

so erhalten wir durch einfache Kalkulation das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \lambda^1\alpha_1 + (\lambda^2\,\xi^1 + \lambda^3\,\eta^1)\,\alpha_2 + (\lambda^2\,\eta^1 + \lambda^3\,\zeta^1)\,\alpha_3 &= 0 \\ \lambda^2\alpha_1 + (\lambda^1 + \lambda^2\,\xi^2 + \lambda^3\,\eta^2)\,\alpha_2 + (\lambda^2\,\eta^2 + \lambda^3\,\zeta^2)\,\alpha_3 &= 0 \\ \lambda^3\alpha_1 + (\lambda^2\,\xi^3 + \lambda^3\,\eta^3)\,\alpha_2 + (\lambda^1 + \lambda^2\,\eta^3 + \lambda^3\,\zeta^3)\,\alpha_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Wir fragen nun: Können die ξ^i-, η^i- und ζ^i-Zahlen so ausgewählt werden, dass dieses Gleichungssystem für jedes 3-tupel $(\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3)$ mit $(\lambda^1)^2 + (\lambda^2)^2 + (\lambda^3)^2 > 0$ nur die triviale Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ hat?

Die Antwort muss verneinend sein, denn die Determinante des Systems ist offensichtlich eine kubische Form der Veränderlichen $(\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3)$ und als solche stets indefinit. Es gibt also immer mindestens einen 1-dimensionalen Unterraum des 3-dimensionalen arithmetischen Vektorraumes $\{(\lambda^1,\ \lambda^2,\ \lambda^3)\}$, wo die Determinante verschwindet. Für die entsprechenden Vektoren $h \in E^3$ ist die Menge $\{Y\,h\,a_j\,;\,j = 1,\ 2,\ 3\}$ linear abhängig und $r(h) < 3$, wie im Schluss des Paragraphen 6 vorhergesagt wurde.

Universität Helsinki
Finnland

Literatur

[1] Greub, W.: Linear Algebra. - Grundlehren math. Wiss. 97, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 2. ed. 1963.

[2] Nevanlinna, F. und R.: Absolute Analysis. - Grundlehren math. Wiss. 102, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.

[3] Rikkonen, H.: Über symmetrische Bilinearabbildungen von linearen Räumen. - Ann. Acad. Scient. Fennicæ A. I. 330, 1962, 8 S.

Gedruckt Oktober 1966