ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

380

ÜBER DIE LÖSUNG VON PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG NACH DER METHODE DER SUKZESSIVEN APPROXIMATIONEN

VON

MARTTI TIENARI

HELSINKI 1965
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1966.380

Am 10. September 1965 vorgelegt von R. Nevanlinna und Olli Lehto

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1965

1. Einleitung

1.1. In dieser Arbeit wird das Problem der Lösung von der nichtlinearen vektoriellen Differentialgleichung

$$dy = f(x, y)\, dx \tag{1}$$

betrachtet. In (1) ist das Differential im Fréchet'schen Sinne zu verstehen. Die Räumen R_x^m und R_y^n der Variablen sind endlichdimensional und euklidisch.

Es handelt sich um einen neuen Beweis für den allgemeinen Existenzsatz der Lösung von Gleichung (1). Dieser Beweis bringt bezüglich der Schärfe der Annahmen nichts neues (vergl. [1] — [4]). Unsere Betrachtungen sind aber begriffsgemäss einfach, und die Konvergenz bei der Methode der sukzessiven Approximationen im mehrdimensionalen Argumentenraum wird von einem neuen Standpunkt aus untersucht. Für die Einleitung in den Problemenkreis sei auf [5] hingewiesen.

1.2. Die Behandlung der mehrdimensionalen Differentialrechnung gestaltet sich einfach, wenn man koordinatenfreie sog. absolute Bezeichnungen anwendet. In dieser Arbeit folgen wir der in der Monographie [5] eingeführten Schreibweise, die viele bekante Sätze der klassischen Analysis einer reellen Variablen zu mehreren Dimensionen verallgemeinern erlaubt.

1.3. Die Idee unseres Beweises ist kurz die folgende:

Zuerst wird die Eindeutigkeit der Lösung von Gleichung (1) bewiesen. Eine notwendige Bedingung für die Integrabilität wird danach wie üblich unter Anwendung der Symmetrie des zweiten Differentials gewonnen.

Das Neue unserer Methode besteht in der Art, wie man das Hinreichen der Integrabilitätsbedingung beweist. Dies gelingt durch direkte Betrachtung der sukzessiven Annäherungen $\{y_\nu(x)\}$. Dabei wird eine Folge von Restgliedsoperatoren $\{R_\nu(x)\}$ durch die Gleichung

$$y_\nu'(x) = f(x, y_\nu(x)) + R_\nu(x)\, , \nu = 0, 1, \ldots ,$$

definiert. Unter Anwendung der Integrabilitätsbedingung wird dann eine Abschätzung für die Norm von $R_\nu(x)$ hergeleitet:

$$|R_\nu(x)| \leqq M \frac{(3K|x - x_0|)^\nu}{\nu\,!}, \nu = 0, 1, \ldots,$$

wo $M = \sup |f(x, y)|$ und $K = \sup |f_y(x, y)|$ sind. Danach wird gezeigt, dass $\bar{y}(x) = \lim y_\nu(x)$ die Gleichung (1) erfüllt.

1.4. Um eine mehrmals vorkommende Abschätzung zu vereinfachen, schicken wir einen einfachen Hilfssatz voraus.

Lemma. *Es sei $\{\varphi_\nu(r)\}$ eine Folge von nichtnegativen Funktionen des reellen Intervalls $0 \leqq r \leqq r_0$, die mit Ungleichungen*

$$\varphi_1(r) \leqq K, \varphi_{\nu+1}(r) \leqq M \int_0^r \varphi_\nu(\varrho)\, d\varrho, \nu = 1, 2, \ldots,$$

beschränkt sind. Dann gilt die Abschätzung

$$\varphi_\nu(r) \leqq K \frac{(Mr)^{\nu-1}}{(\nu - 1)\,!}, \nu = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Der Beweis wird durch Induktion geführt. Die Abschätzung (2) gilt für $\nu = 1$. Falls (2) für $\nu = n$ gültig angenommen wird, erhält man

$$\varphi_{n+1}(r) \leqq M \int_0^r \varphi_n(\varrho)\, d\varrho \leqq M \int_0^r K \frac{(M\varrho)^{n-1}}{(n - 1)!}\, d\varrho = K \frac{(Mr)^n}{n\,!}.$$

Also besteht (2) auch für $\nu = n + 1$.

2. Die lineare partielle Differentialgleichung erster Ordnung

2.1. Wir untersuchen die Gleichung (1) unter der Anfangsbedingung

$$y(x_0) = y_0. \tag{3}$$

Dafür sei im Gebiet

$$G_{xy} = G_x \times G_y = \{|x - x_0| \leqq r_x\} \times \{|y - y_0| \leqq r_y\}$$

folgendes angenommen:

A. Der Operator $f(x, y)$ ist in G_{xy} stetig.

B. Für beliebige $y_1, y_2 \in G_y, x \in G_x$ gilt die Lipschitz-Bedingung: $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq K |y_1 - y_2|$.

C. Die partiellen Ableitungen $f_x(x, y)$ und $f_y(x, y)$ sind stetig in G_{xy}.

Aus der Annahme A folgt es, dass in G_{xy} $\sup \, |f(x\,,y)| = M$ endlich ist. Weiter bemerke man, dass B erfüllt ist, falls die Aussage C gilt; und zwar ist die Konstante K gleich der oberen Grenze der Norm $|f_y(x, y)|$.

2.2 Wir beweisen erstens, dass die Lösung $y(x)$ der Gleichung (1) unter Bedingung (3) eindeutig ist. Es sei hierzu angenommen, dass in G_{xy} eine andere Lösung $\bar{y}(x)$ existiert. Dann ist $d[y(x) - \bar{y}(x)] = [f(x\,, y(x)) - f\,(x\,, \bar{y}(x))]\,dx$, und also

$$y(x) - \bar{y}(x) = \int_{x_0}^{x} [f(\,t\,, y(t)) - f(\,t\,, \bar{y}(t))]\,dt\,, \tag{4}$$

weil $y(x_0) - \bar{y}(x_0) = 0$. In (4) soll das Integral längs der Strecke x_0x genommen werden. Setzt man auf $0 \leqq r \leqq r_0 \leqq r_x$

$$\psi\,(r) = \sup_{|x-x_0| \leqq r} |y(x) - \bar{y}(x)|\,,$$

so erhält man

$$|y(x) - \bar{y}(x)| \leqq K \int_{x_0}^{x} |y(t) - \bar{y}(t)| \cdot |dt| \leqq K \int_{0}^{r} \psi(\varrho)\,d\varrho$$

und daraus weiter

$$\psi(r) \leqq K \int_{0}^{r} \psi(\varrho)\,d\varrho\,.$$

Nach der Definition ist $\psi(r) \leqq 2r_y$, und so erhält man nach dem Lemma die Abschätzungen:

$$\psi(r) \leqq 2r_y \frac{(Kr)^n}{n\,!}\,, n = 0\,,1\,, \ldots\,.$$

Hieraus sieht man, dass $\psi(r) = 0$ und $y(x) = \bar{y}(x)$ auf $|x - x_0| \leqq r_0$ ist.

2.3 Die Gleichung (1) ist nicht allgemein integrierbar, der Operator $f(x\,, y)$ muss hierzu eine besondere Integrabilitätsbedingung erfüllen. Eine notwendige Bedingung finden wir, wenn wir die Symmetrie des zweiten Differentials von der Lösungsfunktion

$$y''(x)kh = d(y'(x)h) = d(f(x\,, y(x))h) = f'_x kh + f'_y(y'k)h = f'_x kh + f'_y(fk)h \tag{5}$$

fordern. Die Form (5) muss symmetrisch sein, d.h.

$$f'_x kh + f'_y(fk)h = f'_x hk + f'_y(fh)k\,. \tag{6}$$

Die Bedingung (6) ist aber auch hinreichend für die Integrierbarkeit, wie wir im folgenden Kapitel beweisen werden. Für einen eindimensionalen Argumentenraum R_x^1 ist (6) immer erfüllt. Diese Bedingung hat also nur in Räumen R_x^m von mehreren Dimensionen $(m > 1)$ Bedeutung.

3. Die Methode der sukzessiven Approximationen von Picard

3.1. Wir führen den Existenzbeweis konstruktiv durch. Die Technik ist eine unmittelbare Verallgemeinerung von der Picardschen Methode der sukzessiven Approximationen.

Wir konstruiren eine Funktionenfolge $\{y_\nu(x)\}$:

$$\begin{aligned} & y_0(x) = y_0\,, \\ & y_{\nu+1}(x) = y_0 + \int_0^1 f(t\,, y_\nu(t))\,(x - x_0)\,d\tau\,,\ \nu = 0\,, 1\,, \ldots\,, \end{aligned} \tag{7}$$

$t = x_0 + \tau(x - x_0)$. Diese Folge ist wenigstens auf $|x - x_0| \leqq r_0\,, r_0 = \min\,[r_x\,, r_y/M]$ definiert. Aus (7) sehen wir, dass die Funktionen $y_\nu(x)$ stetig differenzierbar sind. Die Stetigkeit der Ableitungsoperatoren $y'_\nu(x)$ wird durch Induktion bewiesen: Dabei schreiben wir explizite

$$y'_{\nu+1}(x)k = \int_0^1 [\tau f'_x kh + \tau f'_y(y'_\nu k)h + fk]\,d\tau\,, \tag{8}$$

worin $f = f(t\,, y_\nu(t))\,, t = x_0 + \tau(x - x_0)\,, h = x - x_0\,, y = y_\nu(t)\,.$

3.2. Um die Konvergenz der Folge (7) zu untersuchen, definieren wir auf dem Intervall $0 \leqq r \leqq r_0 \leqq r_x$ die reelle Funktion

$$m_\nu(r) = \sup_{|x-x_0| \leqq r} |y_\nu(x) - y_{\nu-1}(x)|\ ,\ \nu = 1, 2\,, \ldots\,.$$

Aus

$$|y_{\nu+1}(x) - y_\nu(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} [f(t, y_\nu(t)) - f(t\,, y_{\nu-1}(t))]\,dt \right| \leqq$$

$$\int_{x_0}^{x} K\,|y_\nu(t) - y_{\nu-1}(t)| \cdot |dt| \leqq K \int_0^r m_\nu(\varrho)d\varrho$$

erhalten wir die Abschätzung

$$m_{\nu+1}(r) \leqq K \int_0^r m_\nu(\varrho)\, d\varrho \ , \ \nu = 1 \ , 2 \ , \ldots .$$

Weil weiter $m_1(r) = \sup | y_1(x) - y_0 | \leqq r_y$ ist, können wir nach dem Lemma

$$m_\nu(r) \leqq r_y \frac{(Kr)^{\nu-1}}{(\nu - 1)\ !}$$

schreiben. Folglich konvergiert die Folge $\{y_\nu(x)\}$ gleichmässig auf dem Intervall $|x - x_0| \leqq r_0$. Die Grenzfunktion

$$\bar{y}(x) = \lim_{\nu \to \infty} y_\nu\ (x)$$

ist stetig auf $|x - x_0| \leqq r_0$.

3.3. Wir untersuchen nun die Konvergenz der Folge $\{y'_\nu(x)\}$. Dafür definieren wir einen Restgliedoperator $R_\nu(x)$ durch die Gleichung

$$y'_\nu\ (x) = f(x \ , y_\nu\ (x)\ ) + R_\nu\ (x) \ , \ \nu = 0 \ , 1 \ , 2 \ , \ldots , \tag{9}$$

und auf dem Intervall $0 \leqq r \leqq r_0$ die reelle Funktion

$$l_\nu(r) = \sup_{|x - x_0| \leqq r} |R_\nu(x)| \ . \tag{10}$$

Integriert man die Gleichung (9) längs der Strecke $x_0 x$,

$$\int_{x_0}^x y'_\nu\ (t) dt = \int_0^1 f(t \ , y_\nu\ (t))\ (x - x_0) d\tau + \int_0^1 R_\nu\ (t)(x - x_0) d\tau \ ,$$

so wird mit Rücksicht auf (7)

$$y_\nu(x) - y_{\nu+1}\ (x) = \int_0^1 R_\nu\ (t)\ (x - x_0)\ d\tau \tag{11}$$

erhalten.

3.4. Um eine Abschätzung des Restgliedes $R_\nu(x)$ zu gewinnen, werden wir eine Rekursionsformel für $R_\nu(x)$ herleiten. Einerseits sei dafür die Gleichung (9) in der Formel (8) eingesetzt. Wir erhalten den Ausdruck

$$y'_{\nu+1}(x)k = \int_0^1 (\tau f'_x\, kh + \tau f'_y\ (fk)h + fk) d\tau + \int_0^1 \tau f'_y\ (R_\nu\ k) h d\tau \ , \tag{12}$$

mit $f = f(t\,,\,y_\nu(t))$, $R = R_\nu(t)$, $h = x - x_0$, $t = x_0 + \tau(x - x_0)$. Anderseits bemerkt man, dass

$$f(x\,,\,y_\nu\,(x)\,)\,k = \int\limits_0^1 \frac{d}{d\tau}\,[\tau f(t\,,\,y_\nu\,(t))k]\,d\tau$$

$$= \int\limits_0^1 [\tau f'_x hk + \tau f'_y\,(y'_\nu\,h)k + fk]d\tau\,.$$

Wenn wir in diese Formel den Ausdruck (9) von $y'_\nu = y'_\nu(t)$ einsetzen und die Integrabilitätsbedingung (6) anwenden, ersehen wir

$$f(x\,,\,y_\nu\,(x))k = \int\limits_0^1 [\tau f'_x kh + \tau f'_y\,(fk)h + fk]\,d\tau + \int\limits_0^1 \tau f'_y\,(R_\nu\,h)k\,d\tau\,.$$

Endlich subtrahieren wir diese letzte Gleichung aus (12) und erhalten die erwünschte Beziehung

$$\begin{aligned} R_{\nu+1}(x)k &= f(x\,,\,y_\nu(x))k - f(x\,,\,y_{\nu+1}(x))k \\ &+ \int\limits_0^1 [f'_y\,(R_\nu\,k)h - f'_y\,(R_\nu\,h)k]\tau d\tau\,, \end{aligned} \tag{13}$$

die zur Abschätzung geeignet ist.

3.5. Aus der Gleichung (13) ergibt sich die Abschätzung

$$|R_{\nu+1}(x)k| \leqq K|y_\nu(x) - y_{\nu+1}(x)| + \int\limits_0^1 2\,|f'_y|\,|R_\nu|\,|h|\,d\tau\ ,$$

wenn $|k| = 1$ gesetzt ist. Mit Rücksicht auf die Beziehungen (10) und (11) erhalten wir ferner

$$|R_{\nu+1}(x)k| \leqq K\int\limits_0^r l_\nu(\varrho)d\varrho + \int\limits_0^r 2K\,l_\nu(\varrho)d\varrho\,.$$

Hieraus ersieht man, dass

$$l_{\nu+1}(r) \leqq 3K\int\limits_0^r l_\nu\,(\varrho)d\varrho\,.$$

Weil anderesits $l_0(r) = \sup |R_0(x)| = \sup| -f(x, y_0)| = M$ ist, erhalten wir nach dem Lemma die Abschätzung [1])

$$l_\nu(r) \leqq M \frac{(3Kr)^\nu}{\nu!} . \tag{14}$$

3.6. Wir kommen zur Frage der Konvergenz der Ableitungsfolge $\{y'_\nu(x)\}$. Wenn die Folge $\{y_\nu(x)\}$ gegen $\bar{y}(x)$ strebt, so konvergiert $\{y'_\nu(x)\}$ gegen $f(x, \bar{y}(x))$: Nach Abschätzung (14) konvergiert $\{R_\nu(x)\}$ gleichmässig auf $|x - x_0| \leqq r_0$ gegen Null, und daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} |y'_\nu(x) - f(x, \bar{y}(x))| &= |f(x, y_\nu(x)) - f(x, \bar{y}(x)) + R_\nu(x)| \\ &\leqq |f(x, y_\nu(x)) - f(x, \bar{y}(x))| + |R_\nu(x)| \\ &\leqq K|y_\nu(x) - \bar{y}(x)| + |R_\nu(x)| < \varepsilon , \end{aligned}$$

wenn $\nu > \nu_\varepsilon$. Hieraus sieht man, dass $\bar{y}(x)$ differenzierbar auf $|x - x_0| \leqq r_0$ ist und dass dort

$$\bar{y}'(x)k = f(x, \bar{y}(x))k$$

gilt.

Wir haben so das folgende Ergebnis bewiesen: *Unter den Annahmen A, B, C ist die Integrabilitätsbedingung (6) hinreichend für die Existenz der Lösung von der Differentialgleichung (1).*

Finnische Kabelwerke A. G.
Helsinki, Finnland

Literatur

[1] BÄCHLI, G.: Über die Integrierbarkeit von Systemen partiellen, nichtlinearen Differentialgleichungen erster Ordnung. - Comment. Math. Helv. 36, 1961/62, S. 245–264.

[2] DIEUDONNÉ, J.: Foundations of modern analysis. Pure Appl. Math. 10, Academic Press, New York - London, 1960.

[3] KELLER, H.H.: Ueber die Differentialgleichung erster Ordnung in normierten linearen Räumen. - Rend. Circ.Mat. Palermo II 8, 1959, S. 117–144.

[4] LOUHIVAARA, I.S.: Ueber die Differentialgleichung erster Ordnung in normierten linearen Räumen. - Rend.Circ.Mat. Palermo II 10, 1961, S. 45–58.

[5] NEVANLINNA, F. und R.: Absolute Analysis. - Grundlehren Math. Wiss. 102, Springer-Verlag, 1959.

[1]) Im Falle des eindimensionalen Raumes R_x^1 fällt aus Formel (13) das Integral der rechten Seite weg. Wir können dann in Abschätzung (14) $3K$ durch K ersetzen.

Gedruckt September 1965