

ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

374

ITERATION
DER POLYNOME MIT REELLEN KOEFFIZIENTEN

VON

P. J. MYRBERG

HELSINKI 1965
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

<https://doi.org/10.5186/aasfm.1966.374>

Vorgelegt am 14. Mai 1965.

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1965

Einleitung

1. Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, gewisse in unseren früheren Arbeiten für die Iteration der quadratischen Polynome und Binome entwickelte Sätze auf allgemeine Polynome mit reellen Koeffizienten zu übertragen. Indem wir uns im folgenden der Einfachheit halber auf gerade Polynome beschränken, schreiben wir diese in der Form

$$(1,1) \quad y_1 = P(y) = \sum_{r=1}^m c_r y^{2r} - p,$$

wo y eine komplexe Variable, ferner c_r reelle Konstanten ($c_m = 1$) und p einen reellen Parameter bezeichnet.

Als Hauptaufgabe haben wir die Untersuchung des Attraktionsgebiets des unendlich fernen Punktes in seiner Abhängigkeit vom Parameter p , wobei insbesondere die biquadratischen Polynome eingehend behandelt werden. Für diese Untersuchung dienen die Entwicklungen der beiden ersten Kapitel als Vorbereitung. Die im zweiten Kapitel eingeführten verallgemeinerten G-Polynome besitzen schon für sich ein gewisses Interesse, weil man mit Hilfe ihrer Nullstellen attraktive Zyklen beliebiger Ordnung für die Abbildung (1,1) finden kann.

1. Iteration im reellen Gebiet

2. Wir schreiben unser Polynom in der Form

$$(2,1) \quad y_1 = P(y) = Q(y) - p,$$

wo $Q(y)$ ein den Bedingungen

$$Q(-y) = Q(y), \quad Q(0) = Q'(0) = 0$$

genügendes Polynom bezeichnet.

Es sei y zuerst ein beliebig gegebener reeller oder imaginärer Punkt und

$$(2,2) \quad y_1, y_2, y_3, \dots$$

die unendliche Folge seiner durch Iteration von (2,1) erhaltenen Bildpunkte. Wir nennen y einen Punkt erster Klasse, wenn

$$(2,3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty,$$

sonst einen Punkt zweiter Klasse. Zur letzteren Klasse gehören u.a. die Fixpunkte der Abbildung (2,1), d.h. die Wurzeln der Gleichung

$$(2,4) \quad Q(y) - p = y,$$

und allgemein die Fixpunkte der durch n -fache Iteration von (2,1) erhaltenen Abbildung

$$(2,5) \quad y_n = P_n(y),$$

welche bei Anwendung von (2,1) miteinander zyklisch permutiert werden. Bei reellem y , auf welchen Fall wir uns im folgenden beschränken, bestehen die Fixpunkte von (2,1) aus den Schnittpunkten der Kurve

$$(2,6) \quad y_1 = Q(y)$$

mit der Geraden

$$(2,7) \quad y_1 = y + p.$$

Wir beginnen mit dem extremen Fall, wo bei (2,1) keine reellen Fixpunkte existieren. Dies findet offenbar für $p < p_0$ statt, wo p_0 einen reellen Wert von p bezeichnet, für welchen die Gerade (2,7) die Kurve (2,6) berührt. In diesem Fall gilt von y unabhängig

$$(2,8) \quad y_{n+1} > y_n,$$

und es existiert somit der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, welcher nur ∞ sein kann, weil es sich hier um einen reellen Fixpunkt von (2,1) handelt. Es gilt somit der

Satz 1. Die erste Klasse enthält die Gesamtheit der reellen Punkte stets und nur dann, wenn $p < p_0$.

Beispiel: $Q(y) = y^m$. Aus den Gleichungen

$$y^m - p - y = 0, \quad m y^{m-1} = 1$$

ergibt sich

$$p_0 = -\frac{m-1}{m^{m/m-1}}.$$

3. Es sei von jetzt an $p \geq p_0$, in welchem Falle bei (2,1) auch reelle Fixpunkte vorkommen. Wir betrachten nun das Intervall

$$A_q : \quad -q \leq y \leq q ,$$

wo q den grössten (stets positiven und repulsiven) Fixpunkt von (2,1) bezeichnet. Weil ausserhalb des Intervalles A_q die Ungleichung (2,8) gilt, so hat man den

Satz 2. Alle ausserhalb des Intervalles A_q liegenden Punkte gehören zur ersten Klasse.

Es sei nachher y ein beliebiger Punkt von A_q . Offenbar gehört der Bildpunkt y_1 von y und somit sämtliche Punkte der Folge (2,2) wieder zu A_q , wenn für jeden Punkt von A_q die Bedingung $|P(y)| \leq q$, also

$$(3,1) \quad |Q(y) - p| \leq q ,$$

erfüllt ist. Wegen

$$(3,2) \quad Q(q) - q = p$$

kann die Bedingung (3,1) durch

$$(3,3) \quad Q(y) \leq Q(q) \leq 2q + Q(y)$$

ersetzt werden.

Es sei nun M_0 das grösste Maximum und N_0 das kleinste Minimum von $Q(y)$ im Intervall A_q . Nach dem Obigen gilt dann der

Satz 3. Sämtliche Punkte des Intervalles A_q gehören sicher zur zweiten Klasse, wenn

$$(3,4) \quad M_0 \leq Q(q) \leq 2q + N_0 .$$

Diese Bedingung reduziert sich auf

$$Q(q) \leq 2q + N_0 ,$$

wenn kein Maximum existiert.

In allen anderen Fällen gibt es auf A_q Punkte sowohl der ersten als der zweiten Klasse. Ohne auf die hier geltenden ziemlich komplizierten Verhältnisse näher einzugehen, verweisen wir auf die Entwicklungen des 4. Kapitels, wo das Problem für die biquadratischen Polynome gelöst wird.

Es sei $Q(y)$ insbesondere eine für $y \geq 0$ monoton wachsende Funktion. Dann reduziert sich die Bedingung (3,4) auf

$$(3,5) \quad Q(q) \leq 2q .$$

Beispiel: $Q(y) = y^m$. Die Bedingung (3,5) lautet jetzt $q \leq \sqrt[m-1]{2}$.

2. Einführung der G-Polynome

4. Es sei $P_n(y)$ das n -te Iterierte von $P(y)$. Ihre Koeffizienten sind offenbar ganze rationale Funktionen des Parameters p . Insbesondere der letzte Koeffizient

$$(4,1) \quad P_n(0) = G_n(p)$$

ist ein Polynom vom Grade m^{n-1} , welches von der Rekursionsformel

$$(4,2) \quad G_{n+1}(p) = Q(G_n(p)) - p$$

von $G_1(p) = -p$ ausgehend für jeden Wert n bestimmt werden kann.

Es sei nun p eine reelle Nullstelle von $G_n(p)$. Dann gelten nach (4,2) die Gleichungen

$$G_{n+1}(p) = -p, \quad G_{n+2}(p) = G_2(p), \dots, \quad G_{2n}(p) = G_n(p) = 0,$$

d.h. die reellen Punkte

$$(4,3) \quad p_v = G_v(p), \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

bilden einen Zyklus, dessen Periode gleich n oder einem Teiler von n ist. Der Zyklus ist stark attraktiv, weil sein Multiplikator

$$\prod_{r=1}^n P'(p_r)$$

wegen $P'(0) = 0$ gleich Null ist.

Es ist der Zweck der folgenden Betrachtungen, die gegenseitige Lage der reellen Nullstellen der verschiedenen G -Polynome zu untersuchen.

Es sei $p = \alpha$ eine reelle Wurzel der Gleichung

$$G_2(p) = Q(p) - p = 0.$$

Aus (4,2) ergibt sich dann

$$G_{2^v}(x) = 0, \quad G_{2^{v+1}}(x) = -x, \quad (v = 1, 2, 3, \dots).$$

Wir nennen $p = \alpha$ eine triviale Nullstelle der betreffenden Polynome nebst dem Wert $p = 0$, für welchen sämtliche G -Polynome verschwinden.

Ist ferner x_0 eine Wurzel der Gleichung

$$Q(x) = 2x,$$

so gilt nach (4,2) für $n > 1$

$$(4,4) \quad G_n(x_0) = x_0.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$G_n(x) \leq 0, \quad G_n(x_0) = x_0,$$

so gibt es im Intervall

$$(4,5) \quad (x \leq p < x_0)$$

reelle Nullstellen für jedes G -Polynom für $n > 1$. Es bedeutet keine Beschränkung anzunehmen, dass

$$x < Q(x) < 2x$$

für $x < x < x_0$.

Es gelten nun im Intervall (4,5) die folgenden Sätze, die wir früher für quadratische und Binome bewiesen haben.

Satz 4. Zwischen einer Nullstelle x_n von $G_n(p)$ und x_0 liegt wenigstens eine Nullstelle von $G_{n+1}(p)$.

Satz 5. Zwischen den Nullstellen x_n und x_{n+1} von $G_n(p)$ bzw. $G_{n+1}(p)$ liegt wenigstens eine Nullstelle von $G_{n+2}(p)$.

Beweis von Satz 4. Aus $G_n(x_n) = 0$ folgt wegen (4,2) und (4,4)

$$G_{n+1}(x_n) = -x_n < 0, \quad G_{n+1}(x_0) = x_0 > 0.$$

Beweis von Satz 5. Aus

$$G_n(x_n) = 0, \quad G_{n+1}(x_{n+1}) = 0$$

folgt wegen (4,2)

$$G_{n+2}(x_{n+1}) = -x_{n+1} < 0, \quad G_{n+2}(x_n) = Q(x_n) - x_n > 0.$$

Durch wiederholte Anwendung der Sätze 4 und 5 kann man die Existenz von unendlich vielen singulären p -Werten bestätigen, d.h. von Häufungswerten der reellen Nullstellen der G -Polynome. Die singulären Werte haben nach ihrer Definition die Eigenschaft, dass man aus ihnen durch eine beliebig kleine Variation von p zu Nullzyklen gelangen kann, deren Periode beliebig gross ist.

5. Wir wollen etwas genauer den speziellen Fall behandeln, wo

$$(5,1) \quad Q'(y) \geq 0, \quad Q''(y) \geq 0 \quad \text{für} \quad y \geq 0.$$

Die Funktion $Q(y)$ wird jetzt durch eine für $y \geq 0$ monoton steigende und konvexe Kurve K dargestellt. Ferner ist das Intervall (x, x_0) , wo die Nullstellen der G -Polynome liegen, eindeutig bestimmt.

Als abgeschlossene Menge hat die Menge der singulären p -Werte stets einen grössten Wert $\leq x_0$. Im vorliegenden Falle gilt der

Satz 6. Der grösste singuläre Wert ist gleich x_0 .

Wir gehen zum Beweis von der aus (4,2) durch zweifache Differentiation erhaltenen Gleichung

$$(5,2) \quad G_{n+1}''(p) = Q'(G_n(p))G_n''(p) + Q''(G_n(p))G_n'^2(p)$$

aus. Es sei allgemein x_n die grösste reelle Nullstelle von $G_n(p)$. Weil $G_n(p) > 0$ im Intervall (x_n, x_0) , so ist dort $Q'(G_n) > 0$.

Angenommen nun, es gelte

$$G_n''(p) > 0 \quad \text{für } p > x_{n-1},$$

so folgt aus (5,2)

$$(5,3) \quad G_{n+1}''(p) > 0 \quad \text{für } p > x_n.$$

Weil nun

$$G_2''(p) = Q''(p) > 0 \quad \text{für } p > 0,$$

so gilt allgemein

$$G_{n+1}''(p) > 0 \quad \text{für } p > x_n.$$

Nun ist

$$G_{n+1}(x_n) = -x_n, \quad G_{n+1}(x_0) = x_0.$$

Für die im Intervall (x_n, x_0) liegende Nullstelle x_{n+1} von G_{n+1} gilt dann, wegen (5,3), die Ungleichung

$$\frac{x_0 - x_{n+1}}{x_0 - x_n} < \frac{x_0}{x_0 + x_n} < \eta < 1.$$

Durch Grenzübergang folgt hieraus

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Wir bemerken zum Abschluss, dass durch Heranziehung des eindeutig bestimmten positiven Zweiges $y = \psi(y_1)$ der inversen Funktion von (2,5) für die Nullstellen der G -Polynome die formale Darstellung

$$p = \psi(p \pm \psi(p \pm \dots \psi(p))) \dots$$

erhalten wird, wo nur bestimmte Kombinationen der Zeichen reelle Nullstellen liefern, welche Kombinationen übrigens von der speziellen Wahl der Funktion $Q(y)$ unabhängig sind. Es handelt sich hier um eine direkte Verallgemeinerung der von uns früher für den speziellen Fall $Q(y) = y^m$ gegebenen Darstellung der Nullstellen der zugehörigen G -Polynome vermittels Wurzel ausdrücke.

3. Das Attraktionsgebiet des unendlich fernen Punktes

6. Nach der allgemeinen Theorie ist das Attraktionsgebiet D des unendlich fernen Punktes entweder einfach- oder unendlich-vielfach zu-

sammenhängend. Im ersten Falle besteht der Rand von D aus einem Kontinuum (Typus A), im zweiten Falle entweder aus unendlich vielen Kontinuen (Typus B) oder aus einer diskontinuierlichen Punktmenge (Typus C). Es ist der Zweck der folgenden Betrachtungen, die Abhängigkeit des Typus von Parameter p zu untersuchen. Unsere Betrachtungen beruhen auf dem folgenden von FATOU*) herrührenden

Satz 7. Es seien

$$\eta_\nu, \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

die Nullstellen der Ableitung $Q'(y)$. Das Gebiet D ist vom Typus A, wenn alle Punkte η_ν zur zweiten Klasse, vom Typus C, wenn alle genannten Punkte zur ersten Klasse gehören. Wenn unter den Punkten η_ν sowohl Punkte der ersten als der zweiten Klasse vorkommen, ist D vom Typus B.

Es seien zuerst alle Fixpunkte der Abbildung (2,1) imaginär. Für diesen Fall ergibt sich aus Satz 1 unmittelbar der

Satz 8. Im Falle $p < p_0$, wo keine reellen Fixpunkte existieren, ist D vom Typus C.

Es sei von jetzt an $p \geq p_0$ und es sei q der grösste reelle Fixpunkt von (2,1). Wir werden das Typenproblem allgemein unter der folgenden Bedingung behandeln.

Bedingung R. Sämtliche Nullstellen von $Q'(y)$ sind reell und im Intervall

$$\Delta_q : \quad |y| \leq q$$

gelegen.

Es gilt dann der

Satz 9. Gilt die Bedingung

$$\varepsilon_\nu : \quad |z_\nu - p| \leq q, \quad z_\nu = Q(\eta_\nu)$$

für alle Punkte η_ν , so ist D vom Typus A. Diese Bedingungen sind auch notwendig.

Gilt ferner für jeden Punkt η_μ die Bedingung

$$\varepsilon'_\mu : \quad |z_\mu - p| > q,$$

so ist D vom Typus C. Diese Bedingungen sind nicht notwendig.

Der erste Teil des Satzes folgt daraus, dass jetzt

$$|P(y)| \leq q \quad \text{für} \quad |y| \leq q,$$

so dass alle Punkte η_ν nach Nr. 3 zur zweiten Klasse gehören. Der zweite

*) Sur les équations fonctionnelles — Bull. soc. math. de France (1920), S. 163.

Teil des Satzes ist richtig, weil dann alle Punkte η_μ nach Nr. 2 zur ersten Klasse gehören.

Nach unserem Satz kann der Typus B nur dann vorkommen, wenn für gewisse Punkte η_ν die Bedingung ε_ν und für die anderen η_μ die Bedingung ε'_μ erfüllt ist.

7. *Existenz des Typus A.* Die Bedingungen ε_ν können wegen (3,2) durch

$$(7,1) \quad z_\nu \leq Q(q) \leq 2q + z_\nu$$

ersetzt werden. Sie sind gleichzeitig erfüllt, wenn

$$(7,2) \quad M_0 \leq Q(q) \leq 2q + N_0,$$

wo M_0 und N_0 die grösste bzw. kleinste unter den Grössen z_ν bezeichnet. Unsere Bedingung ist identisch mit der Bedingung (3,4) von Nr. 3.

Die Bedingungen (7,2) setzen voraus, dass der Schnittpunkt π der Kurve

$$(7,3) \quad y_1 = Q(y)$$

mit der Geraden $y_1 = M_0$ unterhalb der Geraden

$$(7,4) \quad y_1 = 2y + N_0$$

liegen soll. Wegen unserer Bedingung R kann der oberhalb der Geraden $y_1 = M_0$ verlaufende unendliche Bogen der Kurve (7,3) die Gerade (7,4) nur in einem einzigen Punkt π_1 schneiden. Dann ist aber der Bogen $\pi\pi_1$ von (7,3) der einzige, dessen zugehörige q -Werte zum Typus A führen. Es gilt somit der

Satz 10. Der Typus A kann höchstens in einem einzigen q -Intervall vorkommen.

Existenz des Typus C. Die Bedingungen ε'_μ , welche für den Typus C hinreichend sind, lauten entwickelt

$$Q(q) > 2q + z_\mu \quad \text{oder} \quad Q(q) < z_\nu.$$

In der ersten Form gilt ε'_μ für alle Punkte η_μ , wenn

$$Q(q) > 2q + M_0,$$

wo M_0 wieder das grösste Maximum von $Q(y)$ bezeichnet. Unsere Bedingung ist äquivalent mit $q > x_0$, wo x_0 die grösste Wurzel der Gleichung

$$Q(x) = 2x + M_0$$

bezeichnet.

Existenz des Typus B. Dieser Fall kann vermittels der Bedingungen ε_ν , ε'_μ allein nicht erledigt werden, wie im folgenden Kapitel gezeigt wird.

In gewissen Fällen kann die Existenz des Typus B unter Anwendung des folgenden Satzes bestätigt werden.

Satz 11. Gibt es ein Intervall Δ_q , wo $|P(y)| \leq q$ und gibt es zugleich ausserhalb des Intervalles Δ_q wenigstens einen Punkt η_v , so ist der Typus B für ein den Punkt q enthaltendes Intervall vorhanden. Dabei brauchen nicht alle Punkte η_v reell sein.

Zum Beweis ist es hinreichend zu bemerken, dass die zum Intervall Δ_q gehörigen η_v -Punkte zur zweiten Klasse, die ausserhalb desselben liegenden η_v -Punkte dagegen zur ersten Klasse gehören.

Wir bemerken zum Abschluss, dass unsere Sätze, geeignet modifiziert, noch in dem allgemeineren Fall gelten, wo gewisse η -Punkte imaginär sind, ihre durch Iteration erhaltenen Bildpunkte aber von einer gewissen Stelle ab reell sind.

4. Die biquadratischen Polynome

8. Wir gehen von dem Ausdruck

$$(8,1) \quad y_1 = P(y) = Q(y) - p = y^4 + 2ay^2 - p$$

aus, wo a eine reelle Konstante $\neq 0$ bezeichnet. Man hat es hier mit zwei wesentlich verschiedenen Fällen zu tun, je nachdem ob $a > 0$ oder $a < 0$ ist. Im ersten, definiten Fall, ist die Anzahl der reellen Fixpunkte der Abbildung (8,1) höchstens zwei, während im zweiten, indefiniten Fall, alle vier Fixpunkte reell sein können.

Für die Existenz von reellen Fixpunkten hat man allgemein die Bedingung $p \geq p_0$, wo p_0 und $y = q_0$ aus den Gleichungen

$$P = y^4 + 2ay^2 - p_0 = y, \quad Q' = 4y(y^2 + a) = 1$$

bestimmt werden können. Aus ihnen folgt

$$a = \frac{1}{4y} - y^2, \quad p_0 = -(y^4 + \frac{1}{2}y).$$

Weil nun $\frac{dp_0}{da} > 0$, ist p_0 eine monoton wachsende Funktion von a .

Speziell gilt

$$p_0(-\infty) = -\infty, \quad p_0(0) = -\frac{3}{4\sqrt[3]{4}}, \quad p_0(\infty) = 0.$$

a. *Der definite Fall.*

9. Jetzt wird das Polynom

$$(9,1) \quad \tilde{y}_1 = Q(y) = y^4 + 2ay^2$$

von einer zur y -Achse symmetrischen und für $y \geq 0$ monoton aufsteigenden und konvexen Kurve K dargestellt. Die Ableitung $Q'(y)$ hat neben $y = 0$ die imaginären Nullstellen $y = \pm i\sqrt{a}$, deren gemeinsamer Bildpunkt

$$(9,2) \quad y_0 = -(p + a^2)$$

reell ist.

Nach Nr. 7 gehört der Punkt $y = 0$ zur ersten Klasse für $p > x_0$, wo x_0 die positive Wurzel der Gleichung

$$(9,3) \quad Q(x) = 2x$$

bezeichnet, sonst zur zweiten Klasse. Der Punkt y_0 gehört mit den Punkten $\pm i\sqrt{a}$ zur ersten Klasse für

$$(9,4) \quad Q(q) > 2q - a^2,$$

sonst zur zweiten.

Zur geometrischen Deutung der Bedingung (9,4) schreiben wir diese in der Form

$$(9,5) \quad q^2 + a > \sqrt{2q},$$

woraus hervorgeht, dass das Bestehen der Bedingung von der gegenseitigen Lage der Parabeln

$$(9,6) \quad y_1 = y^2 + a, \quad y_1 = \sqrt{2y}$$

abhängt. Durch elementare Rechnungen kann man folgendes bestätigen.

Für $a > a_0 = \frac{7}{8}$ liegen die Kurven (9,6) voneinander getrennt, so dass die Bedingung (9,4) von q unabhängig gültig ist.

Es sei nachher $a \leq a_0$, in welchem Falle die Kurven (9,6) einander in zwei Punkten \tilde{q}_1, \tilde{q}_2 schneiden, die für $a = a_0$ mit einem Berührungspunkt zusammenfallen. Man hat hier dann nach der gegenseitigen Lage der Punkte

$$q_0, \tilde{q}_1, \tilde{q}_2$$

zwischen zwei Fällen zu unterscheiden. Es gilt nämlich

$$q_0 \leq \tilde{q}_1 < \tilde{q}_2 \quad \text{für} \quad a \geq a_1 = \frac{7}{8\sqrt[3]{2}}$$

und

$$\tilde{q}_1 < q_0 < \tilde{q}_2 \quad \text{für} \quad a < a_1.$$

Aus dem Obigen ergibt sich nun folgendes.

Der Punkt y_0 gehört zur zweiten Klasse nur im Falle $a < a_0$, nämlich

$$\begin{aligned} &\text{für } \tilde{q}_1 < q < \tilde{q}_2, && \text{wenn } a > a_1 \quad \text{und} \\ &\text{für } q_0 < q < \tilde{q}_2, && \text{wenn } a < a_1. \end{aligned}$$

Es gilt somit der

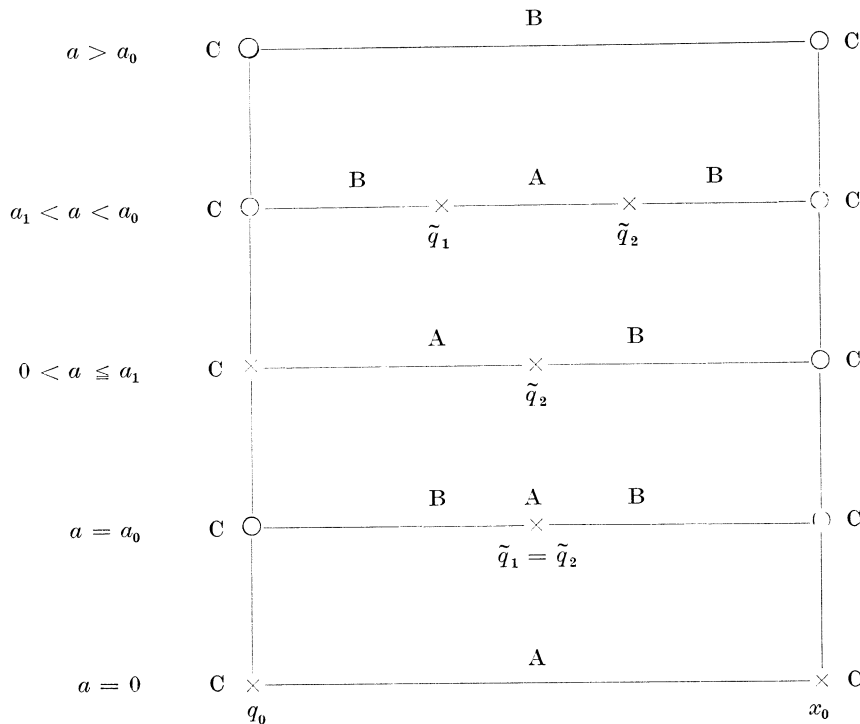
Satz 12. Der Typus von D ist in jedem Falle C für

$$q < q_0 \quad \text{und} \quad q > x_0.$$

Im Falle $a > a_0$ ist der Typus B für $q_0 \leq q \leq x_0$. Im Falle $a_1 < a < a_0$ ist der Typus A für $\tilde{q}_1 \leq q \leq \tilde{q}_2$ und B für $q_0 < q < \tilde{q}_1$ und für $\tilde{q}_2 < q < x_0$. Im Falle $a \leq a_1$ ist der Typus A für $q_0 < q < \tilde{q}_2$ und B für $\tilde{q}_2 < q < x_0$. Im Grenzfall $a = a_0$ reduziert sich der Typus A auf den Punkt $q = \tilde{q}_1 = \tilde{q}_2$ und im Grenzfall $a = 0$ fehlt das Intervall B.

Die verschiedenen Fälle werden durch die Figur 1 dargestellt, welche ein anschauliches Bild von der Variation des Typus mit dem Parameter p liefert. In der Figur entspricht jedem mit \times bezeichneten Punkt der Typus A, jedem mit \circ bezeichneten Punkt der Typus B.

Fig. 1



b. *Der indefinite Fall.*

10. Wir schreiben jetzt

$$(10,1) \quad Q(y) = y^4 - 2b^2y^2.$$

Die Ableitung

$$Q'(y) = 4y(y^2 - b^2)$$

hat alle ihre Nullstellen $y = 0$, $y = \pm b$ reell. Weil $Q(b) = -b^4$, lauten die Bedingungen der Nr. 6

$$(10,2) \quad \begin{array}{ll} \varepsilon_0: & 0 \leq Q(q) \leq 2q, & \varepsilon_1: & Q(q) \leq 2q - b^4, \\ \varepsilon_0': & Q(q) > 2q \text{ oder } Q(q) < 0, & \varepsilon_1': & Q(q) > 2q - b^4. \end{array}$$

Es seien nun

$$x_0 = b\sqrt{2}, \quad x \quad \text{und} \quad x_0$$

die positiven Wurzeln der Gleichungen

$$(10,3) \quad Q(y) = 0, \quad Q(y) = y \quad \text{bzw.} \quad Q(y) = 2y$$

und β die grössere (positive) Wurzel der Gleichung

$$Q(y) = 2y - b^4.$$

Dabei gilt

$$x_0 < x < x_0, \quad q_0 < (x \text{ und } \beta) < x_0.$$

Wir wollen ferner die folgenden speziellen Werte von b einführen, für welche gewisse unter den obigen Grössen einander gleich sind:

$$\begin{array}{ll} x_0 = q_0 & \text{für} \quad b = \tilde{b}_0 = \frac{1}{2}\sqrt[6]{2}, \\ x = \beta & \text{für} \quad b = b_0 = \sqrt[6]{1 + \sqrt[6]{2}}, \\ x_0 = \beta & \text{für} \quad b = b_0' = \sqrt[6]{2}. \end{array}$$

Man hat hier nach dem Wert von b zwischen vier Fällen zu unterscheiden, die durch die Figur 2 dargestellt sind. In dieser Figur sind die Werte

$$q_0, x_0, x, \beta, x_0$$

von q gezeichnet, die den Werten

$$p_0, -x_0, 0, \gamma, x_0$$

von p , welche aus (3,2) berechnet werden können, entsprechen. Aus der Figur geht hervor, dass der Typus A, welcher unter den Bedingungen

$$(q_0 \text{ und } \alpha_0) \leq q \leq \beta$$

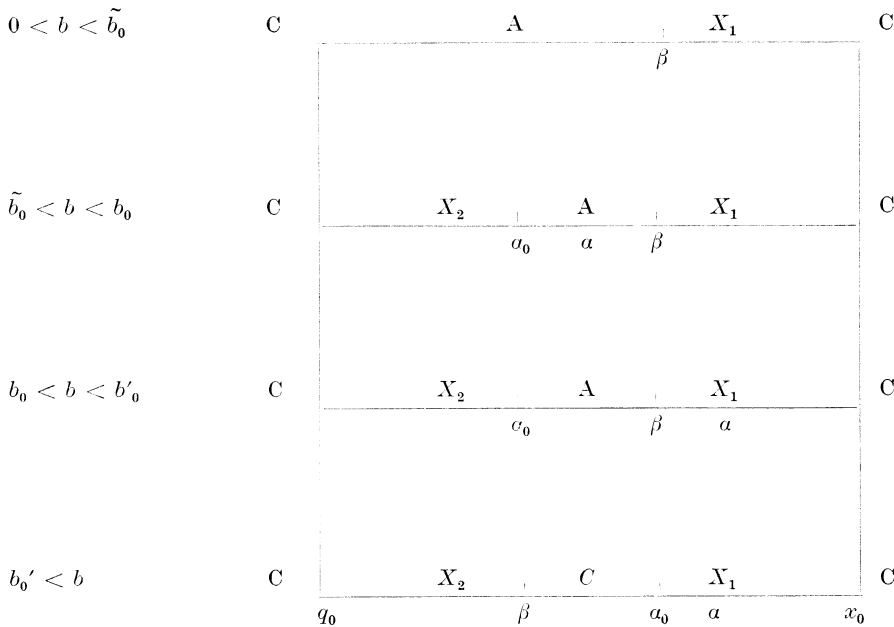
existiert, nur in den drei ersten Fällen vorkommt. Im vierten Falle, wo $\alpha_0 > \beta$, gelten im Intervall (β, x_0) die Bedingungen

$$\varepsilon_0' : Q(q) < 0, \quad \varepsilon_1' : Q(q) > 2q - b^4,$$

welche den Typus C liefern.

Es erübrigt noch das Typenproblem für die mit X_1 und X_2 bezeichneten Intervalle zu lösen, in welchen die Bedingungen ε_0 und ε_1' bzw. ε_0' und ε_1 gelten.

Fig. 2



Das Intervall X_2

11. Dieses Intervall kommt in den drei letzten Fällen vor. Jetzt gelten

$$\varepsilon_0' : |p| > q, \quad \varepsilon_1 : |p + b^4| < q,$$

woraus folgt

$$Q(q) < 0, \quad Q(q) < 2q - b^4$$

und somit

$$(11,1) \quad q < \alpha_0, \quad q < \beta.$$

Wir betrachten nun die beiden ersten Bildpunkte

$$b_1 = -(p + b^4), \quad b_2 = P(b_1) = Q(b_1) - p$$

des Punktes $y = b$, wobei $|b_1| < q$ wegen ε_1 ist, und wir fragen zuerst, wann $|b_2| = q$, also $P(b_1) = \pm q$. Hier kann nur das $+$ -Zeichen gelten, weil das Minimum b_1 von $P(y)$ wegen ε_1 grösser ist als $-q$. Weil nun die Gleichung $P(y) = q$ neben $y = \pm q$ die Wurzeln

$$\pm \tilde{q} = \pm \sqrt{\alpha_0^2 - q^2}$$

besitzt, hat man zur Bestimmung von $x = q$ die Gleichung

$$(11,2) \quad (x^2 - b^2)^2 = x \pm \sqrt{\alpha_0^2 - x^2}.$$

Der gesuchte Wert $x = q$ gibt also den Schnittpunkt der Kurve

$$(11,3) \quad z = (x^2 - b^2)^2$$

mit der Kurve

$$z = x \pm \sqrt{\alpha_0^2 - x^2},$$

d.h. der Ellipse

$$(11,4) \quad z^2 - 2xz + 2x^2 = \alpha_0^2.$$

Eine elementare Rechnung zeigt, dass die Kurve (11,3) für $x > b$ als ganzes unterhalb der Ellipse (11,4) liegt, wenn

$$b < b_{\infty} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{2},$$

während sie die Ellipse für $b > b_{\infty}$ in zwei Punkten λ_1, λ_2 schneidet, die für $b = b_{\infty}$ miteinander zusammenfallen.

Aus dem Obigen folgt, dass für $b > b_{\infty}$ im Teilintervall $\delta(\lambda_1, \lambda_2)$ von X_2 die Ungleichung $|b_2| > 1$ gilt. Der Punkt $y = b$ gehört aber dann zur ersten Klasse, und der Typus ist C. Ferner gilt ausserhalb δ

$$\tilde{q} < b_1 < q.$$

Weil nun im Intervall (\tilde{q}, q) die Bedingung $|P(y)| \leq q$ erfüllt ist, gehört der Punkt $y = b$ zur zweiten Klasse, und man hat es mit dem Typus B zu tun. Dies gilt insbesondere für alle Punkte von X_2 , wenn $b < b_{\infty}$. Es gilt somit der

Satz 13. Der Typus von D ist B im ganzen Intervall X_2 , wenn $b < b_{\infty}$. In den Fällen $b \geq b_{\infty}$ ist der Typus C im Teilintervalle δ und B ausserhalb desselben.

Das Intervall X_1

12. Jetzt gilt der folgende Satz, der von dem für das Intervall X_2 bewiesenen Satz 13 wesentlich verschieden ist.

Satz 14. Das Intervall X_1 besteht aus unendlich vielen Teilintervallen, wo wechselweise der Typus C und B vorkommt.

Unser Beweis gründet sich auf die Eigenschaften der im Kapitel 2 eingeführten G -Polynome.

Es sei $p = x_n$ eine zum Intervall X_1 gehörige Nullstelle des Polynoms $G_n(p)$. Weil die Punkte

$$y = 0, \eta_1 = -p, \dots, \eta_{n-1} = G_{n-1}(p)$$

eine periodische Menge bilden, ist $y = 0$ für $p = x_n$ ein Punkt zweiter Klasse. Weil ferner der Punkt $y = b$ wegen der Bedingung ε_1' zur ersten Klasse gehört, ist D für $p = x_n$ vom Typus B.

Wegen

$$G_n(x_n) = 0, \quad G_n(x_0) = x_0 > b,$$

gibt es zwischen x_n und x_0 einen Wert ξ_n , für welchen

$$G_n(\xi_n) = b.$$

Für $p = \xi_n$ ist aber dann $y = 0$ ein Punkt der ersten Klasse. Der Typus ist also C für $p = \xi_n$.

Wir können nun aus den Punkten x_n, ξ_n zwei unendliche monotone Folgen

$$x_n < x_{n+1} < \dots, \quad \xi_n < \xi_{n+1} < \dots,$$

bilden, für welche

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \xi_m = x_0$$

gilt, weil die Kurve (10,1) für $y > x_0$ konvex und aufsteigend ist. Ferner kann man zeigen, dass die Punkte x_m, ξ_m mittels kleiner Intervalle überdeckt werden können, für welche der Typus B bzw. C ist. Unser Satz ist damit bewiesen.

Schlussbemerkung

Beachtet man, dass diejenigen Eigenschaften der G -Polynome, die wir beim Beweis des vorigen Satzes angewandt haben, für allgemeine Polynome der Form (1,1) gelten, so bestätigt man die Richtigkeit des folgenden allgemeinen Satzes.

Satz 15. Wenn sämtliche Nullstellen der Ableitung $P'(y)$ reell sind, so ist die Anzahl der Intervalle, für welche D vom Typus B bzw. C ist, stets unendlich.

Verzeichnis der früheren Arbeiten des Verfassers über die Iteration

- [1] Sur une généralisation de la moyenne arithmétique-géométrique de Gauss (C. R. Acad. Sci., Paris, t. 246, 1958).
 - [2] Eine Verallgemeinerung des arithmetisch-geometrischen Mittels (Ann. Acad. Sci. Fennicæ, A. I., 253, 1958).
 - [3] Iteration der reellen Polynome zweiten Grades (Ibid. 256, 1958).
 - [4] Iteration von Quadratwurzeloperationen (Ibid. 259, 1958).
 - [5] Iteration der reellen Polynome zweiten Grades. II. (Ibid. 268, 1959).
 - [6] Funktioista, jotka toteuttavat toisen asteen kertosäännön. (Über Funktionen, die ein quadratisches Multiplikationstheorem besitzen) (Arkhimedes 1, 1960).
 - [7] Inversion der Iteration für rationale Funktionen (Ann. Acad. Sci. Fennicæ, A. I., 292, 1960).
 - [8] Funktioista, jotka toteuttavat toisen asteen kertosäännön (Arkhimedes 1, 1962).
 - [9] Sur l'itération des polynomes réels quadratiques (Journal de Math. 1962).
 - [10] Iteration der reellen Polynome zweiten Grades. III. (Ann. Acad. Sci. Fennicæ, A. I. 336/3, 1964).
 - [11] Iteration der Binome beliebigen Grades (Ibid. 348, 1964).
-