ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

344

EIN BEISPIEL ZUR ALLGEMEINEN TOPOLOGIE: DIE TOPOLOGIE EINER ÄQUIVALENZRELATION

VON

PHILIPPE TONDEUR

HELSINKI 1964
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1964.344

Am 13. Dezember 1963 vorgelegt von R. NEVANLINNA und OLLI LEHTO

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1964

Ein Beispiel zur allgemeinen Topologie: Die Topologie einer Äquivalenzrelation

Zusammenfassung. Sei R eine Relation auf der Menge X. Ordnet man jeder Teilmenge $M \subset X$ die Menge

$$\Omega(M) = \{ y \in X \mid x R y \quad \text{für ein} \quad x \in M \}$$

zu, so wird eine Selbstabbildung $\Omega : P X \to P X$ der Potenzmenge $P X$ erklärt. Ω ist genau dann ein Abschlussoperator im Sinne von Kuratowski und definiert eine Topologie auf X (R-Topologie genannt), falls R eine Quasiordnung ist.

Im folgenden werden ausschliesslich Äquivalenzrelationen betrachtet. Ist R eine solche auf X, so liefert die R-Topologie ein Beispiel einer normalen [1]), lokal-kompakten, lokal-zusammenhängenden, lokal-abzählbaren Topologie, welche jedoch dem ersten Trennungsaxiom nur (und genau) dann genügt, wenn R die identische Relation Δ auf X ist. Die Abbildungen $\varphi : X \to Y$ in eine beliebige Menge Y, welche auf jeder Äquivalenzklasse $\bmod R$ konstant sind, lassen sich als die stetigen Abbildungen kennzeichnen, falls Y mit der diskreten Topologie versehen wird.

Seien R bzw R' Äquivalenzrelationen auf den Mengen X bzw. X' und diese mit der R bzw. R'-Topologie versehen. Eine Abbildung $\varphi : X \to X'$ ist genau dann äquivalenztreu, d. h. führt R-äquivalente Punkte in R'-äquivalente Punkte über, falls φ stetig ist. Stärker als Äquivalenztreue ist die Bedingung: das Bild einer Äquivalenzklasse $\bmod R$ unter φ ist eine (volle) Äquivalenzklasse $\bmod R'$. Diese Bedingung ist genau dann erfüllt, wenn φ stetig und abgeschlossen ist.

---

[1]) Wir verwenden die Definitionen von John L. Kelley: General Topology. - The University Series in Higher Mathematics, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton (N. J.) / Toronto / London / New York, 1955. Normalität z. B. bedeutet dasselbe wie das vierte Trennungsaxiom bei Paul Alexandroff und Heinz Hopf: Topologie I. - Grundlehren der mathematischen Wissenschaften XLV, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935.

1. *Topologie einer Quasiordnung.* Sei R eine beliebige Relation auf der Menge $X : R \subset X \times X$. Schreiben wir wie üblich $x R y$ statt $(x, y) \in R$ und für $M \subset X$

$$R[M] = \{ y \in X \mid x R y \text{ für ein } x \in M \}, \tag{1}$$

so wird durch $\Omega(M) = R[M]$ eine Selbstabbildung $\Omega : P X \to P X$ der Potenzmenge $P X$ erklärt. Folgende Eigenschaften sind dann stets erfüllt: $\Omega(\emptyset) = \emptyset$ für die leere Menge $\emptyset$, $\Omega(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\Omega(M_\lambda))$ für beliebige Familien $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ mit $M_\lambda \subset X$.

Lemma 1.1. (i) R *ist genau dann reflexiv, wenn* $M \subset \Omega(M)$ *für alle* $M \subset X$. (ii) R *ist genau dann transitiv, wenn* $\Omega(\Omega(M)) \subset \Omega(M)$ *für alle* $M \subset X$.

Beweis. (i): Bezeichnet Δ die Diagonale von $X \times X$, d. h. die identische Relation auf X, so gilt $\mathrm{id}_{PX}(M) \subset \Omega(M)$ genau dann, wenn $\Delta[M] \subset R[M]$. Die Gültigkeit letzterer Inklusion für alle $M \subset X$ besagt aber gerade $\Delta \subset R$, d. h. die Reflexivität von R. (ii): Bezeichnet $R \circ R$ die Komposition der Relation R mit sich selbst, so gilt $\Omega(\Omega(M)) \subset \Omega(M)$ genau dann, wenn $(R \circ R)[M] \subset R[M]$. Die Gültigkeit letzterer Beziehung für alle $M \subset X$ besagt $R \circ R \subset R$, d. h. die Transitivität von R.

Genau dann, wenn R reflexiv und transitiv, d. h. eine Quasiordnung, definiert Ω eine Topologie auf X gemäss der Definition: M heisst abgeschlossen, wenn $\Omega(M) = M$. In diesem Fall gilt sogar $\Omega(\Omega(M)) = \Omega(M)$ für alle $M \subset X$.

Satz 1.2. *Sei* R *eine Relation auf der Menge* X *und* $\Omega : P X \to P X$ *die durch* $\Omega(M) = R[M]$ *gemäss (1) erklärte Selbstabbildung der Potenzmenge* $P X$. Ω *ist genau dann ein Abschlussoperator (»Kuratowski-Operator«) mit den Eigenschaften*

(a) $\Omega(\emptyset) = \emptyset$ *für die leere Menge* $\emptyset$,

(b) $M \subset \Omega(M)$ *für* $M \subset X$,

(c) $\Omega(\Omega(M)) = \Omega(M)$ *für* $M \subset X$,

(d) $\Omega(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (\Omega(M_\lambda))$ *für* $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ *mit* $M_\lambda \subset X$,

und definiert eine Topologie auf X, *falls* R *eine Quasiordnung ist.*

2. *Topologie einer Äquivalenzrelation.* Im folgenden betrachten wir ausschliesslich Äquivalenzrelationen. Sei R eine solche auf der Menge X und $\pi : X \to X/R$ die kanonische Projektion auf die Quotientenmenge. Die durch π induzierte Abbildung $P X \to P(X/R)$ wird ebenfalls mit π bezeichnet. Sei $\pi^{-1} : P(X/R) \to P X$ die Abbildung, welche jeder Teilmenge von X/R ihr Urbild unter π zuordnet. Bezeichnet $\Omega : P X \to P X$ wie in der vorigen Nummer die zu R gehörige Abbildung, so gilt

$$\Omega = \pi^{-1} \circ \pi : PX \to PX . \tag{2}$$

Für $x \in X$ ist nämlich $\Omega(x) = \{ y \in X \mid x R y \}$, d. h. die Äquivalenzklasse $\bmod R$ von x, also dasselbe wie $\pi^{-1}(\pi(x))$. Allgemein ist $\Omega(M)$ für $M \subset X$ die Sättigung von M bezüglich R, d. h. die Vereinigung aller Äquivalenzklassen, welche M treffen, also genau dasselbe wie $\pi^{-1}(\pi(M))$.

Die durch den Abschlussoperator $\Omega : PX \to PX$ erklärte Topologie auf X ist die schwächste Topologie derart, dass $\pi : X \to X/R$ stetig wird bezüglich der diskreten Topologie auf X/R. Denn ist π stetig, so ist wegen (2) notwendig $\Omega(M)$ für jedes $M \subset X$ abgeschlossen. Die Mengen $\Omega(M)$ definieren aber gerade die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf X. Ferner stimmt die diskrete Topologie auf X/R mit der Quotiententopologie überein. Denn in der Quotiententopologie ist $K \subset X/R$ abgeschlossen genau dann, wenn $\pi^{-1}(K)$ abgeschlossen ist, was stets der Fall ist.

Wir nennen im folgenden R-Topologie die im obigen Sinn durch R auf X erklärte Topologie. Ihre wichtigsten Eigenschaften seien festgehalten in

Satz 2.1. *Für die R-Topologie einer Äquivalenzrelation R auf der Menge X gilt:*

(1) *$M \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn M eine Vereinigung von Äquivalenzklassen ist,*

(2) *$M \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn M offen ist,*

(3) *X genügt dem zweiten Abzählbarkeitsaxiom genau dann, wenn X/R abzählbar ist,*

(4) *X ist kompakt genau dann, wenn X/R endlich ist,*

(5) *X ist zusammenhängend genau dann, wenn X/R einpunktig ist,*

(6) *X ist normal* [2]*, lokal-kompakt, lokal-zusammenhängend, lokal-abzählbar (d. h. genügt dem ersten Abzählbarkeitsaxiom),*

(7) *X ist genau dann diskret, wenn jede Äquivalenzklasse aus einem Punkt besteht, d. h. wenn X dem ersten Trennungsaxiom genügt (R ist dann die identische Relation $\Delta \subset X \times X$),*

(8) *X ist genau dann indiskret, wenn R die triviale Relation $X \times X$ ist.*

Beweis. (1): Der Abschlussoperator Ω der R-Topologie kann wie bereits erwähnt auch erklärt werden durch $\Omega(M) =$ Vereinigung aller Äquivalenzklassen, welche M treffen. (2): Sei M abgeschlossen. Dann ist das Komplement $\complement M$ nach dem eben Gesagten eine Vereinigung von Äquivalenzklassen, also abgeschlossen, d. h. M offen. (3) folgt daraus, dass die Menge der Äquivalenzklassen in jeder Basis für die

[2]) Vgl. [1]).

R-Topologie enthalten ist. (4) bis (8) sind jetzt unmittelbar auf Grund der Definitionen.

Satz 2.2. *Die Abbildungen $\varphi : X \to Y$ in eine beliebige Menge Y, welche sich durch π in der Form $\varphi = f \circ \pi$ mit $f : X/R \to Y$ faktorisieren lassen, sind als die stetigen Abbildungen gekennzeichnet, wenn X mit der R-Topologie und Y mit der diskreten Topologie versehen wird.*

Beweis. Dies ergibt sich aus dem folgenden Lemma, wenn man beachtet, dass die Stetigkeit einer Abbildung $\varphi : X \to Y$ bezüglich der R-Topologie auf X und der diskreten Topologie auf Y durch die Beziehung $\varphi \circ \Omega = \varphi$ völlig gekennzeichnet wird.

Lemma 2.3. *Sei R eine Äquivalenzrelation auf X, Y eine beliebige Menge und $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung. φ ist genau dann auf jeder Äquivalenzklasse konstant, wenn $\varphi \circ \Omega = \varphi$.*

Beweis. Sei $M \subset X$ und $\Omega(M) = \bigcup_\lambda X_\lambda$ die Vereinigung der X_λ mit $X_\lambda \cap M \neq \emptyset$, also $\varphi(\Omega(M)) = \bigcup_\lambda \varphi(X_\lambda)$. Ist nun zunächst $\varphi(X_\lambda) = y_\lambda \in Y$, so folgt $\varphi(\Omega(M)) = \bigcup_\lambda \{y_\lambda\} \subset \varphi(M)$, da $X_\lambda \cap M \neq \emptyset$ für alle λ. Aber $\varphi(M) \subset \varphi(\Omega(M))$, sodass $\varphi(\Omega(M)) = \varphi(M)$. Ist umgekehrt diese Beziehung für alle M erfüllt, so gilt insbesondere für eine Äquivalenzklasse X_λ und $x \in X_\lambda$ die Beziehung $\varphi(X_\lambda) = \varphi(\Omega(x)) = \varphi(x)$, d. h. φ ist konstant auf X_λ.

3. *Beispiel: Durch die Wirkung einer Gruppe definierte Äquivalenzrelation.* Sei G eine Gruppe, welche auf X wirkt vermöge eines Homomorphismus $\tau : G \to [X, X]$ in das Monoid der Selbstabbildungen $[X, X]$ von X, $\tau_{g_1 g_2} = \tau_{g_1} \circ \tau_{g_2}$, $\tau_e = 1_X$. Sei R die dadurch definierte Äquivalenzrelation auf X : $x R y$ genau dann, wenn $y = \tau_g(x)$ für ein $g \in G$. Nennen wir die R-Topologie auf X in diesem Fall G-Topologie. Die G-Topologie ist nach Satz 2.1 genau dann diskret, wenn jeder Punkt $x \in X$ Fixpunkt aller Permutationen τ_g ist, d. h. wenn G trivial auf X wirkt. Die Indiskretheit der G-Topologie bedeutet die Transitivität der Wirkung von G. Ist Y eine beliebige Menge, so ist eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ genau dann invariant, d. h. $\varphi \circ \tau_g = \varphi$ für alle g, falls φ auf jeder Äquivalenzklasse $\bmod R$ konstant ist. Nach der in Satz 2.2 gegebenen Kennzeichnung letzterer Abbildungen folgt das

Korollar. *Sei $\tau : G \to [X, X]$ eine Operation von G auf X, Y eine beliebige Menge und $\varphi : X \to Y$ eine Abbildung. Sei X mit der G-Topologie und Y mit der diskreten Topologie versehen. Die Stetigkeit von φ ist dann gleichbedeutend mit der Invarianz, d. h. $\varphi \circ \tau_g = \varphi$ für alle $g \in G$.*

Wir bemerken ferner, dass bezüglich der G-Topologie auf X folgendes gilt. Die durch $(g, x) \to \tau_g(x)$ erklärte Abbildung $\alpha : G \times X \to X$

ist bezüglich jeder Topologie auf G stetig. Es genügt der Nachweis der Stetigkeit von α, falls G mit der indiskreten Topologie versehen wird. Ist nun X_λ eine Äquivalenzklasse von X mod R, so ist $\tau_g(X_\lambda) = X_\lambda$, somit $\alpha^{-1}(X_\lambda) = G \times X_\lambda$. Da jede abgeschlossene Teilmenge von X Vereinigung von Äquivalenzklassen ist, so ist die Stetigkeit von α gezeigt.

4. *Charakterisierung äquivalenztreuer Abbildungen.* Sei R eine Äquivalenzrelation auf X, R' eine Äquivalenzrelation auf X' und $\varphi : X \to X'$ eine Abbildung. φ heisst äquivalenztreu, falls $x_1 \, R \, x_2$ mit $x_1, x_2 \in X$ die Beziehung $\varphi(x_1) \, R' \, \varphi(x_2)$ impliziert, und stark äquivalenztreu, falls φ jede Äquivalenzklasse mod R auf eine volle Äquivalenzklasse mod R' abbildet. Wird X mit der R-Topologie, X' mit der R'-Topologie versehen, so gilt

Satz 4.1. (i) *φ ist genau dann äquivalenztreu, wenn φ stetig ist.* (ii) *φ ist genau dann stark äquivalenztreu, wenn φ stetig und abgeschlossen ist. Insbesondere ist also eine Bijektion φ genau dann ein Isomorphismus, d. h. in beiden Richtungen äquivalenztreu, falls φ ein Homöomorhismus ist.*

Beweis. Bezeichnet Ω_X bzw. $\Omega_{X'}$ den Abschlussoperator bezüglich der R bzw. R'-Topologie auf X bzw. X', so bedeutet die Stetigkeit von φ genau die Gültigkeit der Beziehung $\varphi(\Omega_X(M)) \subset \Omega_{X'}(\varphi(M))$ für alle $M \subset X$, die Stetigkeit und Abgeschlossenheit von φ genau die Gültigkeit von $\varphi(\Omega_X(M)) = \Omega_{X'}(\varphi(M))$ für alle $M \subset X$. Somit ist Satz 4.1 eine Folge von

Lemma 4.2. (i) *φ ist genau dann äquivalenztreu, wenn für alle $M \subset X$ die Beziehung $\varphi(\Omega_X(M)) \subset \Omega_{X'}(\varphi(M))$ gilt.* (ii) *φ ist genau dann stark äquivalenztreu, wenn für alle $M \subset X$ die Beziehung $\varphi(\Omega_X(M)) = \Omega_{X'}(\varphi(M))$ gilt.*

Beweis. (i): Sei $\{X_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ die zu R gehörige Zerlegung von X in Äquivalenzklassen, $\{X'_{\lambda'}\}_{\lambda' \in \Lambda'}$ die zu R' gehörige Zerlegung von X'. Die Äquivalenztreue von φ besagt die Existenz einer Abbildung $\Phi : \Lambda \to \Lambda'$, sodass $\varphi(X_\lambda) \subset X'_{\Phi(\lambda)}$. Dies ist gleichbedeutend mit $\varphi(\bigcup_{\lambda \in I} X_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in I} \varphi(X_\lambda) \subset \bigcup_{\lambda \in I} X'_{\Phi(\lambda)}$ für beliebiges $I \subset \Lambda$. Da aber $\Omega_X(M) = \bigcup_{\lambda \in I(M)} X_\lambda$, wo $I(M) = \{ \lambda \in \Lambda \mid X_\lambda \cap M \neq \emptyset \}$ und somit $\Omega_{X'}(\varphi(M)) = \bigcup_{\lambda \in I(M)} X'_{\Phi(\lambda)}$, so ist letztere Aussage wiederum äquivalent mit $\varphi(\Omega_X(M)) \subset \Omega_{X'}(\varphi(M))$ für alle $M \subset X$. (ii) ergibt sich aus obigen Bemerkungen, wenn man überall das Zeichen $\subset$ durch $=$ ersetzt.

Universität Zürich
Schweiz

Gedruckt Mai 1964