ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

343

ÜBER DIE ELEMENTAREN BEWEISE DER PRIMZAHLSÄTZE UND DEREN ÄQUIVALENTE FASSUNGEN

VON

VEIKKO NEVANLINNA

HELSINKI 1964
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1964.343

Am 10. Januar 1964 vorgelegt von K. INKERI und OLLI LEHTO.

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1964

Vorwort

Es sei mir gestattet meinem Onkel, Prof. Dr. Rolf Nevanlinna, Mitglied der finnischen Akademie, für die Anregung zu dieser Arbeit meinen Dank auszusprechen. Meinem Vater, Prof. Dr. Frithiof Nevanlinna, bin ich für die stete Anteilnahme am Fortschreiten dieser Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge dankbar. Herrn Prof. Dr. Kustaa Inkeri verdanke ich viele bedeutende Verbesserungen der Arbeit und Herrn Mag. Roland Freihoff die Durchsicht der sprachlichen Form. Schliesslich sei mit Dankbarkeit erwähnt, dass mir der finnische Staat über die Hochschule Jyväskylä (Jyväskylän Kasvatusopillinen Korkeakoulu) ein Stipendium für diese Arbeit bewilligt hat.

Jyväskylä, im Februar 1964

Veikko Nevanlinna

Inhalt

EINLEITUNG

1. **Der Primzahlsatz.** Bezeichnet man mit $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen $\leqq$ eine reelle, positive Zahl x, so besagt der *Primzahlsatz*, dass

$$\text{I} \qquad \lim_{x \to \infty} \pi(x) : \frac{x}{\log x} = 1 ,$$

wobei log den natürlichen Logarithmus bedeutet.

Wendet man statt der Funktion $\pi(x)$ andere die Primzahlen betreffende Funktionen an, so kann dieser Satz in mehreren untereinander gleichbedeutenden Formen dargestellt werden; davon nennen wir hier folgende:

Ist p eine Primzahl, x eine reelle Zahl und bezeichnet man mit $\vartheta(x)$ die Summe

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqq x} \log p ,$$

so sind die Gleichung I *und die Gleichung*

$$\text{II} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1$$

gleichbedeutend.

Es besteht nämlich die Gleichung

$$\vartheta(x) = \int_{1-}^{x+} \log t \, d\pi(t) = \pi(x) \log x - \int_{2}^{x} \frac{\pi(t)}{t} \, dt$$

und umgekehrt

$$\pi(x) = \int_{2-}^{x+} \frac{d\vartheta(t)}{\log t} = \frac{\vartheta(x)}{\log x} + \int_{2}^{x} \frac{\vartheta(t) \, dt}{t \log^2 t} .$$

Gilt nun die Gleichung I, so folgt II unmittelbar aus der ersten Gleichung; gilt wiederum II, so folgt I aus der zweiten.

Durch Anwendung der Funktion[1])

---

[1]) Man erkennt leicht, dass $\psi(x)$ auch als der Logarithmus des kleinsten gemeinsamen Vielfaches der ganzen Zahlen $\leq x$ definiert werden kann.

$$\psi(x) = \sum_{p^\nu \leqq x} \log p = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) ,$$

wo die zahlentheoretische Funktion Λ — die sog. Mangoldt'sche Funktion — den Wert $\log p$ für eine Primzahlpotenz p^ν, sonst den Wert Null annimmt, können wir den Primzahlsatz noch in einer dritten äquivalenten Form darstellen; denn man sieht leicht dass zwischen den Funktionen ψ und ϑ die Ungleichung

$$0 \leqq \psi(x) - \vartheta(x) \leqq k \sqrt{x} \log x \log\log x$$

mit einer geeigneten Konstante $k > 0$ besteht. Also folgt:

Die Gleichung

$$\text{III} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

ist mit der Gleichung II *und somit auch mit der Gleichung* I *gleichbedeutend.*

2. **Der Selberg'sche Beweis.** Der Primzahlsatz, den man früher — vom Jahre 1896 ab — nur mit funktionentheoretischen Methoden beweisen konnte, wurde im Jahre 1948 von A. Selberg und P. Erdös ([2]) und im Jahre 1949 von Selberg in anderer Fassung ([16]) elementar bewiesen; dabei waren nur das reelle Zahlengebiet und relativ einfache Methoden der höheren Analysis nötig. Später ist dieser Beweis in vielen anderen Varianten wiedergegeben worden.

Der Selberg'sche Beweis gliedert sich in zwei verschiedene Teile. Im ersten Teil leitet man die *Selberg'sche asymptotische Gleichung*

$$\varrho(x)\log x + \int_{1-}^{x+} \varrho\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) = O(x) \quad (\varrho(x) = \psi(x) - x)$$

entweder in dieser oder in irgendeiner damit äquivalenten Fassung ab. Im zweiten Teil beweist man dann den Primzahlsatz entweder unmittelbar ([1], [3], [12]) oder dadurch, dass man durch Eliminierung des Differentials $d\psi$ zu einer Ungleichung übergeht ([16], [22], [6 ss. 359—67]).

Im ersten Kapitel dieser Abhandlung wird die Selberg'sche asymptotische Gleichung durch Anwendung der Methode von Tatuzawa und Iseki ([23]) hergeleitet; diese Herleitung enthält im Vergleich mit den früheren Darstellungen nur geringe technische Änderungen. Dagegen ist der Schluss des Beweises teilweise neu und dürfte eine Verbesserung von einigem Wert bedeuten.

3. **Die Äquivalenten und Parallelbeweise des Primzahlsatzes.** Bezeichnet man

$$\varepsilon(x) = \int_{1-}^{x+} \frac{d\psi(t)}{t} - \log x + C\,,$$

$$M(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n)\,,$$

$$B\,(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n)}{n} = \int_{1-}^{x+} \frac{dM(t)}{t}\,,$$

wo C die Euler'sche Konstante und μ die sog. Möbius'sche Funktion bedeutet, so sind die Gleichungen

$$\text{IV} \qquad \lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0\,,$$

$$\text{V} \qquad \lim_{x \to \infty} \frac{M(x)}{x} = 0\,,$$

$$\text{VI} \qquad \lim_{x \to \infty} B(x) = 0$$

mit der Gleichung III, somit auch mit dem Primzahlsatz gleichbedeutend.

Im zweiten Kapitel wird zuerst, analog dem ersten Kapitel, die Selberg'sche asymptotische Gleichung für die Funktion ε abgeleitet. Durch Weiterentwicklung der Ideen von PITT ([12], [13]) und Selberg wird dann eine neue Variante des Selberg'schen Beweises gegeben. Unseres Wissens ist der Primzahlsatz mittels der Gleichung IV noch nicht elementar bewiesen worden.

Im Schlussteil des zweiten Kapitels wird zuerst die Äquivalenz der Gleichungen III, IV, V, und VI bewiesen; diese Beweise sind an sich wohlbekannt, es sind nur geringe technische Änderungen und die Zusammenfassung der logischen Zusammenhänge dieser Sätze hinzugefügt worden. Schliesslich wird in aller Kürze angedeutet, wie die Gleichungen V und VI durch genaues Befolgen der Methode des ersten Kapitels bewiesen werden können.

4. **Der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen.** In naher Beziehung mit dem Primzahlsatz steht die Frage über das Vorkommen der Primzahlen in einer arithmetischen Reihe

$$l\,, l + k\,, \ldots, l + nk\,, \ldots,$$

wo $(l, k) = 1$ ist. Schon im Jahre 1837 zeigte DIRICHLET mittels funktionentheoretischen Methoden, dass eine solche Reihe immer unendlich viele Primzahlen enthält. Durch Benutzung ähnlicher Methoden hat DE LA

Vallée Poussin im Jahre 1900 folgende Generalisierung des Primzahlsatzes bewiesen:

Es sei $\pi(k, l; x)$ *die Anzahl der Primzahlen* $p \leqq x$, *die der Kongruenz* $p \equiv l(k)$ *genügen. Ist dann* $(k, l) = 1$, *so ist*

$$\text{I}' \qquad \lim_{x\to\infty} \pi(k\,,\,l\,;\,x) : \frac{x}{\log x} = \frac{1}{\varphi(k)}\,,$$

wo die Funktion $\varphi(k)$ *die Euler'sche Funktion, somit die Anzahl der zu* k *teilerfremden, modulo* k *verschiedenen ganzen Zahlen bedeutet.*

Auch diesen Satz kann man, durch Anwendung der Funktionen

$$\vartheta(k\,,\,l\,;\,x) = \sum_{p \leqq x}^{p \equiv l(k)} \log p = \int_{1-}^{x+} \log t \, d\pi(k\,,\,l\,;\,t)$$

und

$$\psi(k\,,\,l\,;\,x) = \sum_{p^\nu \leqq x}^{p \equiv l(k)} \log p = \sum_{n \leqq x}^{n \equiv l(k)} \Lambda(n)$$

in verschiedenen Fassungen darstellen. Es lässt sich nämlich analog mit Nr. 1. beweisen, dass die Gleichungen

$$\text{II}' \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(k\,,\,l\,;\,x)}{x} = \frac{1}{\varphi(k)}$$

und

$$\text{III}' \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(k\,,\,l\,;\,x)}{x} = \frac{1}{\varphi(k)}$$

untereinander und mit der Gleichung I′ äquivalent sind.

Auch diesen Satz hat Selberg elementar bewiesen ([18]), indem er eine ähnliche Methode wie beim Beweis des eigentlichen Primzahlsatzes anwandte. Im dritten Kapitel dieser Arbeit wird unsere Variante für diesen Beweis wiedergegeben: zuerst leiten wir ein Analogon des Satzes von Tatuzawa und Iseki her, dann beweisen wir den Primzahlsatz für arithmetische Progressionen, indem wir den Gang des im ersten Kapitel dargestellten Beweises genau verfolgen. Es zeigt sich, dass die Analogie eine fast vollständige ist; die einzige neue Betrachtung verlangt die Herleitung der Gleichung (5.12), die zwar auch elementar, aber schwieriger als die übrigen Überlegungen in dieser Arbeit ist. Um eine störende Unterbrechung zu vermeiden, wird der Beweis der erwähnten Formel am Ende der Abhandlung erbracht.

Zur Darstellungstechnik sei noch erwähnt, dass der Verfasser bemüht war, die sowohl rechnerisch als typographisch unbequemen Summenausdrücke durch Stieltjes-Integrale zu ersetzen. Nach Auffassung des Verfassers wird der elementare Charakter der Beweise hierdurch nicht geändert.

I. DER SELBERG'SCHE BEWEIS

§ 1. Die zahlentheoretischen Grundlagen

1.1. **Möbius'sche Funktion. Umkehrsatz.** Die Möbius'sche zahlentheoretische Funktion $\mu(n)$, die man für quadratfreie Zahlen mit s Primfaktoren gleich $(-1)^s$, sonst gleich Null definiert, hat die wohlbekannte Grundeigenschaft

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = 1 \quad \text{oder} = 0\,, \tag{1.1}$$

je nachdem $n = 1$ oder > 1 ist; diese Gleichung könnte man auch als Definition der Möbius'schen Funktion benutzen.

Mittels der Gleichung (1.1) beweist man leicht den für das folgende grundlegenden

Umkehrsatz: *Es sei $\alpha(n)$ eine vollständig multiplikative zahlentheoretische Funktion, dh. $\alpha(mn) = \alpha(m)\alpha(n)$ für alle ganzen Zahlen, und es sei $\alpha(1) = 1$. Es seien ferner $f(x)$ und $g(x)$ zwei für reelle $x \geqq 0$ definierte Funktionen. Falls dann*

$$f(x) = \sum_{n \leqq x} \alpha(n)\, g\left(\frac{x}{n}\right) = \int_{1-}^{x+} g\left(\frac{x}{t}\right) dA(t)\,, \tag{1.2}$$

so ist

$$g(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n)\alpha(n) f\left(\frac{x}{n}\right) = \int_{1-}^{x+} f\left(\frac{x}{t}\right) dB(t) \tag{1.2'}$$

und umgekehrt; hier bedeuten die Funktionen A und B die Summenfunktionen [1])

$$A(x) = \sum_{n \leqq x} \alpha(n)\,;\; B(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n)\alpha(n)\,.$$

Falls speziell $\alpha(n) \equiv 1$, so ergibt sich aus den Gleichungen (1.2) und (1.2′)

$$f(x) = \sum_{n \leqq x} g\left(\frac{x}{n}\right) = \int_{1-}^{x+} g\left(\frac{x}{t}\right) d[t]\,, \tag{1.3}$$

$$g(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n) f\left(\frac{x}{n}\right) = \int_{1-}^{x+} f\left(\frac{x}{t}\right) dM(t)\,, \tag{1.3'}$$

---

[1]) Für die Existenz der Integrale in (1.2) und (1.2′) sind hier immer genügende Bedingungen vorhanden.

wo die Funktion $[x]$ die grösste ganze Zahl $\leqq x$ ist und $M(x)$ die Funktion

$$M(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n)$$

bezeichnet. Diese speziellen Formeln nennen wir im folgenden, wie üblich, die *Möbius'schen Umkehrformeln.*

Sind die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ nur für die ganzen positiven Werte x definiert, so setzen wir für die übrigen Werte $f(x) = g(x) = 0$ und erhalten aus den Gleichungen (1.2) und (1.2′) die Formeln

$$(1.4) \qquad f(n) = \sum_{d \mid n} \alpha(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right),\ g(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d)\,\alpha(d)\, f\left(\frac{n}{d}\right)$$

und aus den Gleichungen (1.3) und (1.3′)

$$(1.5) \qquad f(n) = \sum_{d \mid n} g(d)\,,\, g(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right).$$

1.2. **Die Funktionen** Λ, ψ **und** T. In der Einleitung haben wir schon die Funktionen Λ und ψ definiert. Aus der Definition der ersten Funktion folgt unmittelbar

$$(1.6) \qquad \log n = \sum_{d \mid n} \Lambda(d)\,,$$

somit wegen der Möbius'schen Umkehrformeln

$$(1.7) \qquad \Lambda(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \log \frac{n}{d}\,.$$

Diese Gleichung kann auch

$$(1.7') \qquad \Lambda(n) = \log n \sum_{d \mid n} \mu(d) - \sum_{d \mid n} \mu(d) \log d = - \sum_{d \mid n} \mu(d) \log d$$

geschrieben werden. Da nun $\psi(x)$ die Summenfunktion von $\Lambda(n)$ ist, so folgt aus (1.7)

$$\psi(x) = \sum_{mn \leqq x} \mu(m) \log n = \sum_{m \leqq x} \mu(m) \sum_{n \leqq \frac{x}{m}} \log n = \sum_{n \leqq x} \log n \sum_{m \leqq \frac{x}{n}} \mu(m)\,.$$

Mit Benutzung der Summenfunktionen $M(x)$ und

$$T(x) = \sum_{n \leqq x} \log n = \int_{1-}^{x+} \log t\, d[t]$$

kann dies auch

$$(1.8) \qquad \psi(x) = \int_{1-}^{x+} T\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) = \int_{1-}^{x+} M\left(\frac{x}{t}\right) dT(t)$$

geschrieben werden, woraus nach dem Möbius'schen Umkehrsatz und durch Änderung der Summationsanordnung

$$(1.9) \qquad T(x) = \int_{1-}^{x+} \psi\left(\frac{x}{t}\right) d[t] = \int_{1-}^{x+} \left[\frac{x}{t}\right] d\psi(t)$$

folgt.

Für die Funktion T haben wir die asymptotische Formel

$$(1.10) \qquad T(x) = \int_{1}^{x} \log t \, dt - \int_{1-}^{x+} \log t \, d(t - [t]) = x \log x - x + O(\log x) \,,$$

was nach Einführung der Euler'schen Konstante

$$C = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} - \log x + O\left(\frac{1}{x}\right)$$

und $x = [x] + O(1)$ eingesetzt

$$(1.10') \qquad T(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{x}{n} - (C + 1)\,[x] + O(\log x)$$

geschrieben werden kann.

§ 2. Beweis des Primzahlsatzes

2.1. **Die asymptotische Gleichung von Selberg.** Um die für den Selberg'schen Beweis grundlegende asymptotische Gleichung herzuleiten, beweisen wir zuerst folgenden Hilfssatz von TATUZAWA und ISEKI ([23]):

Es sei $f(x)$ *eine für* $x \geqq 0$ *definierte Funktion und*

$$(2.1) \qquad \log x \sum_{n \leqq x} f\left(\frac{x}{n}\right) = \log x \int_{1-}^{x+} f\left(\frac{x}{t}\right) d[t] = g(x) \,.$$

Dann ist

$$(2.1') \qquad \int_{1-}^{x+} g\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) = f(x) \log x + \int_{1-}^{x+} f\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) \,.$$

In der Tat verifiziert man nach (1.1) und (1.7'):

$$\int_{1-}^{x+} g\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) = \sum_{n \leqq x} \mu(n) \sum_{m \leqq \frac{x}{n}} f\left(\frac{x}{mn}\right) \log \frac{x}{n} = \log x \sum_{r \leqq x} f\left(\frac{x}{r}\right) \sum_{d \mid r} \mu(d)$$

$$- \sum_{r \leqq x} f\left(\frac{x}{r}\right) \sum_{d \mid r} \mu(d) \log d = f(x) \log x + \int_{1-}^{x+} f\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) .$$

Setzt man nun in der Gleichung (2.1)

$$f(x) = \psi(x) - x = \varrho(x) ,$$

so wird nach (1.9) und (1.10′)

$$g(x) = -(C+1)\,[x] \log x + O(\log^2 x) .$$

Hier wenden wir den Hilfssatz abermals auf die Funktion

$$\bar{g}(x) = \log x\,[x] = \log x \int_{1-}^{x+} d[t]$$

an und erhalten dann

$$\int_{1-}^{x+} \bar{g}\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) = \log x + \psi(x) = O(\psi(x)) .$$

Beachtet man noch, dass für jedes $i > 0$

$$\sum_{n \leqq x} \log^i \frac{x}{n} < \log^i x + \int_1^x \log^i \frac{x}{t}\, dt < \log^i x + x \int_1^\infty \frac{\log^i t}{t^2}\, dt = O(x) , \tag{2.2}$$

so erhalten wir für die linke Seite der Gleichung (2.1′) die Abschätzung

$$\int_{1-}^{x+} g\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) = O\left(\sum_{n \leqq x} \log^2 \frac{x}{n}\right) - (C+1) \int_{1-}^{x+} \bar{g}\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) = O(x) + O(\psi(x)) .$$

Also ergibt sich aus dieser Gleichung

$$\varrho(x) \log x + \int_{1-}^{x+} \varrho\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) = O(x) + O(\psi(x)) , \tag{2.3}$$

oder in anderer Fassung

$$\psi(x) \log x + \int_{1-}^{x+} \psi\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) = x \log x + \int_{1-}^{x+} \frac{x}{t}\, d\psi(t) + O(x) + O(\psi(x)) . \tag{2.3'}$$

Das Integral rechts schätzen wir folgendermassen ab:

$$(2.4) \qquad \int\limits_{1-}^{x+} \frac{x}{t}\, d\psi(t) = \int\limits_{1-}^{x+} \left(\frac{x}{t} - \left[\frac{x}{t}\right]\right) d\psi(t) + \int\limits_{1-}^{x+} \left[\frac{x}{t}\right] d\psi(t)$$

$$= O(\psi(x)) + T(x) = x \log x + O(x) + O(\psi(x)) \,,$$

so dass

$$(2.3'') \qquad \psi(x) \log x + \int\limits_{1-}^{x+} \psi\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) = 2\, x \log x + O(x) + O(\psi(x)) \,.$$

Nach der Definition der Funktion Λ ist das Integral links $\geqq 0$, somit

$$\frac{\psi(x)}{x}\,(1 + o(1)) \leqq 2 + o(1) \,,$$

woraus die TSCHEBYSCHEFF'*sche Gleichung* ([24])

$$(2.5) \qquad \psi(x) = O(x)$$

folgt. Also erhalten wir für die *asymptotische Gleichung von Selberg* folgende alternative Formen [1]):

$$(2.6) \qquad \varrho(x) \log x + \int\limits_{1-}^{x+} \varrho\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) = O(x)$$

oder

$$(2.6') \qquad \psi(x) \log x + \int\limits_{1-}^{x+} \psi\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) = 2\, x \log x + O(x) \,.$$

Aus der Gleichung (2.4) folgt noch gemäss (2.5)

$$(2.7) \qquad \int\limits_{1-}^{x+} \frac{d\psi(t)}{t} = \log x + O(1) \,.$$

Diese Gleichung kann auch

$$(2.7') \qquad \int\limits_{1}^{x} \frac{\psi(t)}{t^2}\, dt = \log x + O(1)$$

geschrieben werden, oder auch noch mit Hilfe der Funktion ϱ

$$(2.8) \qquad \int\limits_{1}^{x} \frac{\varrho(t)}{t^2}\, dt = O(1) \,.$$

---

[1]) Über andere Herleitungen dieser Gleichung vgl. [16], [22], [25].

2.2. **Die Selberg'sche Ungleichung.** Wir leiten im folgenden, ausgehend von den Gleichungen (2.6) und (2.6′), eine Ungleichung her, wo das Differential $d\psi$ durch das Differential dt ersetzt ist. Dazu bezeichnen wir

$$\omega(x) = \int_{1-}^{x+} \psi\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) = \sum_{mn \leqq x} \Lambda(m)\, \Lambda(n)\,, \tag{2.9}$$

$$S(x) = \psi(x) \log x + \omega(x) - \int_{1}^{x} \frac{\psi(t)}{t}\, dt\,. \tag{2.10}$$

Dann folgt aus den Gleichungen (2.5) und (2.6′)

$$S(x) = 2\,x \log x + O(x)\,, \tag{2.11}$$

$$dS(t) = \log t\; d\psi(t) + d\omega(t) = 2 \log t\; dt + dR(t)\,, \tag{2.12}$$

wobei wir die Funktion

$$R(x) = S(x) - 2\,x \log x + 2\,x - 2 = O(x) \tag{2.12′}$$

so bestimmen, dass sie für $x = 1$ verschwindet.

Wir gehen nun von der Gleichung (2.6) aus und iterieren sie einmal, indem wir $\dfrac{x}{t}$ statt x einsetzen:

$$\varrho\left(\frac{x}{t}\right) \log x = \varrho\left(\frac{x}{t}\right) \log t - \int_{1-}^{\frac{x}{t}+} \varrho\left(\frac{x}{ut}\right) d\psi(u) + O\left(\frac{x}{t}\right).$$

Durch Einsetzen in die Gleichung (2.6) ergibt sich

$$\varrho(x) \log^2 x = - \int_{1-}^{x+} \varrho\left(\frac{x}{t}\right) \log t\; d\psi(t) + \int_{1-}^{x+} d\psi(t) \int_{1-}^{\frac{x}{t}+} \varrho\left(\frac{x}{ut}\right) d\psi(u)$$
$$+ \int_{1-}^{x+} O\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) + O(x \log x)\,.$$

Gemäss der asymptotischen Gleichung (2.7) ist das dritte Integral rechts $O(x \log x)$. Im zweiten Integral kehren wir die Integrationsanordnung folgendermassen um:

$$\int_{1-}^{x+} d\psi(t) \int_{1-}^{\frac{x}{t}+} \varrho\left(\frac{x}{ut}\right) d\psi(u) = \sum_{n \leqq x} \Lambda(n) \sum_{m \leqq \frac{x}{n}} \varrho\left(\frac{x}{mn}\right) \Lambda(m)$$

$$= \sum_{n \leqq x} \varrho\left(\frac{x}{n}\right) \sum_{d \mid n} \Lambda(d)\, \Lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \int_{1-}^{x+} \varrho\left(\frac{x}{t}\right) d\omega(t)\,,$$

wobei die Gleichung die Form

$$\varrho(x) \log^2 x = \int_{1-}^{x+} \varrho\left(\frac{x}{t}\right) (-\log t\, d\psi(t) + d\omega(t)) + O(x \log x)$$

annimmt. In dieser Gleichung gehen wir nun zu absoluten Beträgen über und wenden die Differentialformel (2.12) an; dann haben wir

$$|\varrho(x)| \log^2 x \leqq 2 \int_{1}^{x} \left|\varrho\left(\frac{x}{t}\right)\right| \log t\, dt + \int_{1-}^{x+} \left|\varrho\left(\frac{x}{t}\right)\right| dR(t) + O(x \log x)\,,$$

wo noch das zweite Integral rechts abzuschätzen ist.

Wegen der Definitionen der Funktionen ϱ und R ist $\varrho(1) = -1$, $R(1) = 0$, und aus der Gleichung (2.12′) folgt

$$\left|\int_{1-}^{x+} \left|\varrho\left(\frac{x}{t}\right)\right| dR(t)\right| = \left|R(x) - \int_{1-}^{x+} R(t)\, d\left|\varrho\left(\frac{x}{t}\right)\right|\right| = O(x) + O\left(\int_{1-}^{x+} t \left|d\left|\varrho\left(\frac{x}{t}\right)\right|\right|\right),$$

und für das Integral in Klammern besteht die Abschätzung

$$\int_{1-}^{x+} t \left|d\left|\varrho\left(\frac{x}{t}\right)\right|\right| \leqq -\int_{1-}^{x+} t\left(d\psi\left(\frac{x}{t}\right) + d\left(\frac{x}{t}\right)\right) = x \int_{1-}^{x+} \frac{d\psi(t) + dt}{t} = O(x \log x)\,.$$

Alles in allem erhalten wir die *Selberg'sche Ungleichung*

$$|\varrho(x)| \log^2 x \leqq 2 \int_{1}^{x} \left|\varrho\left(\frac{x}{t}\right)\right| \log t\, dt + O(x \log x)\,.$$

Diese Ungleichung erhält eine bequemere Form, wenn man statt der Veränderlichen x und t deren Logarithmen verwendet. Werden diese wiederum mit x bzw. t bezeichnet, und setzt man

$$r(x) = e^{-x} \varrho(e^x) = e^{-x} \psi(e^x) - 1\,, \tag{2.13}$$

so nimmt die Selberg'sche Ungleichung folgende Form an:

(2.14) $$|r(x)| \leqq \frac{2}{x^2} \int_0^x |r(x-t)|\, t dt + O\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x^2} \int_0^x |r(t)|\, (x-t)\, dt + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Aus der Gleichung (2.8), die mit den neuen Veränderlichen in

(2.15) $$\int_0^x r(t)\, dt = O(1)$$

übergeht, folgt die Existenz einer Konstante $c > 0$, so dass die Ungleichung

(2.15′) $$\left| \int_x^y r(t) dt \right| < c$$

in allen Intervallen $0 \leqq x \leqq t \leqq y$ besteht.

Bemerkung. Das Differential $d\psi$ kann auch ohne Iteration aus der Gleichung (2.6) eliminiert werden ([16]); allerdings wird die Abschätzung des Restgliedes dadurch etwas umständlicher. Als Resultat erhält man

$$|\varrho(x)| \log x \leqq \int_1^x \left| \varrho\left(\frac{x}{t}\right) \right| dt + O(x \log\log x)$$

oder

(2.14′) $$|r(x)| \leqq \frac{1}{x} \int_0^x |r(t)|\, dt + O\left(\frac{\log x}{x}\right),$$

wo $r(x)$ die Funktion (2.13) bedeutet. Wie der Verfasser ([11]) gezeigt hat, kann der Primzahlsatz auch aus der Ungleichung (2.14′) gefolgert werden, sogar etwas einfacher als in dieser Arbeit. Über den Zusammenhang zwischen (2.14) und (2.14′) vgl. [6, ss. 364—5].

2.3. **Der Primzahlsatz.** Der Primzahlsatz $\psi(x) \sim x$ oder $\varrho(x) = o(x)$ erhält durch die neuen Bezeichnungen die Form $r(x) = o(1)$. Nach (2.13) ist wenigstens $r(x) = O(1)$; also ist die obere Grenze

(2.16) $$\limsup_{x \to \infty} |r(x)| = \lambda$$

endlich, und der Primzahlsatz behauptet dass $\lambda = 0$ ist.

Zum Beweis betrachten wir die Folge

(2.17) $$0 < x_1 < x_2 < \ldots$$

der Punkte, wo die Funktion $r(x)$ ihr Vorzeichen ändert. Falls nun eine Zahl $\bar{x} \geqq 0$ existiert, so dass $r(x)$ sein Vorzeichen für $x \geqq \bar{x}$ unverändert beibehält, so folgt der Primzahlsatz unmittelbar aus den Ungleichungen (2.14) und (2.15′); denn dann haben wir

$$\int_0^x |r(t)|\,(x-t)\,dt \leqq x\left(\int_0^{\bar{x}} |r(t)|\,dt + \left|\int_{\bar{x}}^x r(t)\,dt\right|\right) + \int_0^{\bar{x}} |r(t)|\,tdt + \left|\int_{\bar{x}}^x r(t)\,tdt\right| = \left|\int_{\bar{x}}^x r(t)\,tdt\right| + O(x)\,,$$

ferner gemäss (2.15′)

$$\left|\int_{\bar{x}}^x r(t)\,tdt\right| = \left|\int_{\bar{x}}^x td\left(\int_{\bar{x}}^t r(u)\,du\right)\right| \leqq O(x) + \left|\int_{\bar{x}}^x dt \int_{\bar{x}}^t r(u)\,du\right| = O(x)\,,$$

somit nach (2.14)

$$r(x) = O\left(\frac{1}{x}\right) = o(1)\,.$$

Im entgegengesetzten Fall ist die Folge (2.17) unendlich; dann führen wir den Beweis indirekt und nehmen an, es sei die obere Grenze (2.16) positiv, also $\lambda > 0$. Wir wählen dann die Zahl λ' so, dass $0 < \lambda' < \lambda$, $\lambda' < 1$, und bezeichnen mit $\bar{\Delta}_i$ die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle von $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$, wo $|r(x)| \leqq \lambda'$. Im Komplement $\Delta_i - \bar{\Delta}_i$ hat man dann $|r(x)| \geqq \lambda'$, und weil $r(x)$ sein Vorzeichen in dem Intervall $\Delta_i = x_{i+1} - x_i$ unverändert beibehält, so folgt aus (2.15′), dass $\lambda'(\Delta_i - \bar{\Delta}_i) < c$, somit

$$\bar{\Delta}_i > \Delta_i - \frac{c}{\lambda'} = \left(1 - \frac{c}{\lambda'\Delta_i}\right)\Delta_i\,. \tag{2.18}$$

Folgende elementare Betrachtung ergibt für $\bar{\Delta}_i$ noch eine zweite Abschätzung. Aus dem Ausdruck (2.13) der Funktion $r(x)$ ist zu sehen, dass das Vorzeichen dieser Funktion nur in den Sprungstellen der monoton wachsenden Sprungfunktion $\psi(e^x)$ von $-$ zu $+$ übergehen kann, während der entgegengesetzte Vorzeichenwechsel nur in Stetigkeitsstellen von $r(x)$ stattfinden kann. In einem der Endpunkte x_i, x_{i+1} des Intervalles Δ_i ist $r(x)$ somit stetig und hier geht sein Vorzeichen von $+$ zu $-$ über. Ist dies im Endpunkt x_{i+1} der Fall, so hat man $r(x_{i+1}) = e^{-x_{i+1}}\psi(e^{x_{i+1}}) - 1 = 0$, also $\psi(e^{x_{i+1}}) = e^{x_{i+1}}$ und $r(x) = e^{x_{i+1}-x} - 1$ in einer gewissen Umgebung des Punktes x_{i+1}. Aus dem Verlauf der Funktion $r(x)$ (Abb. 1 a) ist zu sehen, dass dann im ganzen Intervall Δ_i die Ungleichung

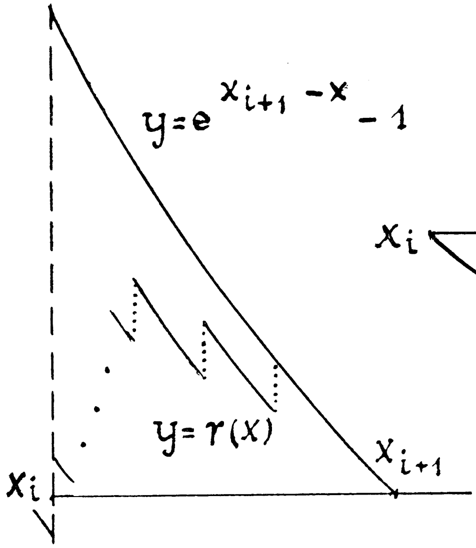

Abb. 1 a

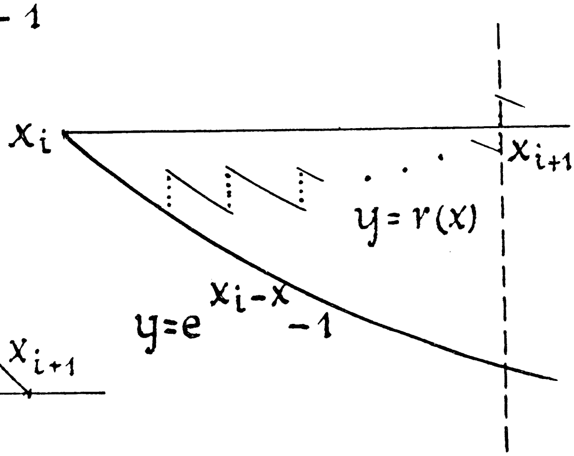

Abb. 1 b

$$0 \leqq r(x) \leqq e^{x_{i+1}-x} - 1$$

besteht. Ist wiederum $r(x)$ im Endpunkte x_i stetig (Abb. 1 b), so besteht im Intervall $\varDelta_i$ die Ungleichung

$$0 \geqq r(x) \geqq e^{x_i - x} - 1 \, .$$

Im ersten Fall ist somit $|r(x)| = r(x) \leqq \lambda'$ im Intervall $\varDelta_i$ jedenfalls für $x \geqq x_{i+1} - \log(1 + \lambda')$, im zweiten Fall ist $|r(x)| = - r(x) \leqq \lambda'$ jedenfalls für $x \leqq x_i - \log(1 - \lambda')$, also wegen $\log(1 + \lambda') + \log(1 - \lambda') < 0$ wenigstens für $x \leqq x_i + \log(1 + \lambda')$. Somit hat man

$$\overline{\varDelta}_i \geqq \log(1 + \lambda') = \frac{\log(1 + \lambda')}{\varDelta_i} \varDelta_i \tag{2.19}$$

falls $\varDelta_i \geqq \log(1 + \lambda')$ und

$$\overline{\varDelta}_i = \varDelta_i \tag{2.19'}$$

falls $\varDelta_i < \log(1 + \lambda')$.

Aus den Abschätzungen (2.18), (2.19) und (2.19′) folgt nun die Existenz einer positiven Konstante $\vartheta < 1$, so dass in sämtlichen Intervallen $\varDelta_i$ die Ungleichung

$$\overline{\varDelta}_i \geqq \vartheta \, \varDelta_i \tag{2.20}$$

besteht. In der Tat: wegen (2.19′) können wir uns auf die Intervalle $\varDelta_i \geqq \log(1 + \lambda')$ beschränken und haben dann für $\overline{\varDelta}_i$ die Abschätzungen

(2.18) und (2.19). Diese geben für $\overline{\varDelta}_i$ dieselbe Abschätzung, falls $1 - \frac{c}{\lambda' \varDelta_i} = \frac{\log(1+\lambda')}{\varDelta_i}$, also für $\varDelta_i = \frac{c}{\lambda'} + \log(1+\lambda') = \varDelta$, und es besteht dann die Ungleichung (2.20) mit

$$\vartheta = \frac{\lambda' \log(1+\lambda')}{c + \lambda' \log(1+\lambda')} < 1 \,. \tag{2.20'}$$

Ist nun $\varDelta_i > \varDelta$, so besteht die Abschätzung (2.20) mit der Konstante (2.20') a fortiori wegen (2.18) und für $\varDelta_i < \varDelta$ besteht sie a fortiori wegen (2.19); sie besteht somit in sämtlichen Intervallen $\varDelta_i$.

Nach der Definition (2.16) der Konstante λ können wir für jedes $\varepsilon > 0$ die Zahl x_ε so annehmen, dass $|r(x)| < \lambda + \varepsilon$ für $x > x_\varepsilon$. Bezeichnet dann x_m die kleinste Zahl der Folge (2.17), die $\geqq x_\varepsilon$ ist, und $x_n > x_m$ eine beliebige Zahl derselben Folge, so besteht im Intervalle $(0, x_n - x_m)$ die Ungleichung $|r(x_n - t)| < \lambda + \varepsilon$ und gemäss (2.20) ist die Gesamtlänge derjenigen Teilintervalle des erwähnten Intervalles wo $|r(x_n - t)| < \lambda'$ grösser als $\vartheta(x_n - x_m)$. Somit haben wir

$$\int_0^{x_n} |r(x_n - t)|\, t dt = \int_0^{x_n - x_m} |r(x_n - t)|\, t dt + \int_{x_n - x_m}^{x_n} |r(x_n - t)|\, t dt$$

$$= \int_0^{x_n - x_m} |r(x_n - t)|\, t dt + O(x_n) < (\lambda + \varepsilon) \int_0^{x_n - x_m} t dt - (\lambda - \lambda' + \varepsilon) \int_0^{\vartheta(x_n - x_m)} t dt + O(x_n)$$

$$= \{\lambda + \varepsilon - \vartheta^2(\lambda - \lambda' + \varepsilon)\} \frac{(x_n - x_m)^2}{2} + O(x_n)$$

$$\leqq \{\lambda + \varepsilon - \vartheta^2(\lambda - \lambda' + \varepsilon)\} \frac{x_n^2}{2} + O(x_n)\,,$$

woraus durch Anwendung der Ungleichung (2.14) für $x = x_n$ die Ungleichung

$$|r(x_n)| \leqq \frac{2}{x_n^2} \int_0^{x_n} |r(x_n - t)|\, t dt + O\left(\frac{1}{x_n}\right) < \lambda + \varepsilon - \vartheta^2(\lambda + \varepsilon - \lambda') + O\left(\frac{1}{x_n}\right)$$

folgen würde, somit wegen $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$ eine für jedes $\varepsilon > 0$ gültige Ungleichung

$$\lambda = \limsup |r(x)| \leqq \lambda + \varepsilon - \vartheta^2(\lambda + \varepsilon - \lambda')$$

also ein Widerspruch $\lambda < \lambda$; dieser kann nur darin seinen Grund haben, dass die Antithese $\lambda > 0$ falsch ist. Folglich ist $\lambda = 0$ und der Primzahlsatz bewiesen.

II. ÜBER DIE ÄQUIVALENTEN DES PRIMZAHLSATZES

§ 3. Der Primzahlsatz mittels der ε-Funktion

3.1. **Die Fragestellung.** Bezeichnen wir

$$h(x) = \int_{1-}^{x+} \frac{d\psi(t)}{t} = \sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda(n)}{n}, \tag{3.1}$$

$$\varepsilon(x) = h(x) - \log x + \gamma, \tag{3.2}$$

mit einer vorläufig beliebigen Konstante γ, so ist nach (2.7) $\varepsilon(x) = O(1)$ und aus der Gleichung

$$\psi(x) = \int_{1-}^{x+} t\, dh(t) = x - 1 + \int_{1-}^{x+} t\, d\varepsilon(t) = x + x\varepsilon(x) - \int_{1}^{x} \varepsilon(t)\, dt + O(1)$$

geht durch Abschätzung des Integralgliedes hervor, dass der Primzahlsatz in der Fassung $\psi(x) - x = \varrho(x) = o(x)$ eine Folge der Gleichung

$$\varepsilon(x) = o(1) \tag{3.3}$$

ist. Bei passender Wahl der Konstante γ kann die Gleichung (3.3) analog der Methode des vorigen Kapitels bewiesen werden. Wir stellen uns aber die Aufgabe, diesen Beweis im Schlussteile auf eine andere Weise zu bringen, dh. eine neue Variante des Selberg'schen Beweises vorzulegen.

3.2. **Vorbereitende Betrachtungen.** Um eine mit der Selberg'schen asymptotischen Gleichung parallele Gleichung herzuleiten, wenden wir den Hilfssatz von Tatuzawa und Iseki (Nr. 2.1.) auf die Funktion

$$f(x) = x\varepsilon(x)$$

an, wobei wir die Konstante γ so bestimmen, dass die Grössenordnung der Funktion g möglichst klein wird. Durch Einsetzen in (2.1) ergibt sich

$$g(x) = x \log x \int_{1-}^{x+} \varepsilon\left(\frac{x}{t}\right) \frac{d[t]}{t}$$

$$= x \log x \left\{ \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \Lambda(d) - \log x \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} + \sum_{n \leqq x} \frac{\log n}{n} + \gamma \log x + C\gamma + O\left(\frac{1}{x}\right) \right\}$$

$$= (\gamma - C)\, x \log^2 x + \left(2 \sum_{n \leqq x} \frac{\log n}{n} - \log^2 x + C\gamma\right) x \log x + O(\log^2 x),$$

wo C die Euler'sche Konstante ist. Setzen wir also

$$\gamma = C\,;\ \lim_{x\to\infty}\left(2\sum_{n\leqq x}\frac{\log n}{n} - \log^2 x\right) + C^2 = \varkappa\,,$$

so haben wir

$$g(x) = \varkappa x \log x + O(\log^2 x) = \varkappa[x]\log x + O(\log^2 x)\,,$$

und wie im ersten Kapitel schliessen wir, dass die linke Seite der Gleichung (2.1′) $O(x)$ ist. Somit ergibt sich durch Einsetzen und Dividieren mit x als Analogon der Selberg'schen asymptotischen Gleichung

$$\varepsilon(x)\log x + \int_{1-}^{x+}\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right)dh(t) = O(1)\,. \tag{3.4}$$

Aus der Herleitung dieser Gleichung geht noch hervor, dass

$$\int_{1-}^{x+}\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right)\frac{d[t]}{t} = O(1)\,,$$

und weil andererseits

$$\left|\int_{1-}^{x+}\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right)\frac{d(t-[t])}{t}\right| = O\left(\int_{1-}^{x+}\left|d\left(\frac{\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right)}{t}\right)\right|\right) + O(1)$$

$$= O\left(\int_{1-}^{x+}\frac{\left|d\,\varepsilon\left(\frac{x}{t}\right)\right|}{t}\right) + O(1) \leqq \frac{1}{x}\,O\left(\int_{1-}^{x+}t(dh(t) + d\log t)\right) + O(1) = O(1)\,,$$

so erhalten wir

$$\int_1^x \varepsilon\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t} = \int_1^x\frac{\varepsilon(t)}{t}\,dt = O(1)\,, \tag{3.5}$$

als die Parallele der asymptotischen Gleichung (2.8).

3.3. **Die Funktionen** $k(x)$ **und** $k_2(x)$. Setzt man in die Gleichung (3.4) den Ausdruck von $\varepsilon(x)$ aus der Gleichung (3.2) ein, so wird

$$\int_{1-}^{x+} h\left(\frac{x}{t}\right)dh(t) + \int_{1-}^{x+}\log t\,dh(t) - \log^2 x + 2\,C\log x = O(1)$$

oder

$$(3.6) \qquad h_2(x) + \int_{1-}^{x+} \log t \, dh(t) = \log^2 x - 2\,C \log x + \Delta(x)\,,$$

wo $\Delta(x) = O(1)$ und

$$(3.6') \qquad h_2(x) = \int_{1-}^{x+} h\left(\frac{x}{t}\right) dh(t) = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \Lambda(d)\, \Lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \int_{1-}^{x+} \frac{d\omega(t)}{t}\,,$$

wobei ω die Funktion (2.9) bedeutet. Andererseits folgt aus der Gleichung (3.4) durch ähnliche Iteration und Umkehrung der Integrationsanordnung wie im ersten Kapitel

$$(3.7) \qquad \varepsilon(x) = \frac{1}{\log^2 x} \int_{1-}^{x+} \varepsilon\left(\frac{x}{t}\right) (dh_2(t) - \log t \, dh(t)) + O\left(\frac{1}{\log x}\right),$$

wobei die Gleichung (3.6′) zu berücksichtigen ist.

Wir gehen nun in den Gleichungen (3.4), (3.7) und (3.6) zu den Logarithmen der Veränderlichen über und bezeichnen

$$k(x) = h(e^x)\,,\ k_2(x) = h_2(e^x)\,,\ r(x) = \varepsilon(e^x)\,,$$

wobei wir die folgenden Gleichungen erhalten:

$$(3.8) \qquad r(x) = -\frac{1}{x} \int_0^{x+} r(x-t)\, dk(t) + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$(3.9) \qquad r(x) = \frac{1}{x^2} \int_0^{x+} r(x-t)\, (dk_2(t) - t\,dk(t)) + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$(3.10) \qquad k_2(x) + \int_0^{x+} t\, dk(t) = x^2 - 2\,C\,x + \delta(x) \qquad (\delta(x) = O(1))\,;$$

aus der letzten Gleichung ergibt sich noch durch Differentation

$$(3.10') \qquad dk_2(t) + t\, dk(t) = 2\,t dt - 2\,C\,dt + d\delta(t)\,.$$

Es sei noch bemerkt, dass $k(x) = x + O(1)$ ist und dass wegen

$$k_2(x) = \int_0^{x+} k(x-t)\, dk(t) = x\, k(x) - \int_0^{x+} t\, dk(t) + O(x)\,,$$

$$\int_0^{x+} t\, dk(t) = x\, k(x) - \int_0^{x} k(t)\, dt + O(x)$$

die Gleichung

$$k_2(x) = \int_0^{x+} t\,dk(t) + O(x) = \frac{x^2}{2} + O(x) \tag{3.11}$$

besteht; also stimmen in der Gleichung (3.10) die Glieder links bis auf $O(x)$ in bezug auf ihre Grössenordnung überein. Überdies sei bemerkt, dass die beiden Funktionen k und k_2 offenbar monoton zunehmend sind.

3.4. **Der Primzahlsatz.** Der Primzahlsatz $\varepsilon(x) = o(1)$ geht mit neuen Veränderlichen in die Form $r(x) = o(1)$ über, und wegen (3.5) besteht die asymptotische Gleichung

$$\int_0^x r(t)\,dt = O(1) \tag{3.12}$$

und somit auch die Ungleichung

$$\left| \int_x^y r(t)\,dt \right| < c \tag{3.12'}$$

mit einer geeigneten Konstante c in allen Intervallen $0 \leqq x \leqq t \leqq y$.

Geht man in der Gleichung (3.9) (oder, falls eine völlige Analogie erwünscht ist, schon in der Gleichung (3.7)) zu den absoluten Beträgen über, so kann man mittels der Differentialformel (3.10′) eine mit (2.14) formell identische Ungleichung herleiten, wonach der Beweis prinzipiell wie im ersten Kapitel durchgeführt werden kann. Indessen wollen wir im folgenden zeigen, wie der Primzahlsatz unmittelbar aus der Gleichung (3.9) bewiesen werden kann[1]). Der Vergleich mit der Formel (3.10′) gibt uns Anlass das Integral rechts in (3.9) mit verändertem Vorzeichen im zweiten Differential zu betrachten. Wegen den Gleichungen (3.10′) und (3.12) und den Betrachtungen auf der Seite 19 haben wir

---

[1]) Dass dies hier möglich ist, hat seinen Grund darin, dass die Differentialformel (3.10′) mehr besagt als die entsprechende Formel (2.12) im ersten Kapitel; denn aus (2.12) ergibt sich nur

$$t dk(t) + dk_2(t) = 2\,t dt + d\overline{R}(t)\,,$$

wo

$$\overline{R}(x) = \int_0^{x+} \frac{dR(e^t)}{e^t} = O(x)\,.$$

$$\int\limits_0^{x+} r(x-t)\,(dk_2(t)+tdk(t)) = 2\int\limits_0^{x} r(x-t)\,tdt - 2\,C\int\limits_0^{x} r(x-t)\,dt + \int\limits_0^{x+} r(x-t)\,d\delta(t)$$

$$= 2\,x\int\limits_0^{x} r(t)\,dt - 2\int\limits_0^{x} r(t)\,tdt - 2\,C\int\limits_0^{x} r(t)\,dt + \int\limits_0^{x+} r(x-t)\,d\delta(t)$$

$$= \int\limits_0^{x+} r(x-t)\,d\delta(t) + O(x)\,,$$

und für das letzte Integral besteht wegen $k(x) = O(x)$ die Abschätzung

$$\int\limits_0^{x+} r(x-t)\,d\delta(t) = \int\limits_0^{x+} \delta(t)\,dr(x-t) + O(1) \leqq O\left(\int\limits_0^{x+} |dr(x-t)|\right)$$

$$\leqq O\left\{\int\limits_0^{x+}(dk(t)+dt)\right\} = O(x)\,,$$

somit

$$\frac{1}{x^2}\int\limits_0^{x+} r(x-t)\,(dk_2(t)+tdk(t)) = O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{3.13}$$

Wir bezeichnen wieder

$$\lambda = \limsup |r(x)| = \max\{\limsup r(x)\,,\,-\liminf -r(x)\}\,, \tag{3.14}$$

wobei der Primzahlsatz behauptet, dass $\lambda = 0$ ist. Wir nehmen an, es wäre $\lambda > 0$ und zeigen, dass dies zum Widerspruch führt. Dazu wählen wir eine unendliche Zahlenfolge x_v, so dass $\lim r(x_v) = \pm\,\lambda$, oder nach (3.9)

$$\lim \frac{1}{x_v^2}\int\limits_0^{x_v+} r(x_v-t)\,(dk_2(t)-tdk(t)) = \pm\,\lambda \tag{3.15}$$

und bestimmen für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ eine Zahl x_ε so dass $|r(x)| < \lambda + \varepsilon$ für $x > x_\varepsilon$. Es bestehe nun in der Gleichung (3.15) rechts das Pluszeichen. Dann folgt aus dieser Gleichung und aus (3.13)

$$\lambda = \frac{2}{x_v^2}\int\limits_0^{x_v+} r(x_v-t)\,dk_2(t) + o(1) = -\frac{2}{x_v^2}\int\limits_0^{x_v+} r(x_v-t)\,tdk(t) + o(1)\,,$$

und andererseits nach (3.11)

$$\lambda = \frac{2}{x_v^2} \int_0^{x_v+} \lambda dk_2(t) + o(1) = \frac{2}{x_v^2} \int_0^{x_v+} \lambda t dk(t) + o(1) ,$$

somit

$$(3.16) \qquad \frac{1}{x_v^2} \int_0^{x_v+} \{\lambda - r(x_v - t)\} \, dk_2(t) + \frac{1}{x_v^2} \int_0^{x_v+} \{\lambda + r(x_v - t)\} \, t dk(t) = o(1) .$$

Diese Gleichung besteht offensichtlich auch dann, wenn die Integration nur über die Strecke $(0, x_v - x_\varepsilon)$ erstreckt wird. Wir wählen nun eine positive Zahl $\lambda' < \lambda$ und teilen dieses Integrationsintervall in Teilgebiete I^+, I^-, und $\bar{I}$, je nachdem welche der Ungleichungen $r(x_v - t) > \lambda'$, $r(x_v - t) < - \lambda'$ und $|r(x_v - t)| \leqq \lambda'$ in ihnen besteht. Dann folgt aus (3.16)

$$o(1) > - \frac{\varepsilon}{x_v^2} \int_{I^+} dk_2(t) - \frac{\varepsilon}{x_v^2} \int_{I^-} t dk(t) + \frac{\lambda - \lambda'}{x_v^2} \int_{\bar{I}} \{dk_2(t) + t dk(t)\} .$$

Daraus ergibt sich, da die ersten Glieder nach (3.11) $o(1)$ sind und das dritte nichtnegativ, die Gleichung

$$(3.17) \qquad \frac{1}{x_v^2} \int_{\bar{I}} \{dk_2(t) + t dk(t)\} = o(1) .$$

Besteht in der Gleichung (3.15) rechts das Minuszeichen, so kann diese Gleichung auf eine ähnliche Weise abgeleitet werden. Wir decken den Widerspruch auf, indem wir zeigen, dass die untere Grenze der linken Seite der Gleichung (3.17) andererseits positiv ist. Dazu betrachten wir eine beliebige Strecke I, deren Länge Δ der Bedingung

$$(3.18) \qquad \Delta \geqq \frac{2c}{\lambda'}$$

mit der Konstante c in (3.12′) genügt. Falls $r(x)$ im Intervall I sein Vorzeichen unverändert beibehält, so kann nicht im ganzen Intervall die Ungleichung $|r(x)| \geqq \frac{\lambda'}{2}$ bestehen; denn daraus würde folgen

$$\left| \int_I r(t) \, dt \right| \geqq \Delta \frac{\lambda'}{2} \geqq c ,$$

entgegen der Ungleichung (3.12′). Somit gibt es im Intervall I wenigstens einen Punkt ξ mit der Eigenschaft $|r(\xi)| \leqq \frac{\lambda'}{2}$. Wir zeigen dass dasselbe für ein genügend grosses x auch dann gilt, wenn $r(x)$ im Intervall I sein Vorzeichen ändert, wobei wir uns selbstverständlich auf den Fall beschränken können, wo die Funktion $r(x)$ an der Stelle ξ des Vorzeichenwechsels unstetig ist; aus der Definition der erwähnten Funktion geht hervor, dass dies nur an den Stellen der Fall sein kann, wo die Funktion r zunehmend und e^{ξ} eine Primzahlpotenz ist. Dann aber haben wir

$$|r(\xi_+)| + |r(\xi_-)| = r(\xi_+) - r(\xi_-) = \int_{\xi_-}^{\xi_+} \frac{d\psi(e^t)}{e^t} = \frac{\Lambda(e^{\xi})}{e^{\xi}} \leqq \frac{\xi}{e^{\xi}} = o(1) .$$

Daher sind sowohl $|r(\xi_+)|$ als $|r(\xi_-)|$ bei genügend grossem ξ beliebig klein, woraus die Behauptung folgt.

Andererseits folgt aus der Definition der Funktion r

$$r(x+h) = r(x) + k(x+h) - k(x) - h \geqq r(x) - h$$

und ferner gemäss dieser Ungleichung und der Gleichung (3.8) durch Einsetzen in das Integralglied und einfaches Rechnen

$$r(x+h) \leqq r(x) + h + o(1) .$$

Also existiert eine positive Zahl $\bar{\lambda}(\leqq \lambda')$, so dass für ein genügend grosses x die Ungleichung $|r(x+h) - r(x)| \leqq \frac{\lambda'}{2}$ für $h \leqq \frac{\bar{\lambda}}{2}$ besteht. Setzen wir noch für die Länge Δ die Bedingung

$$\Delta > \frac{2\,c}{\lambda'} + \bar{\lambda} \tag{3.19}$$

an, so erhalten wir als Zusammenfassung der obigen Schlussfolgerungen folgendes Resultat:

In jedem Intervall, dessen Länge der Bedingung (3.19) *genügt und dessen Anfangspunkt eine feste Zahl* X *überschreitet, gibt es wenigstens einen Teilintervall, dessen Länge* $\geqq \bar{\lambda}$ *ist und wo die Ungleichung* $|r(x)| \leqq \lambda'$ *besteht.*

Wir teilen nun die Strecke (X, x_v) in gleiche Intervalle I_j von der Länge Δ; deren Anzahl ist also

$$m = \left[\frac{x_v - X}{\Delta}\right]. \tag{3.20}$$

Bezeichnen wir dann mit δ_j einen Teilintervall von I_j mit der Eigenschaft $|r(x)| \leqq \lambda'$, so sind die Längen aller Intervalle $\delta_j \geqq \bar{\lambda}$ und aus der Definition des Gebietes $\bar{I}$ folgt, dass alle Strecken δ_j als Teilgebiet zu ihm gehören. Also haben wir nach der Differentialformel (3.10′)

$$\int_I \{dk_2(t) + tdk(t)\} \geqq 2 \sum_{j=1}^{m} \int_{\delta_j} tdt - 2C \sum_{j=1}^{m} \int_{\delta_j} dt + \sum_{j=1}^{m} \int_{\delta_j} d\delta(t) . \tag{3.21}$$

Hier sind das zweite und dies dritte Glied rechts von der Grössenordnung $O(x_v)$. In bezug auf das zweite ist dies evident. Um das dritte abzuschätzen, wählen wir eine Zahl $k > 0$, so dass die Ungleichung $\left|\int_{\delta_j} d\delta(t)\right| < k$ für jedes j besteht; dann ist wegen (3.20)

$$\sum_{j=1}^{m} \left|\int_{\delta_j} d\delta(t)\right| < mk \leqq \frac{k}{\varDelta} (x_v - X) = O(x_v)$$

wie behauptet.

Wir schätzen nun das erste Glied in (3.21) ab. Dazu bemerken wir, dass das Intervall δ_j ($\geqq \bar{\lambda}$) ganz in I_j enthalten ist, so dass

$$\int_{\delta_j} tdt \geqq \int_{(j-1)\varDelta}^{(j-1)\varDelta+\bar{\lambda}} tdt > (j-1)\varDelta\bar{\lambda} ;$$

also folgt nach (3.20)

$$\sum_{j=1}^{m} \int_{\delta_j} tdt > \varDelta\bar{\lambda} \frac{m(m-1)}{2} > \frac{\bar{\lambda}\varDelta}{2} \left(\frac{x_v - X}{\varDelta} - 1\right)\left(\frac{x_v - X}{\varDelta} - 2\right)$$

$$= x_v^2 \left(\frac{\bar{\lambda}}{2\varDelta} + o(1)\right) .$$

Zusammenfassend folgt also aus der Ungleichung (3.21)

$$\frac{1}{x_v^2} \int_I \{dk_2(t) + tdk(t)\} > \frac{\bar{\lambda}}{\varDelta} + o(1) ,$$

und da dies der Gleichung (3.17) widerspricht, muss die Anthithese $\lambda > 0$ falsch sein, womit der Primzahlsatz bewiesen ist.

3 §. Über andere Äquivalenten des Primzahlsatzes

4.1. **Äquivalenzsätze.** Als Vorbereitung der später vorgelegten parallelen Beweise des Primzahlsatzes zeigen wir im folgenden, dass die Gleichungen

$$\varrho(x) = \psi(x) - x = o(x) , \tag{4.1}$$

$$\varepsilon(x) = o(1) , \tag{4.2}$$

$$M(x) = \sum_{n \leqq x} \mu(n) = o(x) , \tag{4.3}$$

$$(4.4) \qquad B(x) = \int_{1-}^{x+} \frac{dM(t)}{t} = \sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n)}{n} = o(1)$$

untereinander, und somit auch mit dem Primzahlsatz gleichbedeutend sind. Es wird sich zeigen, dass diese Gleichungen in zwei »Zyklen»

$$\begin{tikzcd} & (4.1) \arrow[dr] & \\ (4.3) \arrow[ur] & & (4.4) \arrow[ll] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & (4.1) \arrow[dr] & \\ (4.2) \arrow[ur] & & (4.4) \arrow[ll] \end{tikzcd}$$

so angeordnet werden können, dass die erwähnten Gleichungen in beiden Fällen logische Folgen von einander in angegebener Ordnung sind.

In Nr. 3.1. haben wir schon gezeigt, dass (4.1) aus (4.2) folgt. In entsprechender Weise ergibt sich, dass (4.3) eine Folge von (4.4) ist. Es erübrigt sich also zu beweisen dass

(A) aus der Gleichung $\varrho(x) = o(x)$ die Gleichung $B(x) = o(1)$,

(B) —»— $B(x) = o(1)$ —»— $\varepsilon(x) = o(1)$,

(C) —»— $M(x) = o(x)$ —»— $\varrho(x) = o(x)$

folgt.

4.2. **Hilfssätze.** Wir gehen von der wohlbekannten asymptotischen Formel (z.B. [15, s. 26])

$$(4.5) \qquad D(x) = \sum_{n \leqq x} d(n) = x \log x + (2\,C - 1)\,x + O(\sqrt{x})$$

aus; $d(n)$ bedeutet hier, wie üblich, die Anzahl der positiven Faktoren der Zahl n. Ein Vergleich mit der Entwicklung

$$(1.10) \qquad T(x) = \sum_{n \leqq x} \log n = x \log x - x + O(\log x)$$

führt zu dem Ergebnis: Definieren wir die zahlentheoretische Funktion $r(n)$ durch den Ausdruck

$$r(n) = d(n) - \log n - 2\,C\,,$$

so erhalten wir für die entsprechende Summenfunktion $R(x)$ die Abschätzung

$$(4.6) \qquad R(x) = \sum_{n \leqq x} r(n) = D(x) - T(x) - 2\,C[x] = O(\sqrt{x})\,.$$

Wir bezeichnen ferner

$$L(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{4.7}$$

$$\varDelta(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{d(n)}{n} = \int_{1-}^{x+} \frac{dD(t)}{t}\,, \tag{4.8}$$

woraus sich wegen (4.6) die Gleichung

$$\begin{aligned} \varDelta(x) &= \int_{1-}^{x+} \frac{dT(t)}{t} + 2\,C \int_{1-}^{x+} \frac{d[t]}{t} + \int_{1-}^{x+} \frac{dR(t)}{t} \\ &= \int_{1-}^{x+} \frac{dT(t)}{t} + 2\,CL(x) + \lambda + \bar{R}(x) \end{aligned} \tag{4.9}$$

ergibt; hier ist λ eine bestimmte Konstante und $\bar{R}(x)$ eine nur bei ganzen Zahlen seinen Wert ändernde Sprungfunktion der Ordnung $O(x^{-\frac{1}{2}})$.

Für die Funktionen D und $\varDelta$ gelten noch folgende Gleichungen:

$$D(x) = \sum_{n \leqq x} \sum_{d \mid n} \cdot 1 = \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x}{n}\right] = \int_{1-}^{x+} \left[\frac{x}{t}\right] d[t]\,,$$

$$\varDelta(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} \sum_{d \mid n} \cdot 1 = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} \sum_{m \leqq \frac{x}{n}} \frac{1}{m} = \int_{1-}^{x+} L\left(\frac{x}{t}\right) dL(t)\,,$$

somit wegen der Möbius'schen bzw. allgemeinen Umkehrformel

$$\int_{1-}^{x+} D\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) = [x]\,, \tag{4.10}$$

$$\int_{1-}^{x+} \varDelta\left(\frac{x}{t}\right) dB(t) = L(x)\,. \tag{4.11}$$

Wir brauchen noch für die Funktionen M und B asymptotische Formeln, die der Gleichung (2.8) parallel sind. Dazu beachten wir die Gleichungen

$$\int_{1-}^{x+} M\left(\frac{x}{t}\right) d[t] = \int_{1-}^{x+} B\left(\frac{x}{t}\right) \frac{d[t]}{t} = 1\,, \tag{4.12}$$

die entweder unmittelbar durch die Grundeigenschaft (1.1) der Funktion μ oder mittels der Umkehrsätze bewiesen werden können. Da andererseits

$$x\int_{1-}^{x+}\frac{dM(t)}{t} = \int_{1}^{x} M\left(\frac{x}{t}\right) dt + O(x) = \int_{1-}^{x+} M\left(\frac{x}{t}\right) d[t] + O(x)\,,$$

so folgt aus der ersten Gleichung (4.12)

$$B(x) = \int_{1-}^{x+}\frac{dM(t)}{t} = O(1) \tag{4.13}$$

und wegen dieser Gleichung und der zweiten Gleichung (4.12)

$$\int_{1}^{x} B\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t} = \int_{1}^{x}\frac{B(t)}{t}\,dt = O(1)\,. \tag{4.14}$$

4.3. **Beweis des Äquivalenzsatzes** (A). Wir nehmen an, es sei die Gleichung $\varrho(x) = o(x)$ in Kraft und beweisen die Gleichung $B(x) = o(1)$. Dazu gehen wir von der Gleichung (4.14) aus, die wir

$$\int_{1}^{x} B(t)\, d\log t = B(x)\log x - \int_{1-}^{x+}\log t\, dB(t) = O(1)$$

schreiben. Daraus geht hervor, dass die Behauptung mit der Gleichung

$$\int_{1-}^{x+}\log t\, dB(t) = o(\log x)$$

gleichbedeutend ist (die also auch mit dem Primzahlsatz äquivalent ist[1]). Um diese Gleichung zu beweisen, gehen wir von der Gleichung (1.7′)

$$\Lambda(n) = -\sum_{d\mid n}\mu(d)\log d$$

aus, woraus nach dem Möbius'schen Umkehrsatz die Gleichung

$$\mu(n)\log n = -\sum_{d\mid n}\Lambda(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

folgt; somit

[1]) Vgl. z.B. [9], [21].

$$(4.15)\qquad \int\limits_{1-}^{x+} \log t \, dB(t) = \sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n)\log n}{n} = -\sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda(m)}{m} \sum_{n \leqq \frac{x}{m}} \frac{\mu(n)}{n}$$

$$= -\int\limits_{1-}^{x+} B\left(\frac{x}{t}\right) \frac{d\psi(t)}{t} = -\int\limits_{1}^{x} B\left(\frac{x}{t}\right) \frac{dt}{t} - \int\limits_{1}^{x} B\left(\frac{x}{t}\right) \frac{\varrho(t)}{t} \frac{dt}{t} - \int\limits_{1-}^{x+} B\left(\frac{x}{t}\right) d\left(\frac{\varrho(t)}{t}\right),$$

wie aus der Ausrechnung des letzten Integrales hervorgeht. Wegen (4.14) ist das erste Integral $O(1)$; aus dem zweiten ersehen wir gemäss der Annahme und der Gleichung (4.13) leicht, dass es $o(\log x)$ ist. Um das dritte abzuschätzen, wählen wir für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ die Zahl x_ε, so dass $|\varrho(x)| < \varepsilon x$ für $x > x_\varepsilon$ ist und haben dann

$$-\int\limits_{1-}^{x+} B\left(\frac{x}{t}\right) d\left(\frac{\varrho(t)}{t}\right) = \int\limits_{1-}^{x+} \frac{\varrho(t)}{t} dB\left(\frac{x}{t}\right) + O(1) = o\left(\int\limits_{1-}^{\frac{x}{x_\varepsilon}+} |dB(t)|\right) + O\left(\int\limits_{\frac{x}{x_\varepsilon}-}^{x+} |dB(t)|\right)$$

und aus der Abschätzung $|dB(t)| \leqq \dfrac{d[t]}{t}$ folgt leicht, dass die beiden Integrale rechts $o(\log x)$ sind. Somit ist die linke Seite der Gleichung (4.15) $o(\log x)$, was die Behauptung beweist.

Es sei noch bemerkt dass, falls die später erwähnte Selberg'sche asymptotische Gleichung (4.19) für die Funktion B als bekannt vorausgesetzt wird, dieser Beweis kürzer durchgeführt werden kann. Umgekehrt können wir die Gleichung (4.19) mittels der Methode dieses, von Landau ([8]) stammenden Beweises, auch ohne den Hilfssatz von Tatuzawa und Iseki beweisen.

4.4. **Beweis des Äquivalenzsatzes** (B). Wir nehmen an, es sei $B(x) = o(1)$ und beweisen die Gleichung $\varepsilon(x) = o(1)$ [1]). Hierzu bringen wir die Funktion $h(x)$ in die Form

$$h(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{\Lambda(n)}{n} = \sum_{r \leqq x} \frac{1}{r} \sum_{mn = r} \mu(n) \log m = \sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n)}{n} \sum_{m \leqq \frac{x}{n}} \frac{\log m}{m}$$

$$= \int\limits_{1-}^{x+} dB(t) \int\limits_{1-}^{\frac{x}{t}+} \frac{dT(u)}{u}$$

und formen das innere Integral gemäss (4.9) folgendermassen um:

$$\int\limits_{1-}^{\frac{x}{t}+} \frac{dT(u)}{u} = \Delta\left(\frac{x}{t}\right) - 2\,CL\left(\frac{x}{t}\right) - \lambda - \bar{R}\left(\frac{x}{t}\right).$$

[1]) Vgl. [12, ss. 147–8].

Wegen der Gleichung (4.11) und der Gleichung (4.12), wobei nur eine Änderung der Summationsanordnung nötig ist, folgt dann

$$(4.16) \qquad h(x) = \log x - C - \lambda B(x) - \int_{1-}^{x+} \bar{R}\left(\frac{x}{t}\right) dB(t) + o(1) ,$$

wie aus dem asymptotischen Ausdruck von $L(x)$ hervorgeht. Wegen der Annahme folgt die Behauptung aus dieser Gleichung, wenn wir zeigen können, dass das Integralglied $o(1)$ ist. Um dies zu erreichen, wählen wir aus dem Intervalle $(0,1)$ die Zahl δ und bezeichnen

$$\int_{1-}^{x+} \bar{R}\left(\frac{x}{t}\right) dB(t) = \int_{1-}^{\delta x+} \bar{R}\left(\frac{x}{t}\right) dB(t) + \int_{\delta x+}^{x+} \bar{R}\left(\frac{x}{t}\right) dB(t) = r_1 + r_2 .$$

Wegen $\bar{R}(x) = O(x^{-\frac{1}{2}})$ erhalten wir für das Integral r_1 die Abschätzung

$$r_1 = O\left(\int_{1-}^{\delta x+} \left(\frac{t}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{d[t]}{t}\right) \leqq O\left(\int_{0}^{\delta} \frac{dt}{t^{\frac{1}{2}}}\right) = \varepsilon(\delta) ,$$

wobei $\varepsilon(\delta)$ mit δ verschwindet.

Um das Integral r_2 abzuschätzen, stellen wir wegen der Überlegungen über die Funktion $\bar{R}(x)$ fest, dass die Funktion $\bar{R}\left(\frac{1}{t}\right)$ im Intervalle $(\delta, 1)$ eine Sprungfunktion mit einer endlichen Anzahl Sprungstellen t_i ist. Bezeichnen wir die entsprechenden Sprünge der Funktion mit $\varkappa_i$, so folgt

$$r_2 = \int_{\delta+}^{1+} \bar{R}\left(\frac{1}{t}\right) dB(tx) = \bar{R}(1)\, B(x) - \bar{R}\left(\frac{1}{\delta}\right) B(\delta x) - \sum_i \varkappa_i B(t_i x) ,$$

welcher Ausdruck für jedes δ mit wachsendem x gegen Null strebt. Also können wir, nachdem wir durch passende Wahl von δ das r_1 beliebig klein gemacht haben, dasselbe mit festem δ durch genügend grosses x auch für r_2 erreichen. Somit ist das Integralglied in der Gleichung (4.16) $o(1)$, woraus die Behauptung folgt.

4.5. **Beweis des Äquivalenzsatzes** (C). Wir nehmen schliesslich an, es bestehe die Gleichung $M(x) = o(x)$ und beweisen dadurch die Gleichung $\varrho(x) = o(x)$. Dazu gebrauchen wir die Umkehrformeln (1.8) und (4.10) und erhalten dann für die Funktion $\varrho(x)$ gemäss (4.6) und (4.12) den Ausdruck

$$\varrho(x) = \psi(x) - [x] + O(1) = \int_{1-}^{x+} \left(T\left(\frac{x}{t}\right) - D\left(\frac{x}{t}\right)\right) dM(t) + O(1)$$

$$= - \int_{1-}^{x+} R\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) - 2C \int_{1-}^{x+} \left[\frac{x}{t}\right] dM(t) + O(1) = - \int_{1-}^{x+} R\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) + O(1),$$

wobei in (4.12) die Summenanordnung umzukehren ist. Daher ergibt sich, dass die Behauptung mit der Gleichung

$$\int_{1-}^{x+} R\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) = o(x) \tag{4.17}$$

gleichbedeutend ist. Um diese Gleichung zu beweisen, verfahren wir analog dem früheren Beweis und schreiben

$$\int_{1-}^{x+} R\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) = \int_{1-}^{\delta x+} R\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) + \int_{\delta x+}^{x+} R\left(\frac{x}{t}\right) dM(t) = S_1 + S_2 \ (0 < \delta < 1).$$

Für das erste Glied besteht die Abschätzung

$$|S_1| \leqq \int_0^{\delta x} \left| R\left(\frac{x}{t}\right)\right| dt = O\left(\int_0^{\delta x} \sqrt{\frac{x}{t}}\, dt\right) = \varepsilon(\delta)\, x\,,$$

wobei $\varepsilon(\delta)$ mit δ verschwindet.

Das Glied S_2 schreiben wir

$$S_2 = R(1)\, M(x) - R(\delta)\, M(\delta x) - \int_{\delta x+}^{x+} M(t)\, dR\left(\frac{x}{t}\right),$$

woraus zu sehen ist, dass die zwei ersten Glieder $o(x)$ bei festem δ sind. Dasselbe gilt auch für das dritte Glied; denn wir können die Zahl x so gross annehmen, dass $|M(t)| < \varepsilon t$ mit beliebig kleinem ε in $\delta x \leqq t \leqq x$ gilt; daher ist

$$\int_{\delta x+}^{x+} |M(t)| \left| dR\left(\frac{x}{t}\right)\right| < \varepsilon \int_{\delta x+}^{x+} t \left| dR\left(\frac{x}{t}\right)\right| = \varepsilon x \int_{1-}^{\frac{1}{\delta}} \frac{|dR(t)|}{t} = \varepsilon\, K_\delta x\,,$$

mit einer von δ abhängenden Konstante K_δ. Also können wir, analog mit dem früheren Beweise, durch passende Wahl von δ und x die beiden

Zahlen $\frac{|S_1|}{x}$ und $\frac{|S_2|}{x}$ beliebig klein machen, woraus folgt dass die linke Seite der Gleichung (4.17), somit auch die Funktion $\varrho(x)$ von der Grössenordnung $o(x)$ ist w.z.b.w.

4.6. **Die Parallelen zu der Selberg'schen asymptotischen Gleichung und Ungleichung.** Wir zeigen kurz, wie der Primzahlsatz mittels der Gleichungen (4.3) und (4.4) durch genaues Befolgen der Methode des ersten Kapitels bewiesen werden kann. Dazu wenden wir den Hilfssatz von Tatuzawa und Iseki (Nr. 2.1.) auf die Funktionen $f_1(x) = M(x)$ und $f_2(x) = xB(x)$ an, wobei wir wegen (4.12) unmittelbar $g_1(x) = \log x$ und $g_2(x) = x \log x = [x] \log x + O(\log x)$ erhalten. Gemäss den Betrachtungen im ersten Kapitel ist dann in beiden Fällen die linke Seite der Gleichung (2.1) von der Grössenordnung $O(x)$, und man erhält so

$$(4.18) \qquad M(x) \log x + \int_{1-}^{x+} M\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t) = O(x) ,$$

$$(4.19) \qquad B(x) \log x + \int_{1-}^{x+} B\left(\frac{x}{t}\right) dh(t) = O(1) ,$$

welche der Selberg'schen asymptotischen Gleichung und der Gleichung (3.4) für die Funktion ε entsprechen[1]).

Zur Fortsetzung der Beweise eliminieren wir die Differentiale $d\psi$ bzw. dh mit derselben Methode wie im ersten Kapitel. Die Analogie ist fast vollständig; der einzige Unterschied tritt bei der Abschätzung der dem Differential $d\varrho(t)$ entsprechenden Differentiale auf, die jedoch leicht mittels der Ungleichungen $|dM(t)| \leqq d[t]$, $|dB(t)| \leqq \frac{d[t]}{t}$ durchgeführt werden kann. So erhalten wir die Parallelen zu der Selberg'schen Ungleichung

$$|M(x)| \log^2 x \leqq 2 \int_0^x \left| M\left(\frac{x}{t}\right) \right| \log t \, dt + O(x \log x) ,$$

$$|B(x)| \log^2 x \leqq 2 \int_1^x \left| B\left(\frac{x}{t}\right) \right| \frac{\log t \, dt}{t} + O(\log x) ,$$

[1]) Die Gleichungen (4.18) und (4.19) können auch leicht unmittelbar hergeleitet werden ([14], [12 S. 166]). Vgl. auch den Äquivalenzbeweis in Nr. 4.3.

woraus wir durch Übergehen zu den Logarithmen der Veränderlichen x und t ein formell mit der Selberg'schen Ungleichung (2.14) identisches Resultat erhalten; die Funktion r hat hier die Werte

$$r(x) = e^{-x} M(e^x) \; ; \; r(x) = B(e^x) \; , \tag{4.20}$$

und dazu folgt aus den Gleichungen (4.13) und (4.14), dass auch die Gleichung (2.15) in beiden Fällen eine formell identische Parallele besitzt. Der Primzahlsatz besagt auch über die Funktionen (4.20) dass $r(x) = o(1)$ ist.

4.7. **Beweise des Primzahlsatzes.** Bezeichnen wir wieder

$$\lambda = \limsup |r(x)| \; ,$$

stellen die Antithese $\lambda > 0$ auf und behalten die Bedeutungen von λ', Δ_i, $\overline{\Delta}_i$ bei, so können wir den im ersten Kapitel vorgelegten Beweis Schritt für Schritt in beiden Fällen wiedergeben. Eine neue Betrachtung verlangt nur die Herleitung der (2.19) und (2.19′) entsprechenden Ungleichungen. Diese können jedoch ziemlich einfach hergeleitet werden, denn wir haben für die beiden Funktionen mit der Bezeichnungen der Abb. 1 b

$$|r(x)| = |r(x) - r(x_i)| \leqq e^{-x_i} ([e^x] - [e^{x_i}]) = e^{x - x_i} - 1 + o(1) \; ,$$

wenn $x > x_i$ und $r(x_i) = 0$. Also ergeben sich die Ungleichungen (2.19) und (2.19′) in prinzipiell denselben Fassungen wie früher. Zum Schluss erhält man auch hier den Widerspruch $\lambda < \lambda$, womit die parallelen Beweise des Primzahlsatzes durchgeführt sind.

III. DER PRIMZAHLSATZ FÜR ARITHMETISCHE PROGRESSIONEN

§ 5. Vorbereitende Betrachtungen

5.1. **Einiges über die Charaktere.** Es sei im folgenden die Zahl k ein fester Modul. Wir betrachten die *Charaktere* χ modulo k, dh. die Abbildungen $\chi(n)$ der ganzen Zahlen in das komplexe Zahlengebiet, mit folgenden Eigenschaften:

1) $\chi(m)\,\chi(n) = \chi(mn)$ für jedes ganze m und n.
2) $\chi(m) = \chi(n)$, falls $m \equiv n(k)$
3) $\chi(n)$ ist $\neq 0$ oder $= 0$ je nachdem die Zahl n und der Modul k teilerfremd sind oder nicht.

Bezeichnen wir wie üblich mit $\varphi(n)$ die Euler'sche Funktion, dh. die Anzahl der zu n teilerfremden ganzen Zahlen im Intervall $0 < \nu < n$, so haben wir als Folgerungen aus diesen Grundeigenschaften (z.B. [7, ss. 197—200]):

4) Jeder Charakter $\neq 0$ ist eine Einheitswurzel der Ordnung $\varphi(k)$, insbesondere also $|\chi(n)| \leqq 1$ für jedes χ und n.

5) Die Anzahl der Charaktere modulo k ist $= \varphi(k)$; unter ihnen befindet sich einer, der sog. *Hauptcharakter* χ_0, der identisch $= 1$ ist für jedes zu k teilerfremde n; alle anderen sind *Nichthauptcharaktere*.

6) Die Gleichung $\chi(n) = 1$ gilt für alle Charaktere dann und nur dann wenn $n \equiv 1(k)$ ist.

7) Es bestehen folgende Summierungssätze:

a) Es ist die bei festem Charakter χ über die Zahlen $1 \leqq n \leqq k$ erstreckte Summe

$$\sum_{n=1}^{k} \chi(n) = \varphi(k) \quad \text{oder} = 0 \tag{5.1}$$

je nachdem χ ein Haupt- oder Nichthauptcharakter ist; die Summe links kann über ein beliebiges Restsystem modulo k erstreckt werden.

b) Es ist bei festem n die über alle Charaktere erstreckte Summe

$$\sum_{\chi} \chi(n) = \varphi(k) \quad \text{oder} = 0 \tag{5.2}$$

je nachdem $n \equiv 1(k)$ ist oder nicht.

Im folgenden werden wir oft Summen von der Form

$$\sum_{n \leqq x}^{n \equiv l(k)} f(n)$$

begegnen; hier ist f eine zahlentheoretische Funktion und die Summe ist über die Zahlen $n \leqq x$ für denen $n \equiv l(k)$ gilt, zu erstrecken. Es ist oft zweckmässig, diese Summe durch eine andere zu ersetzen, wo sie über *alle* ganzen Zahlen $n \leqq x$ erstreckt ist, was durch die Anwendung der Charaktere stattfinden kann. Ist nämlich $(l, k) = 1$ und l' diejenige modulo k eindeutige ganze Zahl, die der Kongruenz $ll' \equiv 1(k)$ genügt, so folgt aus (5.2)

$$\frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \chi(nl') = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \chi(n)\, \chi(l') = 1 \quad \text{oder} = 0$$

je nachdem $n \equiv l(k)$ ist oder nicht. Daher haben wir die Rekursionsformel

$$\sum_{n \leqq x}^{n \equiv l(k)} f(n) = \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{\chi} \chi(l') \sum_{n \leqq x} \chi(n)\, f(n)\,. \tag{5.3}$$

5.2. **Umkehrsatz. Die Funktionen** $K(x, \chi)$ **und** $M(x, \chi)$. Wählt man im allgemeinen Umkehrsatz in § 1. $\alpha(n) = \chi(n)$, so erhält man

$$
(5.4) \qquad \begin{cases} f(x) = \sum\limits_{n \leqq x} \chi(n)\, f\left(\dfrac{x}{n}\right) = \displaystyle\int_{1-}^{x+} f\left(\dfrac{x}{t}\right) dK(t\,,\chi)\,, \\ g(x) = \sum\limits_{n \leqq x} \mu(n)\, \chi(n)\, g\left(\dfrac{x}{n}\right) = \displaystyle\int_{1-}^{x+} g\left(\dfrac{x}{t}\right) dM(t\,,\chi)\,, \end{cases}
$$

wo

$$
(5.4') \qquad K(x\,,\chi) = \sum_{n \leqq x} \chi(n)\,,\ M(x\,,\chi) = \sum_{n \leqq x} \mu(n)\, \chi(n)^{1)}\,.
$$

Für die Funktion $K(x, \chi)$ erhalten wir eine asymptotische Gleichung, in dem wir die Gleichung über Division mit Rest auf die Zahlen x und k anwenden und die Gleichung (5.1) berücksichtigen. Daraus ergibt sich

$$
(5.5) \qquad K(x\,,\chi) = \varepsilon_\chi \frac{\varphi(k)}{k}\, x + R(x\,,\chi)\,,
$$

wo $R(x, \chi) = O(1)$ und $\varepsilon_\chi = 1$ oder $= 0$ je nachdem χ ein Haupt- oder Nichthauptcharakter ist. Im letzten Fall sehen wir ferner leicht, dass $|K(x, \chi)| = |R(x, \chi)| \leqq \dfrac{\varphi(k)}{2}$ ist.

Die Formeln (5.4) und (5.5) spielen im folgenden dieselbe Rolle wie die Möbius'schen Umkehrformeln und die Gleichung $x = [x] + O(1)$ im ersten Kapitel.

5.3. **Die Funktionen** $\psi(k, l; x)$, $\psi(x, \chi)$, $T(k, l; x)$ **und** $T(x, \chi)$. Im folgenden bedeutet k nach wie vor einen festen Modul und l eine zu k teilerfremde ganze Zahl; die Funktion Λ bedeutet die in der Einleitung definierte Mangoldt'sche Funktion.

Analog mit den Definitionen der Funktionen $\psi(x)$ und $T(x)$ setzen wir

$$
\psi(k\,,l\,;x) = \sum_{n \leqq x}^{n \equiv l(k)} \Lambda(n)\,;\ T(k\,,l\,;x) = \sum_{n \leqq x}^{n \equiv k(l)} \log n\,.
$$

Dann folgt aus (5.3)

$$
(5.6) \qquad \begin{cases} \psi(k\,,l\,;x) = \dfrac{1}{\varphi(k)} \sum\limits_{\chi} \chi(l')\, \psi(x\,,\chi)\,, \\ T(k\,,l\,;x) = \dfrac{1}{\varphi(k)} \sum\limits_{\chi} \chi(l')\, T(x\,,\chi)\,, \end{cases}
$$

mit den Bezeichnungen

1) Ausnahmsweise haben wir in diesen Formeln auch komplexe Integrale benutzt; doch haben diese die Beschaffenheit eines reellen Integrales.

$$\text{(5.7)} \qquad \begin{cases} \psi(x\,,\,\chi) = \sum\limits_{n \leqq x} \chi(n)\,\Lambda(n)\,, \\ T(x\,,\,\chi) = \sum\limits_{n \leqq x} \chi(n)\,\log n = \int\limits_{1-}^{x+} \log t\, dK(t\,,\,\chi)\,. \end{cases}$$

Für die Funktion $T(x, \chi)$ haben wir nach der Gleichung (5.5) die asymptotische Entwicklung

$$\text{(5.8)} \qquad T(x\,,\,\chi) = \varepsilon_\chi \frac{\varphi(k)}{k}\,(x \log x - x) + O(\log x)\,,$$

was, analog zu (1.10′), auch in der Form

$$\text{(5.8′)} \qquad T(x\,,\,\chi) = \varepsilon_\chi x \left\{ \int\limits_{1-}^{x+} \frac{dK(t\,,\,\chi)}{t} - C(k) - \frac{\varphi(k)}{k} \right\} + O(\log x)$$

geschrieben werden kann; die Konstante $C(k)$ ist die der Euler'schen Konstante analoge Zahl

$$C(k) = \lim_{x \to \infty} \left(\int\limits_{1-}^{x+} \frac{dK(t\,,\,\chi_0)}{t} - \frac{\varphi(k)}{k} \log x \right) = \int\limits_{1-}^{\infty} \frac{dR(t\,,\,\chi_0)}{t}\,,$$

wobei das Integral wegen $R(x, \chi_0) = O(1)$ offensichtlich konvergiert.

Um mit den Umkehrformeln (1.8) und (1.9) analoge Formeln herzuleiten, setzen wir den Ausdruck (1.7) der Funktion $\Lambda(n)$ in die erste Gleichung (5.7) ein, wobei wir die Formeln

$$\text{(5.9)} \qquad \psi(x\,,\,\chi) = \int\limits_{1-}^{x+} T\left(\frac{x}{t}\,,\,\chi\right) dM(t\,,\,\chi) = \int\limits_{1-}^{x+} M\left(\frac{x}{t}\,,\,\chi\right) dT(t\,,\,\chi)$$

erhalten; durch Umkehrung ergibt sich hieraus

$$\text{(5.10)} \qquad T(x\,,\,\chi) = \int\limits_{1-}^{x+} \psi\left(\frac{x}{t}\,,\,\chi\right) dK(t\,,\,\chi) = \int\limits_{1-}^{x+} K\left(\frac{x}{t}\,,\,\chi\right) d\psi(t\,,\,\chi)\,.$$

Aus der Tschebyscheff'schen Gleichung $\psi(x) = O(x)$ folgt unmittelbar, dass die Funktion $\psi(k, l; x)$ wie auch die Funktionen $\psi(x, \chi)$ für alle Charaktere die Grössenordnung $O(x)$ besitzen. Daraus erhalten wir ferner eine analoge Formel zur Gleichung (2.7) in dem Falle, wo $\chi = \chi_0$ ein *Hauptcharakter* ist. In der Tat haben wir nach (5.10) und (5.5)

$$T(x\,,\chi_0)=\frac{\varphi(k)}{k}\,x\int\limits_{1-}^{x+}\frac{d\psi(t\,,\chi_0)}{t}+\int\limits_{1-}^{x+}R\left(\frac{x}{t}\,,\chi_0\right)d\psi(t\,,\chi_0)$$

$$=\frac{\varphi(k)}{k}\,x\int\limits_{1-}^{x+}\frac{d\psi(t\,,\chi_0)}{t}+O(x)\,,$$

und ein Vergleich mit der Gleichung (5.8) liefert uns das gesuchte Ergebnis

$$\int\limits_{1-}^{x+}\frac{d\psi(t\,,\chi_0)}{t}=\log x+O(1)\,. \tag{5.11}$$

Ist aber χ ein *Nichthaupt*charakter, so kommen wir auf Überlegungen, die tiefer als die anderen in dieser Arbeit liegen. Um eine störende Unterbrechung des Gedankens unseres Beweises zu vermeiden, werden wir den erwähnten Beweis später vorlegen. Es wird sich zeigen, dass

$$\int\limits_{1-}^{x+}\frac{d\psi(t\,,\chi)}{t}=O(1)$$

ist und also für alle Charaktere χ

$$\int\limits_{1-}^{x+}\frac{d\psi(t\,,\chi)}{t}=\varepsilon_\chi\log x+O(1)\,, \tag{5.11'}$$

woraus wir mittels der ersten Formel (5.6) die für alle zu k teilerfremden Zahlen l gültige *Dirichlet'sche Formel*[1])

$$\int\limits_{1-}^{x+}\frac{d\psi(k\,,l\,;t)}{t}=\frac{1}{\varphi(k)}\log x+O(1) \tag{5.12}$$

erhalten.

§ 6. Beweis des Primzahlsatzes für arithmetische Progressionen

6.1. **Die asymptotische Gleichung von Selberg.** Wir beginnen mit einem Hilfssatz, der dem im ersten Kapitel vorgelegten Satz von Tatuzawa und Iseki analog ist.

Es sei χ *ein beliebiger Charakter,* $f(x)$ *eine für Werte* $x\geqq 0$ *definierte Funktion und*

[1]) Zwar steht hier die Funktion $\psi(k,l;x)$ statt der üblichen $\vartheta(k,l;x)$, was aber unwesentlich ist; denn die beiden Formeln sind äquivalent (z.B. [22 ss. 58—59]).

$$(6.1)\qquad g(x\,,\chi) = \log x \sum_{n \leqq x} f\left(\frac{x}{n}\right) \chi(n) = \log x \int_{1-}^{x+} f\left(\frac{x}{t}\right) dK(t\,,\chi)\,.$$

Dann ist

$$(6.2')\qquad \int_{1-}^{x+} g\left(\frac{x}{t}\,,\chi\right) dM(t\,,\chi) = f(x)\log x + \int_{1-}^{x+} f\left(\frac{x}{t}\right) d\psi(t\,,\chi)\,.$$

Den Satz beweist man genau so wie im ersten Kapitel, wobei nur die Grundeigenschaft 1) (Nr. 5.1.) der Charaktere und die Gleichung $\chi(1) = 1$ zu berücksichtigen ist.

Ist nun χ ein beliebiger Charakter, so setzen wir

$$f(x) = \psi(x\,,\chi) - \varepsilon_\chi x\,.$$

Nach der Umkehrformel (5.10) und der asymptotischen Formel (5.8′) haben wir dann

$$g(x\,,\chi) = -\,\varepsilon_\chi\left[C(k) + \frac{\varphi(k)}{k}\right] x\log x + O(\log^2 x)\,,$$

somit wegen $x = \dfrac{k}{\varphi(k)}\,K(x\,,\chi_0) + O(1)$

$$g(x\,,\chi) = \varepsilon_\chi \varkappa \log x \int_{1-}^{x+} dK(t\,,\chi_0) + O(\log^2 x)$$

mit einer geeigneten Konstante $\varkappa$. Also folgt nach dem Hilfssatz und der Abschätzung (2.2)

$$\int_{1-}^{x+} g\left(\frac{x}{t}\,,\chi\right) dM(t\,,\chi_0) = \varepsilon_\chi\varkappa\log x + \varepsilon_\chi\varkappa\psi(x\,,\chi_0) + O\left(\sum_{n\leqq x}\log^2\frac{x}{n}\right) = O(x)$$

und aus der Gleichung (6.2) ergibt sich wegen (5.11′)

$$(6.3)\qquad \psi(x\,,\chi)\log x + \int_{1-}^{x+} \psi\left(\frac{x}{t}\,,\chi\right) d\psi(t\,,\chi) = 2\,\varepsilon_\chi x\log x + O(x)$$

für alle Charaktere.

Wir bezeichnen wieder mit l' die Lösung der Kongruenz $ll' \equiv 1(k)$ und multiplizieren die Gleichung (6.3) mit $\chi(l')$. Lassen wir dann χ alle Charaktere durchlaufen, so ergibt sich wegen (5.6) durch Summierung der erhaltenen Gleichungen

$$\psi(k\,,l\,;x)\log x + \frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\chi(l')\int_{1-}^{x+}\psi\left(\frac{x}{t}\,,\chi\right)d\psi(t\,,\chi) = \frac{2\,x\log x}{\varphi(k)} + O(x)\,.$$

Den Summenausdruck links formen wir folgendermassen um:

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\chi(l')\int_{1-}^{x+}\psi\left(\frac{x}{t}\,,\chi\right)d\psi(t\,,\chi) = \frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi}\chi(l')\sum_{n\leqq x}\chi(n)\sum_{d\mid n}\Lambda(d)\,\Lambda\left(\frac{n}{d}\right)$$

$$= \sum_{n\leqq x}^{n\equiv l(k)}\sum_{d\mid n}\Lambda(d)\,\Lambda\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{dd'\leqq x}^{dd'\equiv l(k)}\Lambda(d)\,\Lambda(d') = \sum_{d\leqq x}\Lambda(d)\sum_{d'\leqq\frac{x}{d}}^{dd'\equiv l(k)}\Lambda(d')\,.$$

Die Kongruenzbedingung $dd' \equiv l(k)$ mit festem zu k teilerfremdem l kann offensichtlich durch die Kongruenzen $d \equiv \nu(k)$, $d' \equiv \nu'(k)$, $\nu\nu' \equiv l(k)$ und die Bedingungen $(\nu, k) = 1$ und $0 < \nu \leqq k$ ersetzt werden; daher ist

$$\sum_{d\leqq x}\Lambda(d)\sum_{d'\leqq\frac{x}{d}}^{dd'\equiv l(k)}\Lambda(d') = \sum_{0<\nu\leqq k}^{(\nu\,,k)=1}\;\sum_{d\leqq x}^{d\equiv\nu(k)}\Lambda(d)\sum_{d'\leqq\frac{x}{d}}^{d'\equiv\nu'(k)}\Lambda(d')$$

$$= \sum_{(\nu\,,k)=1}\int_{1-}^{x+}\psi\left(k\,,\nu';\frac{x}{t}\right)d\psi(k,\nu\,;t)\,,$$

wo $\nu\nu' \equiv l(k)$. Bezeichnen wir ferner

$$\varrho(k\,,l\,;x) = \psi(k\,,l\,;x) - \frac{x}{\varphi(k)}\,, \tag{6.4}$$

und wenden die Dirichlet'sche Formel (5.12) an, so erhalten wir für die *asymptotische Gleichung von Selberg* folgende alternative Formen:

$$\psi(k\,,l\,;x)\log x + \sum_{(\nu\,,k)=1}\int_{1-}^{x+}\psi\left(k\,,\nu'\,;\frac{x}{t}\right)d\psi(k\,,\nu\,;t) = \frac{2\,x\log x}{\varphi(k)} + O(x)\,, \tag{6.5}$$

$$\varrho(k\,,l\,;x)\log x + \sum_{(\nu\,,k)=1}\int_{1-}^{x+}\varrho\left(k\,,\nu'\,;\frac{x}{t}\right)d\psi(k\,,\nu\,;t) = O(x)\,, \tag{6.5'}$$

mit der Bedingung $\nu\nu' \equiv l(k)$. Wie aus der Gleichung III' in der Einleitung hervorgeht, ist der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen bewiesen, wenn wir die Gültigkeit der Gleichung $\varrho(k, l; x) = o(x)$ für jedes zu k teilerfremde l erweisen; wegen $\psi(k, l, x) = O(x)$ ist jedenfalls $\varrho(k, l; x) = O(x)$. Ferner folgt aus (5.12), dass für jedes zu k teilerfremde l die Gleichung

$$\int_1^x \frac{\varrho(k, l; t)}{t^2}\, dt = O(1) \tag{6.6}$$

besteht.

6.2. **Die Ungleichung von Selberg.** Wir folgen ständig der Methode des ersten Kapitels und leiten eine Parallele zu der Selberg'schen Ungleichung (2.14) ab. Dazu bezeichnen wir

$$\omega(k, l; x) = \sum_{\nu\nu' \equiv l}^{(\nu, k) = 1} \int_{1-}^{x+} \psi\left(k, \nu'; \frac{x}{t}\right) d\psi(k, \nu; t),$$

$$S(k, l; x) = \psi(k, l; x) \log x + \omega(k, l; x) - \int_1^x \frac{\psi(k, l; t)}{t}\, dt,$$

wobei wegen (6.5) die Gleichung

$$dS(k, l; t) = \log t\, d\psi(k, l; t) + d\omega(k, l; t) = \frac{2}{\varphi(k)} \log t\, dt + dR(k, l; t) \tag{6.7}$$

mit

$$R(k, l; x) = S(k, l; x) - \frac{1}{\varphi(k)} (2x \log x - 2x + 2) = O(x) \tag{6.7'}$$

besteht. Wir iterieren die Gleichung (6.5′), indem wir $\frac{x}{t}$ statt x und ν' statt l einsetzen. Wie im ersten Kapitel ergibt sich

$$\varrho(k, l; x) \log^2 x = - \sum_{(\nu, k) = 1}^{\nu\nu' \equiv l} \int_{1-}^{x+} \varrho\left(k, \nu'; \frac{x}{t}\right) \log t\, d\psi(k, \nu; t)$$

$$+ \sum_{\substack{(\nu, k) = 1 \\ (\mu, k) = 1}}^{\nu\mu\mu' \equiv l} \int_{1-}^{x+} d\psi(k, \nu; t) \int_{1-}^{\frac{x}{t}+} \varrho\left(k, \mu'; \frac{x}{ut}\right) d\psi(k, \mu; u) + O(x \log x),$$

wobei die Summierung in der letzten Summe in bezug auf beide Parametern ν und μ über alle zu k teilerfremden Zahlen des Intervalles $(0, k)$ erstreckt werden muss. Im letzten Glied ändern wir wieder die Integrationsanordnung und können die erwähnte Summe

$$\sum_{\substack{(\nu, k) = 1 \\ (\mu, k) = 1}}^{\nu\mu\mu' \equiv l} \sum_{n \leq x} \varrho\left(k, \mu'; \frac{x}{n}\right) \sum_{dd' = n}^{d \equiv \nu,\, d' \equiv \mu} \Lambda(d)\, \Lambda(d')$$

schreiben. Bezeichnet man hier $\lambda = \mu\nu$, so kann die Summierung über den Indexen λ und μ' geschehen und die Summe in der Form

$$\sum_{(\mu', k)=1}^{\mu'\lambda \equiv l} \int_{1-}^{x+} \varrho\left(k , \mu' ; \frac{x}{t}\right) d\omega(k , \lambda ; t)$$

gebracht werden. Tauscht man noch die Bezeichnungen der Indexe und wendet man die Differentialformel (6.7) an, so ergibt sich die Ungleichung

$$|\varrho(k , l ; x)| \log^2 x \leqq \frac{2}{\varphi(k)} \sum_{(\nu , k)=1} \int_1^x \left|\varrho\left(k , \nu ; \frac{x}{t}\right)\right| \log t \, dt$$
$$+ \sum_{(\nu , k)=1}^{\nu\nu' \equiv l} \int_{1-}^{x+} \left|\varrho\left(k , \nu' ; \frac{x}{t}\right)\right| dR(k , \nu ; t) + O(x \log x) ,$$

woraus wir durch die Abschätzung des letzten Integralgliedes die *Ungleichung von Selberg*

$$|\varrho(k , l ; x)| \log^2 x \leqq \frac{2}{\varphi(k)} \sum_{(\nu , k)=1} \int_1^x \left|\varrho\left(k , \nu ; \frac{x}{t}\right)\right| \log t \, dt + O(x \log x)$$

für jedes zu k teilerfremde l erhalten. Gehen wir wieder zu den Logarithmen der Veränderlichen über, und bezeichnen wir

$$r(k , l ; x) = e^{-x}\varrho(k , l ; e^x) = e^{-x}\psi(k , l ; e^x) - \frac{1}{\varphi(k)} , \tag{6.8}$$

so erhalten wir als Parallele der Ungleichung (2.14)

$$|r(k , l ; x)| \leqq \frac{2}{x^2} \frac{1}{\varphi(k)} \sum_{(\nu , k)=1} \int_0^x |r(k , \nu ; x - t)| \, t dt + O\left(\frac{1}{x}\right). \tag{6.9}$$

Aus der Gleichung (6.6) oder

$$\int_0^x r(k , l ; t) \, dt = O(1)$$

folgt noch die Existenz einer Konstante $c > 0$, so dass die Ungleichung

$$\left|\int_x^y r(k , l ; t) \, dt\right| < c$$

für jedes Intervall $0 \leqq x \leqq t \leqq y$ und für jedes zu k teilerfremde l besteht.

6.3. **Der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen.** Der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen geht durch Anwendung der Funktionen r in die Gleichung

$$r(k\,,\,l\,;\,x) = o(1)$$

über, die für jedes zu k teilerfremde l gelten soll. Bezeichnen wir

$$\limsup |r(k\,,\,l\,;\,x)| = \lambda_l\,,$$

und die grösste von diesen Konstanten mit λ_L, so behauptet der Primzahlsatz dass $\lambda_L = 0$ ist. Wir nehmen an, es wäre $\lambda_L > 0$ und leiten den Widerspruch her. Dazu wählen wir die Zahl λ' so dass $0 < \lambda' < \lambda_L$ und $\lambda' < \dfrac{1}{\varphi(k)}$. Es seien wieder

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots \tag{6.10}$$

die (von der Zahl l abhängende) Folge, die die Stellen der Zeichenwechsel der Funktion $r(k, l; x)$ darstellt und Δ_i und $\overline{\Delta}_i$ dieselben Grössen wie früher. Dann besteht, aus genau denselben Gründen wie im ersten Kapitel, eine für jedes l[1]) und jedes i gültige Ungleichung (2.20), wo nun

$$\vartheta = \frac{\lambda' \log(1 + \varphi(k)\,\lambda')}{c + \lambda' \log(1 + \varphi(k)\,\lambda')} < 1\,.$$

Von hier ab führen wir den Beweis prinzipiell wie im ersten Kapitel zu Ende; nur ist zu bemerken, dass die Zahlen x_n für die Parameter l nicht dieselben sind. Daher bezeichnen wir für ein beliebiges x mit x_n die grösste Zahl $\leqq x$ der Folge (6.10) für die Funktion $r(k, \nu; x) = r_\nu(x)$, woraus sich, die übrigen Bezeichnungen beibehaltend, ergibt

$$\int_0^x |r_\nu(x-t)|\, tdt = \int_{x-x_n}^{x-x_m} |r_\nu(x-t)|\, tdt + O(x)$$

$$\leqq (\lambda_L + \varepsilon) \int_{x-x_n}^{x-x_m} tdt - (\lambda_L - \lambda' + \varepsilon) \int_{x-x_n}^{x-x_n+\vartheta(x_n-x_m)} tdt + O(x)$$

$$\leqq \{\lambda_L + \varepsilon - \vartheta^2(\lambda_L - \lambda' + \varepsilon)\}\, \frac{(x-x_m)^2 - (x-x_n)^2}{2} + O(x)$$

$$\leqq \{\lambda_L + \varepsilon - \vartheta^2(\lambda_L - \lambda' + \varepsilon)\}\, \frac{x^2}{2} + O(x)\,,$$

[1]) Das gilt natürlich a fortiori, wenn $\lambda' \geqq \lambda_l$.

und aus der Ungleichung (6.9), speziell auf die Funktion $r(k, L; x)$ angewandt, würde die Ungleichung

$$\lambda_L \leqq \lambda_L + \varepsilon - \vartheta^2(\lambda_L - \lambda' + \varepsilon) ,$$

also ein Widerspruch folgen. Somit muss $\lambda_L = 0$ sein, womit der Primzahlsatz für arithmetische Progressionen bewiesen ist.

§ 7. Der Dirichlet'sche Satz

7.1. **Hilfssätze.** Wir zeigten in Nr. 5.3., dass die Gleichung

$$\int_{1-}^{x+} \frac{d\psi(t\,,\chi)}{t} = \varepsilon_\chi \log x + O(1) \tag{7.1}$$

für einen Hauptcharakter $\chi = \chi_0$ besteht. Im folgenden zeigen wir, dass diese Gleichung auch für einen Nichthauptcharakter χ mit $\varepsilon_\chi = 0$ gilt[1]). Wir beginnen mit dem Beweis zweier Hilfssätze, die die Dirichlet'schen L-Funktionen

$$L(s\,,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{7.2}$$

betreffen. Für die Konvergenz dieser und der abgeleiteten Reihen

$$(-1)^\nu L^\nu(s\,,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\log^\nu n}{n^s} \tag{7.3}$$

gilt der

Hilfssatz I. *Die Reihen* (7.2) *und* (7.3) *sind für einen Nichthauptcharakter* χ *für* $s > 0$ *konvergent, und es besteht die Gleichung*

$$L^\nu(s\,,\chi\,;x) = L^\nu(s\,,\chi) + O\left(\frac{\log^\nu x}{x^s}\right), \tag{7.4}$$

wo

$$(-1)^\nu L^\nu(s\,,\chi\,;x) = \sum_{n\leqq x} \frac{\chi(n)\log^\nu n}{n^s} = \int_{1-}^{x+} \frac{\log^\nu t}{t^s}\, dK(t\,,\chi)\,.$$

Aus der Gleichung

$$\int_{x-}^{y+} \frac{\log^\nu t}{t^s}\, dK(t\,,\chi) = \frac{K(y\,,\chi)\log^\nu y}{y^s} - \frac{K(x\,,\chi)\log^\nu x}{x^s} - \int_x^y K(t\,,\chi)\, d\left(\frac{\log^\nu t}{t^s}\right)$$

[1]) Dies wurde zuerst von SELBERG ([17]) elementar bewiesen; hier folgen wir vorwiegend SHAPIRO ([20, 21]).

folgt wegen der Abschätzung $|K(t, \chi)| \leqq \dfrac{\varphi(k)}{2}$ und der Ungleichung $d\left(\dfrac{\log^\nu t}{t^s}\right) < 0$ für $t > e^{\frac{\nu}{s}}$

$$\left|\int\limits_{x-}^{y+} \frac{\log^\nu t}{t^s}\, dK(t\,,\chi)\right| \leqq \frac{\varphi(k)}{2}\left(\frac{\log^\nu y}{y^s} + \frac{\log^\nu x}{x^s} - \frac{\log^\nu y}{y^s} + \frac{\log^\nu x}{x^s}\right) = \frac{\varphi(k)\log^\nu x}{x^s}\,.$$

Die Konvergenz folgt aus dem Cauchy'schen Konvergenzkriterium und die Gleichung (7.4) ergibt sich, wenn y gegen Unendlich strebt.

Hilfssatz II. *Ist* χ *ein Nichthauptcharakter, so gilt für* $s > 0$, $h \geqq 0$

$$\text{(7.5)} \qquad \log^h x = \sum_{\nu=0}^{h} \binom{h}{\nu} L^\nu(s\,,\chi) \int\limits_{1-}^{x+} \log^{h-\nu} \frac{x}{t}\, \frac{dM(t\,,\chi)}{t} + O(x^{1-s})\,.$$

Aus dem Hilfssatz I folgt unmittelbar

$$\int\limits_{1-}^{x+} \left(\frac{x}{t}\right)^s \log^h \frac{x}{t}\, dK(t\,,\chi) = \sum_{\nu=0}^{h} (-1)^\nu \binom{h}{\nu} x^s \log^{h-\nu} x \int\limits_{1-}^{x+} \frac{\log^\nu t}{t^s}\, dK(t\,,\chi)$$

$$= \sum_{\nu=0}^{h} \binom{h}{\nu} x^s \log^{h-\nu} x\, L^\nu(s\,,\chi) + O(\log^h x)\,,$$

somit wegen den Umkehrformeln (5.4)

$$x^s \log^h x = \sum_{\nu=0}^{h} \binom{h}{\nu} x^s L^\nu(s\,,\chi) \int\limits_{1-}^{x+} \log^{h-\nu} \frac{x}{t}\, \frac{dM(t\,,\chi)}{t^s} + R(x)\,,$$

wo für das Restglied die Abschätzung

$$R(x) = O\left(\sum_{n \leqq x} \log^h \frac{x}{n}\right) = O(x)$$

besteht. Die Gleichung (7.5) ergibt sich hieraus durch Division mit x^s.

Als Spezialfälle ergeben sich hieraus für $s = 1, h = 0$

$$\text{(7.6)} \qquad L(1\,,\chi) \int\limits_{1-}^{x+} \frac{dM(t\,,\chi)}{t} = L(1\,,\chi) \sum_{n \leqq x} \frac{\mu(n)\,\chi(n)}{n} = O(1)\,,$$

und für $s = h = 1$

$$\log x = L(1\,,\chi)\int\limits_{1-}^{x+}\log\frac{x}{t}\,\frac{dM(t\,,\chi)}{t} + L'(1\,,\chi)\int\limits_{1-}^{x+}\frac{dM(t\,,\chi)}{t} + O(1)\,. \tag{7.7}$$

7.2. **Der Satz von Dirichlet.** Um die Gleichung (7.1) zu beweisen, schreiben wir ihre linke Seite in der Form

$$\int\limits_{1-}^{x+}\frac{d\psi(t\,,\chi)}{t} = \sum_{n\leqq x}\frac{\chi(n)\,\Lambda(n)}{n} = \sum_{n\leqq x}\frac{\chi(n)}{n}\sum_{d\mid n}\mu(d)\log\frac{n}{d}$$

$$= \sum_{m\leqq x}\frac{\mu(m)\,\chi(m)}{m}\sum_{n\leqq\frac{x}{m}}\frac{\chi(n)\log n}{n} = -\int\limits_{1-}^{x+}L'\left(1\,,\chi\,;\frac{x}{t}\right)\frac{dM(t\,,\chi)}{t}\,,$$

woraus wegen (7.4) hervorgeht, dass für einen Nichthauptcharakter die Gleichung

$$\int\limits_{1-}^{x+}\frac{d\psi(t\,,\chi)}{t} = -\,L'(1\,,\chi)\int\limits_{1-}^{x+}\frac{dM(t\,,\chi)}{t} + O(1) \tag{7.8}$$

besteht; denn für das Restglied haben wir die Abschätzung

$$-\int\limits_{1-}^{x+}\frac{dM(t\,,\chi)}{t}\,O\left(\frac{t}{x}\log\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{x}\,O\left(\sum_{n\leqq x}\log\frac{x}{n}\right) = O(1)\,.$$

Nach (7.6) und (7.7) ist die linke Seite der Gleichung (7.8) $= O(1)$ oder $= -\log x + O(1)$, je nachdem $L(1, \chi) \neq 0$ oder $= 0$ ist. Weil das entsprechende Integral für einen Hauptcharakter den Wert $\log x + O(1)$ annimmt, so folgt durch Summierung über alle Charaktere

$$\sum_{\chi}\int\limits_{1-}^{x+}\frac{d\psi(t\,,\chi)}{t} = (1 - N)\log x + O(1)\,,$$

wobei N die Anzahl derjenigen Charaktere bezeichnet, für welche $L(1, \chi) = 0$ ist. Die Summe links ist aber andererseits nach (5.6)

$$\int\limits_{1-}^{x+}\frac{1}{t}\,d\{\sum_{\chi}\psi(t\,,\chi)\} = \varphi(k)\int\limits_{1-}^{x+}\frac{d\psi(k\,,1\,;t)}{t} = \varphi(k)\sum_{n\leqq x}^{n\equiv 1(k)}\frac{\Lambda(n)}{n}$$

und somit $\geqq 0$. Also ist $N \leqq 1$; es gibt höchstens einen Charakter χ mit $L(1, \chi) = 0$. Und *falls* es einen solchen gibt, so ist er notwendig *reell;* denn anderenfalls würde seine konjugierte Funktion $\overline{\chi}$ offenbar einen Charakter mit der Eigenschaft $L(1, \overline{\chi}) = 0$ definieren, es wäre also $N \geqq 2$. Es erübrigt sich also zu beweisen, dass $L(1, \chi) \neq 0$ für jeden reellen Charakter ist; eben dies ist die Hauptschwierigkeit im vorliegenden Beweis. Da jedoch dieser, von Mertens ([10]) stammende Beweis wohlbekannt ist (z.B. [15 ss. 111—112]), verzichten wir auf die Ausführung desselben und stellen damit fest, dass der Dirichlet'sche Satz für alle Charaktere bewiesen ist.

Literatur

[1] BREUSCH, R.: Another proof of the prime number theorem. - Duke Math. J. 21, (1954) 49–53.

[2] CORPUT, J. G. v. D.: Démonstration élémentaire du théorème sur la distribution des nombres premiers. Scriptum, Math. Centrum, Amsterdam 1948. Nr. 1.

[3] ERDÖS, P.: On a new method in elementary number theorem which leads to an elementary proof of the prime number theorem. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 35, (1949) 374–384.

[4] —»— On a tauberian theorem connected with the new proof of the prime number theorem. J. Indian Math. Soc. n. S. 13, (1949), 133–144.

[5] —»— Supplementary note. Ibid. (1949) 145–147.

[6] HARDY, G. H. & WRIGHT, E. M.: An introduction to the theory of numbers. 3:rd ed. Clarendon, Oxford 1954.

[7] HASSE, H.: Vorlesungen über Zahlentheorie. Berlin-Göttingen-Heidelberg. Springer 1950.

[8] LANDAU, E.: Neuer Beweis der Gleichung $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} = 0$. Diss. Berlin 1899.

[9] —»— Über die Äquivalenz zweier Hauptsätze analytischen Zahlentheorie. Sitzungsber. Wien 120 2a, (1911) 973–988.

[10] MERTENS, F.: Über das Nichtverschwinden Dirichletscher Reihen mit reellen Gliedern. Sitzungsber. Wien 104, (1895) 1158–1166.

[11] NEVANLINNA, V.: Über den elementaren Beweis des Primzahlsatzes. Soc. Sci. Fenn. Comment. Phys.-Math. 27:3 (1962).

[12] PITT, H. R.: Tauberian theorems. Tata Institute Monograph N:o 2. Oxford-Bombay (1958).

[13] —»— A general tauberian theorem related to the elementary proof of the prime number theorem. Proc. London Math. Soc. 3,8 (1958).

[14] POSTNIKOFF, A. G. & ROMANOFF, N. P.: Vereinfachung des elementaren Beweises über das asymptotische Verteilungsgesetz der Primzahlen (russisch). Uspechi Mat. Nauk X, 4 (66) (1955) 75–87.

[15] PRACHAR, K.: Primzahlverteilung. Berlin-Göttingen-Heidelberg. Springer 1957.

[16] SELBERG, A.: An elementary proof of the prime-number theorem. Ann. of Math. 2 s. 50, (1949) 305–313.

[17] —»— An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression. Ibid. (1949) 297–304.

[18] —»— An elementary proof of the prime-number theorem for arithmetic progressions. Canadian J. Math. 2, (1950) 66–78.

[19] SHAPIRO, H. N.: On a theorem of Selberg and generalisations. Ann. of Math. 2 s. 51, (1950) 485–497.

[20] —»— On primes in arithmetic progressions II. Ann. of Math. 2 s. 52, (1950) 231–243.

[21] Shapiro, H. N.: Some assertions equivalent to the prime number theorem for arithmetic progressions. Comment. pure and appl. Math. New York 2, (1949) 293—308.

[22] Specht, W.: Elementare Beweise der Primzahlsätze. Hochschulb. für Math. Bd. 30. Berlin 1956.

[23] Tatuzawa, T. & Iseki, K.: On Selberg's elementary proof to the prime-number theorem. Proc. Jap. Acad. Vol. 27, (1951) 340—342.

[24] Tschebyscheff, M.: Mémoires présentés á l'Académie Impériale des sciences de St. Pétersbourg par divers savants 7, (1854) 15—33.

[25] Wright, E. M.: The elementary proof of the prime number theorem. Proc. Royal Soc. Edinburgh, 63, (1951) 257—267.

[26] Zassenhaus, H.: Über die Existenz von Primzahlen in arithmetischen Progressionen. Comment. math. Helv. 22, (1949) 232—259.

Berichtigung:

In der ersten Formel (5.4) auf der Seite 39 soll mitten und rechts g statt f stehen; in der zweiten Formel umgekehrt.

Gedrückt März 1964.