ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

336/14

EINE NICHTKOMPAKTE ZUSAMMENHÄNGENDE FLÄCHE OHNE FLUCHTWEG

VON

HELLMUTH KNESER

HELSINKI 1963
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1964.336-14

Am 13. September 1963 vorgelegt von P. J. Myrberg und Olli Lehto

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1964

Eine nichtkompakte zusammenhängende Fläche ohne Fluchtweg

Wenn man es der Mühe wert findet, den allgemeinen Begriff der Mannigfaltigkeit nach seiner gesamten Tragweite zu untersuchen, so macht es einen grossen Unterschied aus, ob man zunächst einmal im Bereiche derjenigen Mannigfaltigkeiten bleibt, die eine abzählbare Basis ihrer offenen Teilmengen zulassen (sie mögen kurz als *abzählbar* bezeichnet werden), oder ob man auch die nichtabzählbaren betrachtet. Bei den eindimensionalen Mannigfaltigkeiten ist es noch nicht so schlimm: das Homöomorphieproblem ist gelöst; zu der Kreislinie S^1 und der Zahlengeraden R^1 tritt die bei G. Cantor [2] und L. Vietoris [5] auffindbare, von P. Alexandroff [1] mit voller Deutlichkeit herausgestellte »Alexandroff-Halbgerade» und die »Alexandroff-Vollgerade», und jede 1-Mannigfaltigkeit ist genau einer von diesen vieren homöomorph [3]. Aber schon wenn man aus ihnen auf die nächstliegende Weise 2-Mannigfaltigkeiten, also Flächen aufbaut, zeigt sich ein überraschender Reichtum an verschiedenen, d. h. nicht untereinander homöomorphen Flächen. Von diesen will ich die einfachsten hier in § 1 angeben, weil sich an ihnen zeigt, dass die Betrachtung der »Fluchtwege» (was das ist, wird gleich gesagt werden) unter Umständen die Nicht-Homöomorphie zweier Flächen erkennen lässt. Möchte man danach etwa hoffen, mit Hilfe der Fluchtwege auch nur eine anscheinend so eingeschränkte Klasse wie die der einfach zusammenhängenden Flächen vollständig in Homöomorphieklassen aufzuteilen, so erhält diese Hoffnung einen starken Stoss durch ein mir von M. Kneser vor längerer Zeit mitgeteiltes Beispiel einer einfach zusammenhängenden Fläche, die zwar nichtkompakt ist, trotzdem aber keinen Fluchtweg aufweist. Dies Beispiel stelle ich mit Erlaubnis des Erfinders in § 2 dar, freilich auf etwas anderem Wege: wenn er den Grundgedanken durch Hinweis auf eine Differenzierbarkeitsstruktur sehr kurz andeuten kann, gebe ich das entsprechende Differenzen- und Summenverfahren, bei dem die Hilfsbetrachtungen einfacher erscheinen.

§ 1. Flächen und Fluchtwege

Mit B werde die Alexandroff-Halbgerade mit Anfangspunkt bezeichnet, das ist die Menge aller Paare (μ, ξ) aus einer Ordnungszahl $\mu < \omega_1$ und einer reellen Zahl ξ mit $0 \leqq \xi < 1$, versehen mit der lexikographischen Ordnung

$$(\mu , \xi) < (\nu , \eta) \qquad \text{wenn} \quad \mu < \nu \quad \text{oder} \quad \mu = \nu , \ \xi < \eta$$

und der zugehörigen Ordnungstopologie. Ferner bezeichne $A^+ = B - \{(0 , 0)\}$ die gerichtete Alexandroff-Halbgerade und $A = (A^+)^* + B$ (im Sinne der Ordnung, die durch den Stern umgekehrt wird) die Alexandroff-Vollgerade. Schliesslich sei $R^+ = \{ \xi \mid \xi \geqq 0 \}$ die Halbgerade der nicht negativen reellen Zahlen.

Bei einer abzählbaren, zusammenhängenden, nichtkompakten Fläche F ist nicht schwer zu beweisen, dass man auf ihr »ins Unendliche fliehen» kann, d. h. es gibt eine stetige Abbildung f von R^+ in F derart, dass das Bild $f(t)$ jeden kompakten Teil K von F »schliesslich verlässt»: es gibt ein $t_0 \in R^+$, so dass $f(t) \notin K$ für alle $t \geqq t_0$ gilt. Eine solche Abbildung heisse ein Fluchtweg mit dem Urbild R^+. Einen solchen Fluchtweg gibt es schon dann nicht, wenn man F durch A ersetzt. Man wird deshalb auch Fluchtwege zulassen, bei denen nicht R^+ sondern B in F abgebildet wird.

Sucht man Fluchtwege in $A \times A$, so zeigt sich leicht, dass jedes stetige Bild von R^+ in einem kompakten Teil von $A \times A$ liegt. Eine stetige Abbildung von B in $A \times A$ ist durch zwei stetige Abbildungen $t \to x(t)$ und $t \to y(t)$ von B in A gegeben. Von diesen gilt ein Hilfssatz, der überhaupt die Quelle mancher Absonderlichkeiten ist [4]:

Ist f eine stetige Abbildung von B in A, so gilt genau eine der Aussagen

α) $f(t) \to +\infty$ *für* $t \to +\infty$,

β) $f(t) \to -\infty$ *für* $t \to +\infty$,

γ) *von einer Stelle an ist f konstant.*

Jede der Abbildungen x und y muss also einen der Fälle α), β) und γ) darbieten, und ein Fluchtweg liegt offenbar genau dann vor, wenn es nicht bei beiden der Fall γ) ist. Das gibt 8 Klassen von Fluchtwegen, die sich leicht durch ihre topologischen Beziehungen zueinander unterscheiden lassen. Bei vier Wegen aus verschiedenen Klassen z. B. trennen sich die letzten Austrittspunkte aus einem grossen Bild der abgeschlossenen Kreisscheibe in derselben Weise, wie es bei den entsprechenden Koordinatenhalbachsen bzw. -Diagonalen der Fall ist. Zwei Fluchtwege derselben Klasse, bei der der Fall γ) nicht vorliegt, treffen sich beliebig weit draussen, das gilt sogar bei abzählbar vielen Fluchtwegen.

Stellt man dem gegenüber die »Alexandroff-Polarebene», d. h. das Produkt $B \times S^1$, bei dem die Punkte von $\{(0 , 0)\} \times S^1$ identifiziert sind, so ist ein Fluchtweg ein Paar stetiger Abbildungen

$$r : X \to B , \qquad \varphi : X \to S^1 ,$$

worin $X = R^+$ oder $X = B$ ist. Im ersten Falle fasst man R^+ als einen beschränkten Teil von B auf; dieser liegt in einem kompakten

Teil K von B, und der ganze Weg liegt in dem kompakten Teil $r(K) \times S^1$ von $B \times S^1$, ist also kein Fluchtweg. Demnach ist $X = B$ anzunehmen. Die Abbildung $\varphi : B \to S^1$ kann man in eine Abbildung ψ von B in die Zahlengerade R^1 als Überlagerungsraum von S^1 anheben (englisch: to lift). Fasst man R^1 wieder als beschränkten Teil von A auf, so zeigt der Hilfssatz, dass ψ von einer Stelle an konstant ist. Dasselbe gilt von φ, und so sieht man, dass jeder Fluchtweg in der Alexandroff-Polarebene von einer Stelle an rein radial verläuft.

Die hier nur zum Teil angedeuteten Merkwürdigkeiten dürften einiges Interesse an Fluchtwegen rechtfertigen.

§ 2. Die Fläche ohne Fluchtweg

Den ersten Schritt auf die gesuchte Fläche hin tun wir, indem wir Faserbündel F über B mit der multiplikativen Gruppe R^+ der positiven reellen Zahlen als Faser betrachten. Mit kleinen griechischen Buchstaben bezeichnen wir Ordnungszahlen und reelle Zahlen oder Funktionen, die diese zu Werten haben; kleine lateinische Buchstaben bezeichnen Punkte von B.

Die Punkte eines Faserbündels F seien Paare (x, η) mit $x \in B$, $\eta \in R^+$. Den Teil von B bzw. F mit $x < (\mu, 0)$ bezeichnen wir mit B^μ bzw. G^μ. Um F mit einer Fasertopologie zu versehen, geben wir einen Atlas an aus eineindeutigen Abbildungen Φ_μ der Teile $G^{\mu+1}$ in die Zahlenebene; dabei muss gesichert werden, dass die Abbildung $\Phi_\mu \Phi_\lambda^{-1}$ ein Homöomorphismus von $\Phi_\lambda(G^{\lambda+1} \cap G^{\mu+1})$ auf $\Phi_\mu(G^{\lambda+1} \cap G^{\mu+1})$ ist. Diese Bedingung wird erfüllt, wenn wir

$$\Phi_\mu(x, \eta) = (\varphi_\mu(x), \eta\, \chi_\mu(x))$$

setzen mit reellen Funktionen $\chi_\mu > 0$ und φ_μ und dafür sorgen, dass die Funktionen

$$(1) \qquad \varrho \to \varphi_\mu(\varphi_\lambda^{-1}(\varrho)), \qquad x \to \chi_\mu(x) / \chi_\lambda(x)$$

stetig sind, die erste sogar ein Homöomorphismus ist. Es genügt für uns, die Funktionen φ_μ und χ_μ durch ihre Werte $\varphi_{\mu\varkappa}$ bzw. $\chi_{\mu\varkappa}$ an den Stellen $(\varkappa, 0)$ und dazwischen linear anzusetzen:

$$\varphi_\mu((\varkappa, \xi)) = (1-\xi)\, \varphi_{\mu\varkappa} + \xi\, \varphi_{\mu,\varkappa+1},$$

$$\chi_\mu((\varkappa, \xi)) = (1-\xi)\, \chi_{\mu\varkappa} + \xi\, \chi_{\mu,\varkappa+1};$$

dann ist nur erforderlich, dass die reelle Funktion $\varkappa \to \varphi_{\mu\varkappa}$ bzw. $\varkappa \to \chi_{\mu\varkappa}$ stetig ist, was nur für Limeszahlen $\vartheta \leqq \mu$ eine Forderung ist: $\varphi_{\mu\varkappa} \to \varphi_{\mu\vartheta}$, wenn $\varkappa \to \vartheta$.

Die bei (1) aufgestellte Bedingung für φ_μ wird erfüllt, wenn wir φ_μ als monoton wachsenden Homöomorphismus von B^μ auf eine Strecke $(0\,,\gamma)$ der Zahlengeraden aufstellen. Dazu brauchen wir nur für $\varkappa < \mu$ reelle Zahlen $\beta_{\mu\varkappa} > 0$ mit konvergenter Summe

(2) $$\sum_{0\leqq\varkappa<\mu} \beta_{\mu\varkappa} < \infty$$

zu wählen (da es nur abzählbar viele $\varkappa$ mit $\varkappa < \mu \; (< \omega_1)$ gibt, geht das) und

$$\varphi_{\mu\lambda} = \sum_{0\leqq\varkappa<\lambda} \beta_{\mu\varkappa}$$

zu setzen.

Für unsere weiteren Ziele ist es aber nützlich, mehr zu erreichen, nämlich die annähernde Proportionalität der Zuwächse von φ_μ und φ_ν, genauer die Stetigkeit der Quotienten $\beta_{\nu\varkappa}/\beta_{\mu\varkappa}$ in ihrer Abhängigkeit von $\varkappa$. Zu diesem Zweck geben wir eine Definition durch transfinite Induktion. Es sei

$$\beta_{\nu 0} = \beta_{\nu\nu} = 1 \qquad \text{für alle} \quad \nu < \omega_1 .$$

Ist $\nu = \mu+1$, so sei

(3) $$\beta_{\nu\varkappa} = \beta_{\mu\varkappa} \qquad \text{für} \quad \varkappa \leqq \mu .$$

Ist ν Limeszahl, so wählen wir eine Folge

$$0 = \varrho_0 < \varrho_1 < \ldots , \qquad \varrho_n \to \nu .$$

(Da diese Wahl für alle Limeszahlen $\nu < \omega_1$ geschehen muss, liegt hier der transfinite »Knüppel beim Hunde«.) Für alle $\varkappa$ mit $\varrho_{n-1} < \varkappa \leqq \varrho_n$ setzen wir

(4) $$\beta_{\nu\varkappa} = \varepsilon_n \, \beta_{\varrho_n,\varkappa}$$

mit positiven ε_n, die so bestimmt werden, dass

$$\sum_{\varkappa<\nu} \beta_{\nu\varkappa} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \, \sigma_n$$

mit

$$\sigma_n = \sum_{\varrho_{n-1}<\varkappa\leqq\varrho_n} \beta_{\varrho_n,\varkappa}$$

konvergiert; z. B. setzen wir $\varepsilon_n = (n^2 \, \sigma_n)^{-1}$. Sind die Werte $\beta_{\mu\varkappa}$ für alle Paare $(\mu\,,\varkappa)$ mit $\varkappa \leqq \mu < \nu$ gemäss (2) bestimmt, so sind damit alle $\beta_{\nu\varkappa}$ $(\varkappa < \nu)$ erklärt.

Jetzt sei $\nu < \omega_1$ gegeben und schon bekannt, dass für alle λ und μ mit $\lambda < \mu < \nu$ der Quotient $\beta_{\mu\varkappa}/\beta_{\lambda\varkappa}$ bei jeder Limeszahl seines Erklärungsbereiches $\varkappa \leqq \lambda$ stetig von $\varkappa$ abhängt. Um dasselbe für

$\beta_{\nu\varkappa}/\beta_{\lambda\varkappa}$ zu beweisen, sei zunächst $\nu = \mu+1$; dann folgt wegen (3) die Stetigkeit aus der von $\beta_{\mu\varkappa}/\beta_{\lambda\varkappa}$. Sei also ν eine Limeszahl und die Stetigkeit von $\beta_{\nu\varkappa}/\beta_{\lambda\varkappa}$ für $\varkappa \to \vartheta$ zu beweisen, wobei $\vartheta \leqq \lambda < \nu$ eine Limeszahl ist. Sei $\varrho_{n-1} < \vartheta \leqq \varrho_n$; dann ist $\beta_{\nu\varkappa}/\beta_{\lambda\varkappa}$ wegen (4) für $\varkappa \to \vartheta$ stetig (sogar von einer Stelle an konstant). Weil aber nach der Induktionsannahme ebenfalls $\beta_{\lambda\varkappa}/\beta_{\varrho_n,\varkappa}$ stetig ist, so folgt die Stetigkeit von $\beta_{\nu\varkappa}/\beta_{\lambda\varkappa}$.

Der nächste Schritt ist entscheidend: wir setzen

$$\chi_{\mu\varkappa} = 1/\beta_{\mu\varkappa} \tag{5}$$

und erfüllen damit nach dem soeben Bewiesenen die Bedingung der Stetigkeit der Funktionen $\varkappa \to \chi_{\mu\varkappa}/\chi_{\lambda\varkappa}$ und $x \to \chi_\mu(x)/\chi_\lambda(x)$.

Die Konstruktion der Fläche F ist hiermit beendet. Der Frage nach Fluchtwegen kommen wir näher durch

Satz 1. *Eine (nach ω_1 geordnete) Folge von Punkten $P_\lambda = ((\lambda, 0), \eta_\lambda)$ kann nicht bei jeder Limeszahl unter ω_1 stetig sein.*

Sei nämlich doch eine solche Folge stetig. Um die Stetigkeit festzustellen, haben wir eine der Abbildungen Φ_ν heranzuziehen. Die Stetigkeit der Folge $\{P_\lambda\}$ bei einer Limeszahl $\mu \leqq \nu$ drückt sich dadurch aus, dass $\eta_\lambda \chi_{\nu\lambda}$ für $\lambda \to \mu$ einem Grenzwert γ zustrebt. Nach (5) heisst das

$$\eta_\lambda = \beta_{\nu\lambda}(\gamma + \delta_{\mu\lambda})$$

mit $\delta_{\mu\lambda} \to 0$ für $\lambda \to \mu$. Also gibt es ein reelles $\alpha > 0$ und ein $\varkappa < \mu$ derart, dass

$$\eta_\lambda \leqq \alpha\, \beta_{\nu\lambda} \tag{6}$$

für $\varkappa < \lambda < \mu$ ist. Nach (2) folgt daraus: Zu jedem $\mu < \omega_1$ gibt es ein $\varkappa < \mu$ derart, dass

$$\sum_{\varkappa<\lambda<\mu} \eta_\lambda < \infty$$

ist. Hieraus wieder folgt die Konvergenz

$$\sum_{\lambda<\mu} \eta_\lambda < \infty, \qquad \sum_{\lambda<\mu} \eta_\lambda = \zeta_\mu$$

für jedes $\mu < \omega_1$. In den Zahlen ζ_λ hätte man eine nach ω_1 geordnete wachsende Folge reeller Zahlen, was unmöglich ist.

Satz 2. *In der Fläche F gibt es keinen B-Weg, d. h. kein stetiges Bild*

$$t \to (x(t), \eta(t)) \qquad (t \in B)$$

mit der Eigenschaft

$$x(t) \to \infty \qquad (t \to \infty).$$

Aus der Annahme, es gäbe den bezeichneten B-Weg, wollen wir einen Widerspruch gegen Satz 1 ableiten. Sei $x((0\,,0)) = (\varkappa\,,\xi)$. Für jedes λ mit $\varkappa < \lambda < \omega_1$ sei

$$t_\lambda = \operatorname{Min}\{\, t \mid x(t) = (\lambda\,,0)\,\}\,, \qquad \eta_\lambda = \eta(t_\lambda)\,.$$

Für alle $\mu < \varkappa$ setzen wir $\eta_\mu = \eta_{\varkappa+1}$. Wegen der Stetigkeit von $x(t)$ und $\eta(t)$ gilt dann

$$t_\lambda \to t_\nu\,, \quad \eta_\lambda \to \eta_\nu \qquad (\,\lambda \to \nu\,)\,,$$

d. h. die Punkte $((\lambda\,,0)\,,\eta_\lambda)$ bilden eine Folge, wie es sie nach Satz 1 nicht gibt.

Nun gibt es in der Fläche F noch Fluchtwege, nämlich R^+-Wege bei denen $\eta(t)$ gegen 0 oder ∞ für $t \to \infty$ geht.

Diese Möglichkeit wird beseitigt, indem wir die Punkte $(x\,,\eta)$ von F identifizieren gemäss der Äquivalenzrelation

$$(x\,,\eta) \sim (x'\,,\eta') \qquad \text{wenn} \quad x = x' \quad \text{und} \quad \eta = 2^k \eta'$$

mit ganzem Exponenten k. Die Abbildungen Φ verwandeln die Relation in dieselbe Relation in der Zahlenebene:

$$(\varrho\,,\sigma) \sim (\varrho'\,,\sigma') \qquad \text{wenn} \quad \varrho = \varrho' \quad \text{und} \quad \sigma = 2^k \sigma'\,.$$

Das R^+-Faserbündel F wird zu einem S^1-Faserbündel F_1 über B, und F ist das überlagernde R^+-Bündel. Ein Weg in F_1 ist durch stetige Funktionen $x(t)$, $\zeta(t)$ gegeben, wo ζ eine Abbildung in S^1 ist. Nun ist aber jeder beschränkte Teil $\{\,(x\,,\xi) \mid x \leqq z\,\}$ von F_1 kompakt; daher bleibt jeder R^+-Weg in einem kompakten Teil, und als Fluchtwege kommen nur B-Wege mit $x(t) \to \infty$ in Betracht. Da man aber jeden Weg in F_1 als Abbildung eines einfach zusammenhängenden Raumes zu einem Weg in der Überlagerung F anheben kann, so würde jeder Fluchtweg in F_1 zu einem Fluchtweg in F von der Art führen, wie es sie nach Satz 2 nicht gibt. Schliesslich ist F_1 nur eine »berandete Fläche». Eine Fläche, und zwar eine nichtkompakte einfach zusammenhängende Fläche F_2 erhält man aus ihr, indem man alle Punkte $(0\,,\xi)$ zusammenfallen lässt. Damit ist das angekündigte Ziel erreicht.

Universität Tübingen
Deutschland

Literatur

[1] ALEXANDROFF, P.: Über die Metrisation der im Kleinen kompakten topologischen Räume. - Math. Ann. 92, 1924, S. 294–301 (insbes. S. 295).

[2] CANTOR, G.: Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten. 5. Fortsetzung. - Math. Ann. 21, 1883, S. 545–591 (insbes. S. 552). Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor–Dedekind, J. Springer, Berlin, 1932, (insbes. S. 171).

[3] KNESER, H.: Sur les variétés connexes de dimension 1. - Bull. Soc. Math. Belg. 10, 1958, S. 19–25.

[4] KNESER, H. und M.: Reell-analytische Strukturen der Alexandroff-Halbgeraden und der Alexandroff-Geraden. - Arch. Math. 11, 1960, S. 104–106.

[5] VIETORIS, L.: Stetige Mengen. - Monatsh. Math. Phys. 31, 1921, S. 173–204 (insbes. S. 183–184).

Gedruckt März 1964.