ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

336/2

# ÜBER DAS ALTERNIERENDE VERFAHREN VON SCHWARZ BEI POSITIV DEFINITEN SELBSTADJUNGIERTEN DIFFERENTIALGLEICHUNGSSYSTEMEN

VON

STEFAN HILDEBRANDT

HELSINKI 1963
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1964.336-02

Am 9. November 1962 vorgelegt von P. J. MYRBERG und OLLI LEHTO

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1963

## 1. Einleitung

Den ersten strengen Existenzbeweis für das Dirichletsche Problem in der Potentialtheorie hat H. A. Schwarz mit seinem 'alternierenden Verfahren', einem konvergenten unendlichen Prozess, mittels dessen man die erste Randwertaufgabe für das Vereinigungsgebiet $T$ zweier Gebiete $T_1$ und $T_2$ lösen kann, wenn die Lösbarkeit der Randwertaufgabe für $T_1$ und $T_2$ bekannt ist, gegeben. Den Konvergenzbeweis führt man gewöhnlich entweder mit potentialtheoretischen Hilfsmitteln (Hilfssatz von Schwarz; man vgl. dazu auch die Beweismethode von Krylow [9], die im wesentlichen auf dem Maximumprinzip beruht, und die allgemeinen Bemerkungen von Carathéodory [2], S. 311—336, sowie Kellogg [10], S. 322—323) oder mit der Integralgleichungstheorie (man vgl. Michlin [15]). Eine Übersicht über die ältere Literatur zum alternierenden Verfahren findet man in dem Enzyklopädieartikel von L. Lichtenstein [11]. Diese Beweismethoden lassen sich aber nicht auf Differentialgleichungssysteme übertragen. S. L. Sobolew [23], der mit dem Schwarzschen Verfahren Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie behandelte, wandte dagegen erstmalig eine einfache Variationsmethode an. Diese Variationsmethode hat auch S. G. Michlin [14] benutzt, um das Schwarzsche Verfahren für die Aufgabe

$$\begin{gathered}
A\,u = -\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(A_{ik}\,\frac{\partial u}{\partial x^k}\right) + B\,u = 0 \qquad \text{in } \Omega\,, \\
A \text{ positiv definit in } D^0 = H_A\,, \\
u = f(x) \quad \text{auf } S = \partial\Omega\,,
\end{gathered} \tag{1.1}$$

zu begründen.

Herrn Professor R. Nevanlinna verdanke ich den freundlichen Hinweis darauf, dass A. Pfluger [21] einen Konvergenzbeweis für das alternierende Verfahren in dem einfachen Fall der Konstruktion harmonischer Differentiale auf Riemannschen Flächen gegeben hat, der der Variationsmethode von Sobolew und Michlin eng verwandt ist. Bemerkenswerterweise benötigt Pfluger bei seinen Betrachtungen nicht den Satz von Rellich, um die Konvergenz der Schwarzschen Folge im quadratischen Mittel zu beweisen.

Vielmehr gelingt es ihm allein durch konsequente Ausnutzung der aus dem alternierenden Verfahren resultierenden Orthogonalitätsrelationen, die Konvergenz der Schwarzschen Folge und ihrer ersten Ableitungen im quadratischen Mittel zu zeigen. Im folgenden sollen diese Ideen zur Begründung des alternierenden Verfahrens für positiv definite Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung benutzt werden.

Dazu werden in Nr. 2 ein bekannter Projektionssatz für definite quadratische Formen und in Nr. 3 einige Tatsachen über die später verwandten Funktionenräume bereitgestellt. In Abschnitt 4 wird das alternierende Verfahren definiert und die Konvergenz der Schwarzschen Folge $\{x_p\}$ samt ihren ersten Ableitungen im quadratischen Mittel auf $T$ gegen die Lösung der Randwertaufgabe und deren ersten Ableitungen nachgewiesen. In Abschnitt 5 werden mittels Morreyscher a priori -Abschätzungen über die Lösungen elliptischer Differentialgleichungssysteme die Voraussetzungen untersucht, unter denen die $x_p$ und auch deren Ableitungen $\nabla x_p$, $\nabla^2 x_p, \ldots$ gleichmässig im Inneren des Lösungsgebietes $T$ gegen die Lösung $x_0$ und deren Ableitungen $\nabla x_0$, $\nabla^2 x_0, \ldots$ konvergieren. Michlin dagegen zeigt in [14] die gleichmässige Konvergenz der Schwarzschen Folge für die Aufgabe (1.1) bis zu den Ableitungen zweiter Ordnung in anderer Weise mit Hilfe von Mittelwertsätzen für die Lösungen von (1.1).

Ein numerisches Beispiel für die Anwendung des alternierenden Verfahrens im Falle der Laplaceschen Differentialgleichung wird in dem Lehrbuch von Kantorowitsch und Krylow (vgl. [9], S. 597—608) gegeben.

## 2. Die erste Randwertaufgabe für definite quadratische Formen

Sei $\mathfrak{H}$ ein reeller Hilbertraum mit den Elementen $x$, der metrischen Bilinearform $(x_1, x_2)$, der Norm $\|x\| = (x, x)^{1/2}$, und sei $\mathfrak{A}$ ein Unterraum von $\mathfrak{H}$ mit den Elementen $u$. Weiterhin sei $L(x)$ eine stetige Linearform auf $\mathfrak{H}$ und $Q(x_1, x_2)$ eine beschränkte symmetrische Bilinearform auf $\mathfrak{H}$ derart, dass $Q(u) \underset{\text{def}}{=} Q(u, u)$ auf $\mathfrak{A}$ positiv definit ist. Es sei also

$$|L(x)| \leqq C\,\|x\| \qquad \text{für alle } x \in \mathfrak{H} \qquad (C > 0)\,, \tag{2.1}$$

$$\begin{gathered} Q(x_1, x_2) = Q(x_2, x_1) \qquad \text{und} \qquad |Q(x_1, x_2)| \leqq M\,\|x_1\|\,\|x_2\| \\ \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathfrak{H} \qquad (M > 0)\,, \end{gathered} \tag{2.2}$$

$$Q(u) \geqq \varepsilon\,\|u\|^2 \qquad \text{für alle} \quad u \in \mathfrak{A} \qquad (\varepsilon > 0)\,. \tag{2.3}$$

Nun wollen wir definieren, was wir unter der ersten Randwertaufgabe für $Q(x_1, x_2)$ verstehen werden.

**Die erste Randwertaufgabe.** *Sei* $g$ *ein fest vorgegebenes Element aus*

$\mathfrak{H}$ (= *Randwertelement*). *Dann sind alle Lösungen* $x$ *der folgenden Aufgabe gesucht*:

$$\text{(2.4)} \qquad \begin{aligned} Q(x, u) + L(u) &= 0 \qquad \text{für alle} \quad u \in \mathfrak{A}\,, \\ x - g &\in \mathfrak{A}\,. \end{aligned}$$

**Satz 2.1.** *Unter den Voraussetzungen (2.1) bis (2.3) hat die Randwertaufgabe (2.4) genau eine Lösung* $x_0 = u_0 + g$, $u_0 \in \mathfrak{A}$, *in* $\mathfrak{H}$, *die folgendermassen eindeutig charakterisiert ist*: $u_0$ *ist unter allen* $u \in \mathfrak{A}$ *minimalisierendes Element des Ausdruckes*

$$\text{(2.5)} \qquad B(u, u) = Q(u + g, u + g) + 2\,L(u + g)\,.$$

a) Den Beweis der ersten Aussage des Satzes führen wir auf den wohlbekannten Satz von Fréchet—Riesz im Hilbertraum zurück. Wäre nämlich $x_0 = u_0 + g$ Lösung von (2.4), so gälte

$$\text{(2.6)} \qquad Q(u_0, u) = L_1(u) \qquad \text{für alle} \quad u \in \mathfrak{A}\,,$$

wobei $L_1(u) = -L(u) - Q(g, u)$ gesetzt ist. Wir betrachten jetzt den Hilbertraum $\mathfrak{A}_Q$. Er bestehe aus den Elementen von $\mathfrak{A}$, die metrische Bilinearform auf $\mathfrak{A}_Q$ sei $(u_1, u_2)_Q = Q(u_1, u_2)$, die Norm sei $\|u\|_Q = \sqrt{Q(u)}$. (Wegen (2.2) und (2.3) sind alle Bedingungen erfüllt, die man an die metrische Fundamentalform in einem Hilbertraum stellt. Die Vollständigkeit von $\mathfrak{A}_Q$ folgt wegen (2.3) aus der Vollständigkeit von $\mathfrak{A}$.) Offensichtlich ist $L_1(u)$ eine beschränkte Linearform auf $\mathfrak{A}_Q$, denn

$$\begin{aligned} |L_1(u)| &\leqq |L(u)| + |Q(g, u)| \leqq C\,\|u\| + M\,\|g\|\,\|u\| \leqq \\ &\leqq (C + M\,\|g\|)\,\varepsilon^{-1/2}\,\|u\|_Q\,. \end{aligned}$$

Damit besagt (2.6), dass die beschränkte Linearform $L_1(u)$ durch ein Skalarprodukt $(u_0, u)_Q$ in $\mathfrak{A}_Q$ darzustellen ist. Nach dem Fréchet—Rieszschen Satz ist diese Aufgabe durch genau ein Element $u_0 \in \mathfrak{A}_Q$ lösbar.

b) Beweis der Minimalcharakterisierung von $u_0$ bzw. $x_0$: Ein beliebiges Element $u \in \mathfrak{A}$ kann man in der Form $u = u_0 + v$, $v \in \mathfrak{A}$, schreiben. Dann wird

$$\begin{aligned} B(u, u) &= B(u_0 + v, u_0 + v) \\ &= Q(u_0 + v + g, u_0 + v + g) + 2\,L(u_0 + v + g) \\ &= [Q(u_0 + g, u_0 + g) + 2\,L(u_0 + g)] + Q(v, v) \\ &\qquad + 2\,[Q(u_0 + g, v) + L(v)]\,. \end{aligned}$$

Wenn nun $x_0 = u_0 + g$ Lösung von (2.4) ist, so ergibt sich

$$\text{(2.7)} \qquad B(u, u) = B(u_0, u_0) + Q(v, v) \qquad \text{für alle} \quad v \in \mathfrak{A}\,.$$

Nach (2.3) ist $Q(v, v) \geqq 0$ und gleich Null nur dann, wenn $v = 0$, also $u = u_0$ ist, womit die Minimaleigenschaft von $u_0$ bewiesen ist:

$$B(u_0, u_0) = \inf_{u \in \mathfrak{A}} B(u, u) . \tag{2.8}$$

## 3. Die Randwertaufgabe für positiv definite Systeme partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Wir wollen zunächst die Funktionenräume einführen, die man bei der Behandlung von partiellen Differentialgleichungen mittels Hilbertraummethoden verwendet.

Sei $E^\mu$ der $\mu$-dimensionale Euklidische Raum der Punkte $t = (t^1, \ldots, t^\mu)$. Eine offene Punktmenge in $E^\mu$ bezeichnen wir mit $T$, ihren Rand mit $\partial T$. Unter einer Zelle $[a, b]$ im $E^\mu$ verstehen wir die Punktmenge $[a, b] = \{ t \mid a^\alpha \leqq t^\alpha \leqq b^\alpha , \alpha = 1, \ldots, \mu \}$; mit $f(t)$ bezeichnen wir die Funktion $f(t^1, \ldots, t^\mu)$ der $\mu$ Variablen $t^1, \ldots, t^\mu$, und mit

$$\int_T f(t)\, dt$$

das Lebesguessche Integral von $f(t)$ über $T$. Mit $C^\infty(T)$ bezeichnen wir die Gesamtheit der auf $\bar{T}$ beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen, und $C_c^\infty(T)$ sei die Menge der Funktionen aus $C^\infty(T)$, die einen kompakten, in $T$ gelegenen Träger haben. Die Klassen äquivalenter, auf $T$ quadratisch summierbarer Funktionen bilden einen mit $L_2(T)$ bezeichneten Hilbertraum mit der Metrik

$$(f, g)_0 = \int_T f\, g\, dt$$

und der Norm $\|f\|_0 = (f, f)_0^{1/2}$, der bekanntlich die Vervollständigung von $C^\infty(T)$ in dieser Norm ist. Als Lipschitzgebiete bezeichnet man mit Morrey (vgl. [16]) Gebiete $T$, deren Abschluss $\bar{T}$ durch endlich viele Umgebungen $U_i$ überdeckt werden kann, so dass die $U_i$ durch Bi-Lipschitztransformationen auf den Würfel $-1 < s^\alpha < 1$, $\alpha = 1, \ldots, \mu$, abgebildet werden und $U_i \cap \bar{T}$ auf den halbierten Würfel $-1 < s^\alpha < 1$, $\alpha = 1, \ldots, \mu - 1$, $-1 < s^\mu \leqq 0$, abgebildet wird, falls $U_i \cap \partial T$ nicht leer ist. Dabei versteht man unter Bi-Lipschitztransformationen eineindeutige Abbildungen $t^\alpha = t^\alpha(s)$ bzw. $s^\alpha = s^\alpha(t)$, so dass die $t^\alpha(s)$ und $s^\alpha(t)$ Lipschitzfunktionen sind, d. h. einer uniformen Lipschitzbedingung genügen.

Für ein Lipschitzgebiet $T$ hat man bekanntlich den Satz, dass

$$\mathfrak{P}_2(T) = W_2^1(T) = L_2^{(1)}(T) \tag{3.1}$$

ist, vgl. [5]; dort finden sich auch weitere Literaturangaben. Dabei bezeichnet $L_2^{(1)}(T)$ den Hilbertraum der Klassen äquivalenter Funktionen $f$ aus $L_2(T)$, deren im Sinne der Distributionentheorie verstandene Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t^\alpha}[f]$, $\alpha = 1, \dots, \mu$, wiederum Funktionen aus $L_2(T)$ sind, es gilt also

$$\int_T f(t) \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \varphi(t)\, dt = - \int_T \frac{\partial}{\partial t^\alpha}[f]\, \varphi(t)\, dt, \tag{3.2}$$
$$\alpha = 1, \dots, \mu, \qquad \text{für alle } \varphi(t) \in C_c^\infty(T).$$

Man bezeichnet $\frac{\partial}{\partial t^\alpha}[f(t)]$ auch als 'schwache' Ableitungen von $f$ nach $t^\alpha$. Ferner ist $W_2^1(T)$ die Vervollständigung von $C^\infty(T)$ in der Norm $\|f\|_1 = (f, f)_1^{1/2}$, die aus der Bilinearform

$$(f, g)_1 = \int_T \left( f g + \sum_{\alpha=1}^{\mu} \frac{\partial f}{\partial t^\alpha} \frac{\partial g}{\partial t^\alpha} \right) dt \tag{3.3}$$

entspringt. Die verallgemeinerten Ableitungen $f_{\cdot\alpha}$ einer Funktion $f \in W_2^1(T)$, die sogenannten 'starken' Ableitungen von $f$, sind im folgenden Sinne zu verstehen: wenn $\{f_p\}$ eine Folge von Funktionen $f_p \in C^\infty(T)$ mit $f_p \to f$ in $W_2^1(T)$ ist, so ist

$$\lim_{p\to\infty} \int_T \left( f_{\cdot\alpha} - \frac{\partial f_p}{\partial t^\alpha} \right)^2 dt = 0.$$

Schliesslich sind $\mathfrak{P}_2(T)$ die von Calkin und Morrey (vgl. [1], [16]) eingeführten Hilberträume. Als Vertreter für die Elemente aus $\mathfrak{P}_2(T)$ kann man Funktionen $f(t)$ wählen, die fast überall auf $T$ nach $t^1, \dots, t^\mu$ differenzierbar sind und zusammen mit ihren (fast überall existierenden) Ableitungen auf $T$ quadratisch integrierbar sind.

Die Gleichheit (3.1) der drei Räume $\mathfrak{P}_2$, $W_2^1$ und $L_2^{(1)}$ besagt insbesondere, dass starke und schwache Ableitungen eines Elementes aus $L_2^{(1)}$ äquivalente Funktionen auf $T$ sind und dass jedes Element $f$ aus $L_2^{(1)}$ als fast überall auf $T$ differenzierbare Funktion aufgefasst werden kann, deren Ableitungen den starken bzw. schwachen Ableitungen von $f$ äquivalent sind. Wenn wir also von der Ableitung $\frac{\partial f}{\partial t^\alpha}$ eines Elementes aus $L_2^{(1)}(T)$ sprechen, so ist das in diesem Sinne zu verstehen.

Weiterhin führen wir den Unterraum $\mathfrak{P}_{2,0}(T)$ von $\mathfrak{P}_2(T)$ ein als Vervollständigung von $C_c^\infty(T)$ in der Metrik (3.3); in $\mathfrak{P}_{2,0}(T)$ liegen die Funktionen mit den 'Randwerten' Null auf $\partial T$ im Sinne von Courant und Morrey. Man sagt, dass zwei Elemente $f$ und $g$ aus $\mathfrak{P}_2(T)$ dieselben Randwerte auf $\partial T$ haben $(f = g$ auf $\partial T)$, wenn $f - g$ ein Element aus $\mathfrak{P}_{2,0}(T)$ ist. Wenn $T$ Lipschitzgebiet ist, wenn also der Rand $\partial T$ in einem gewissen Sinne regulär ist, kann man den Elementen $f$ aus $\mathfrak{P}_2(T)$ in der Tat eine Randwertfunktion $\varphi \in L_2(\partial T)$ zuordnen, wie Morrey gezeigt hat, vgl. [16]. Ferner gilt für Lipschitzgebiete $T$ der Satz von Rellich: Wenn $\{f_p\}$ eine Folge von Elementen aus $\mathfrak{P}_2(T)$ ist, die schwach in $\mathfrak{P}_2(T)$ gegen $f$ konvergiert, so konvergiert $\{f_p\}$ stark in $L_2(T)$ gegen $f$, d.h. $\lim\limits_{p\to\infty} \|f_p - f\|_0 = 0$.

Wir betrachten nun den Raum

$$(3.4)\qquad \mathfrak{H}_0(T) = \{\, x \mid x = (x^1(t), \ldots, x^n(t)),\ x^i(t) \in L_2(T),\ i = 1, \ldots, n \,\}$$

mit der Metrik $(x, y)_0$ und der Norm $\|x\|_0$:

$$(3.5)\qquad (x, y)_0 = \int_T \left( \sum_{i=1}^n x^i y^i \right) dt, \qquad \|x\|_0 = (x, x)_0^{1/2},$$

den Raum

$$(3.6)\qquad \mathfrak{H}_1(T) = \{\, x \mid x = (x^1(t), \ldots, x^n(t)),\ x^i(t) \in \mathfrak{P}_2(T),\ i = 1, \ldots, n\}$$

mit der Metrik $(x, y)_1$ und der Norm $\|x\|_1$:

$$(3.7)\qquad (x, y)_1 = \int_T \left\{ \sum_{i=1}^n \left( x^i y^i + \sum_{\alpha=1}^{\mu} x^i_{t^\alpha} y^i_{t^\alpha} \right) \right\} dt, \qquad \|x\|_1 = (x, x)_1^{1/2},$$

sowie den Unterraum $\mathfrak{A}_1(T)$ von $\mathfrak{H}_1(T)$:

$$(3.8)\quad \mathfrak{A}_1(T) = \{\, x \mid x = (x^1(t), \ldots, x^n(t)),\ x^i(t) \in \mathfrak{P}_{2,0}(T),\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Für das weitere wollen wir voraussetzen, dass $T$ Lipschitzgebiet ist. Wir betrachten nun die folgende Aufgabe:

Für einen vorgegebenen Vektor $g = (g^1(t), \ldots, g^n(t))$ aus $\mathfrak{H}_1(T)$ suchen wir die Lösungen von[1])

$$(3.9)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t^\alpha} (a_{ij}^{\alpha\beta} x^j_{t^\beta} + b_{ij}^\alpha x^j + e_i^\alpha) = c_{ij}^\alpha x^j_{t^\alpha} + d_{ij} x^j + f_i \quad \text{in } T, \\ &x^i = g^i \quad \text{auf } \partial T, \qquad i = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

[1]) Über doppelt auftretende lateinische Indizes $i, j, \ldots$ wird von 1 bis $n$, über doppelt auftretende griechische Indizes $\alpha, \beta, \ldots$ von 1 bis $\mu$ summiert. Zu dem folgenden vergleiche man mit Morrey [18], System (D).

Wir machen zunächst die Minimalvoraussetzung, dass $a^{\alpha\beta}_{ij}$ ein stetiger Tensor in $T$ ist, $b^{\alpha}_{ij}$, $c^{\alpha}_{ij}$ und $d_{ij}$ beschränkte und messbare Funktionen auf $T$ sind, und dass $e^{\alpha}_{i}$ und $f_i$ aus $L_2(T)$ sind, und betrachten an Stelle von (3.9) die Aufgabe

$$(3.10)\qquad \begin{aligned} Q(x, u) + L(u) &= 0 \qquad \text{für alle}\quad u \in \mathfrak{A}_1(T)\,,\\ x &= g \qquad \text{auf } \partial T\,, \end{aligned}$$

wobei

$$(3.11)\qquad Q(x, y) = \int_T (a^{\alpha\beta}_{ij}\, y^i_{t^\alpha}\, x^j_{t^\beta} + b^{\alpha}_{ij}\, y^i_{t^\alpha}\, x^j + c^{\alpha}_{ij}\, y^i\, x^j_{t^\alpha} + d_{ij}\, y^i\, x^j)\, dt\,,$$

$$(3.12)\qquad L(y) = \int_T (e^{\alpha}_{i}\, y^i_{t^\alpha} + f_i\, y^i)\, dt$$

gesetzt ist. Wir machen ferner noch die Symmetrievoraussetzungen

$$(3.13)\qquad a^{\alpha\beta}_{ij} = a^{\beta\alpha}_{ji}\,, \qquad b^{\alpha}_{ij} = c^{\alpha}_{ji}\,, \qquad d_{ij} = d_{ji}\,.$$

Offensichtlich sind $L(x)$ und $Q(x, y)$ auf ganz $\mathfrak{H}_1(T)$ definiert. Dann ergibt sich mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung, dass

$$(3.14)\qquad |L(x)| < C\, \|x\|_1\,,$$

$$(3.15)\qquad Q(x, y) = Q(y, x) \qquad \text{und} \qquad |Q(x, y)| \leqq M\, \|x\|_1\, \|y\|_1$$

ist.

Schliesslich setzen wir voraus, dass das Gleichungssystem positiv definit ist, genauer gesagt, dass

$$(3.16)\qquad Q(u, u) \geqq \varepsilon\, \|u\|_1^2 \qquad \text{für alle} \quad u \in \mathfrak{A}_1(T)$$

mit geeignetem $\varepsilon > 0$ gilt. Notwendig und hinreichend dafür ist, dass der Tensor $a^{\alpha\beta}_{ij}$ stark elliptisch in $T$ und der kleinste Eigenwert von $Q(u)$ positiv ist.

Mittels des Gaussschen Satzes kann man immer von (3.9) zu (3.10) übergehen, und umgekehrt folgt, dass eine Lösung von (3.10) hinreichend regulär ist und (3.9) befriedigt, wenn man über die Koeffizienten noch weitere Annahmen macht. Diese Resultate finden sich bei Morrey [18], Nr. 4.

## 4. Das alternierende Verfahren. Nachweis der starken Konvergenz der Schwarzschen Folge $\{x_p\}$ in $\mathfrak{H}_1(T)$

Seien $T_1$ und $T_2$ zwei Lipschitzgebiete in $E^\mu$ mit nichtleerem Durchschnitt $T_1 \cap T_2$. Die Vereinigung $T = T_1 \dotplus T_2$ sei ebenfalls ein Lipschitzgebiet. Der Rand von $T_i$ sei $\partial T_i = S_i \dotplus S_i'$ $(i = 1, 2)$, der Rand von $T$ sei $\partial T = S_1 \dotplus S_2$, der von $T_1 \cap T_2$ sei $S_1' \dotplus S_2'$.

Wir wollen nun das alternierende Verfahren für die Aufgabe (3.10) bezüglich der beiden Gebiete $T_1$ und $T_2$ unter den Voraussetzungen (3.14) bis (3.16) aufstellen. Nach Satz 2.1 kann man Aufgaben vom Typ (3.10) in $\mathfrak{A}_1(T)$ wie auch in $\mathfrak{A}_1(T_i)$ für beliebiges $g \in \mathfrak{H}_1(T)$ und beliebiges $L(x)$ stets lösen, und zwar auf eindeutige Weise. Dann existiert insbesondere ein Element $h \in \mathfrak{A}_1(T)$, so dass

$$Q(h\,, u) = Q(g\,, u) + L(u) \qquad \text{für alle} \quad u \in \mathfrak{A}_1(T) \tag{4.1}$$

gilt.

Ferner beachten wir, dass ein Vektor $u \in \mathfrak{A}_1(T_i)$ durch die Definition $u = 0$ auf $T - T_i$ $(i = 1\,, 2)$, zu einem Vektor aus $\mathfrak{A}_1(T)$ fortgesetzt wird, so dass wir die Räume $\mathfrak{A}_1(T_i)$ als Unterräume von $\mathfrak{A}_1(T)$ deuten können (vgl. Morrey [16], S. 202, Theorem 7.4).

Nun hat die Aufgabe

$$\begin{aligned} Q(x_1\,, u) + L(u) &= 0 \qquad \text{für alle} \quad u \in \mathfrak{A}_1(T_1)\,, \\ x_1 &= g \qquad \text{auf} \quad \partial T_1\,, \end{aligned} \tag{4.2}$$

genau eine Lösung der Form

$$x_1 = g + u_1\,, \qquad u_1 \in \mathfrak{A}_1(T_1)\,. \tag{4.3}$$

Denkt man sich, wie schon oben vereinbart, $u_1 = 0$ auf $T - T_1$, d.h. $x_1 = g$ auf $T - T_1$ gesetzt, so wird $x_1$ zu einem Element aus $\mathfrak{H}_1(T)$.

Beim zweiten Schritt löst man die Aufgabe

$$\begin{aligned} Q(x_2\,, u) + L(u) &= 0 \qquad \text{für alle} \quad u \in \mathfrak{A}(T_2)\,, \\ x_2 &= x_1 \qquad \text{auf} \quad \partial T_2\,, \end{aligned}$$

die genau eine Lösung $x_2$ der Form

$$x_2 = x_1 + u_2 = g + u_1 + u_2 = g + v_2\,, \qquad u_2 \in \mathfrak{A}_1(T_2)\,,$$

besitzt. Man setzt $u_2 = 0$ auf $T - T_2$, d.h. $x_2 = x_1$ auf $T - T_2$. Dann wird $x_2$ zu einem Element aus $\mathfrak{H}_1(T)$ und $v_2$ zu einem Element aus $\mathfrak{A}_1(T)$.

Auf diese Weise fährt man fort und bekommt so eine Folge $\{x_p\}$ von Vektoren $x_p \in \mathfrak{H}_1(T)$, die folgendermassen definiert sind:

$(2\,k)$-ter Schritt: $x_{2k}$ ist die Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} Q(x_{2k}\,, u) + L(u) &= 0 \qquad \text{für alle} \quad u \in \mathfrak{A}_1(T_2)\,, \\ x_{2k} &= x_{2k-1} \qquad \text{auf} \quad \partial T_2\,. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Sie ist eindeutig bestimmt und hat die Form

$$\begin{gathered} x_{2k} = x_{2k-1} + u_{2k} = g + \sum_{p=1}^{2k} u_p = g + v_{2k}\,, \\ u_{2k} \in \mathfrak{A}_1(T_2)\,. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Man setzt $u_{2k} = 0$ und $x_{2k} = x_{2k-1}$ auf $T - T_2$. Dann wird $v_{2k}$ zu einem Element aus $\mathfrak{A}_1(T)$ und $x_{2k}$ zu einem Element aus $\mathfrak{H}_1(T)$, das durch (4.5) auf $T$ definiert ist.

$(2\,k+1)$ -ter Schritt: $x_{2k+1}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} Q(x_{2k+1}\,, u) + L(u) &= 0 \qquad \text{für alle } u \in \mathfrak{A}_1(T_1)\,, \\ x_{2k+1} &= x_{2k} \qquad \text{auf } \partial T_1\,, \end{aligned} \tag{4.6}$$

und von der Form

$$\begin{gathered} x_{2k+1} = x_{2k} + u_{2k+1} = g + \sum_{p=1}^{2k+1} u_p = g + v_{2k+1}\,, \\ u_{2k+1} \in \mathfrak{A}_1(T_1)\,. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Man setzt $u_{2k+1} = 0$ und $x_{2k+1} = x_{2k}$ auf $T - T_1$. Dann wird $v_{2k+1}$ zu einem Element aus $\mathfrak{A}_1(T)$ und $x_{2k+1}$ zu einem Element aus $\mathfrak{H}_1(T)$, das durch (4.7) auf $T$ definiert wird.

Damit ergibt sich, dass $x_p = g$ auf $\partial T = S_1 \dot{+} S_2$ ist. Ferner ist $x_{2k+1} = x_{2k}$ auf $S_1'$ und $x_{2k} = x_{2k-1}$ auf $S_2'$.

Wir führen nun die Unterräume $\mathfrak{A}_{1,S_i'}(T)$ $(i = 1\,, 2)$ von $\mathfrak{A}_1(T)$ ein:

$$\mathfrak{A}_{1,S_i'}(T) = \{\, w \mid w \in \mathfrak{A}_1(T) \text{ und } w = 0 \text{ auf } S_i' \,\} \qquad (i = 1\,, 2)\,. \tag{4.8}$$

Aus den Gleichungen (4.4) bis (4.7) ergibt sich

$$\begin{aligned} Q(g + v_{2k} + u_{2k+1}\,, w) + L(w) &= 0 \qquad \text{für alle } w \in \mathfrak{A}_{1,S_1'}(T)\,, \\ Q(g + v_{2k-1} + u_{2k}\,, w) + L(w) &= 0 \qquad \text{für alle } w \in \mathfrak{A}_{1,S_2'}(T)\,, \end{aligned} \tag{4.9}$$

wobei offenbar $u_{2k+1} \in \mathfrak{A}_{1,S_1'}(T)$ und $u_{2k} \in \mathfrak{A}_{1,S_2'}(T)$ ist.

Um den Konvergenzbeweis für die Schwarzsche Folge $\{x_p\}$ mit

$$x_p = g + v_p = g + v_{p-1} + u_p \tag{4.10}$$

zu führen, wollen wir die $x_p$ nach einem Gedanken von Sobolew, Michlin und Pfluger (vgl. [23], [14], [21]) durch eine Reihe von Minimalproblemen charakterisieren. Der Beweis lässt sich nicht direkt wie bei Michlin führen, da der aus (4.9) herrührende Minimalausdruck auch einen linearen Term enthält und $Q$ nicht auf $\mathfrak{H}_1(T)$ positiv definit ist, während $g \in \mathfrak{H}_1(T)$ ist. Diese Schwierigkeit beseitigt man leicht auf die folgende Weise:

Führt man die Vektoren

$$\hat{v}_p = v_p + h \in \mathfrak{A}_1(T) \tag{4.11}$$

ein, so kann man die Gleichungen (4.9) in der Form

$$\begin{aligned} Q(\hat{v}_{2k} + u_{2k+1}\,, w) &= 0 \qquad \text{für alle } w \in \mathfrak{A}_{1,S_1'}(T)\,, \\ Q(\hat{v}_{2k-1} + u_{2k}\,, w) &= 0 \qquad \text{für alle } w \in \mathfrak{A}_{1,S_2'}(T) \end{aligned} \tag{4.12}$$

schreiben, wobei

$$u_{2k+1} \in \mathfrak{A}_{1, s_1'}(T) \qquad \text{und} \qquad u_{2k} \in \mathfrak{A}_{1, s_2'}(T) \tag{4.13}$$

ist.

Nach Satz 2.1 folgt daraus

$$\begin{aligned} Q(\hat{v}_{2k+1}) &= Q(\hat{v}_{2k} + u_{2k+1}) = \min_{u \in \mathfrak{A}_{1,S_1'(T)}} Q(\hat{v}_{2k} + u) \\ Q(\hat{v}_{2k}) &= Q(\hat{v}_{2k-1} + u_{2k}) = \min_{u \in \mathfrak{A}_{1,S_2'(T)}} Q(\hat{v}_{2k-1} + u) . \end{aligned} \tag{4.14}$$

Da $u = 0$ in jedem Falle Vergleichsvektor ist, ergibt sich aus (4.14):

$$Q(\hat{v}_p) \leqq Q(\hat{v}_{p-1}) , \qquad p = 1 , 2 , \ldots . \tag{4.15}$$

Die $Q(\hat{v}_p)$ bilden also eine monoton nicht wachsende Folge von (nach (3.16)) positiven Zahlen, somit existiert $\lim\limits_{p \to \infty} Q(\hat{v}_p)$ , es gilt also

$$\lim_{p, q \to \infty} |Q(\hat{v}_p) - Q(\hat{v}_q)| = 0 . \tag{4.16}$$

Weiterhin ist $\hat{v}_q - \hat{v}_{q-1} = u_q \in \mathfrak{A}_{1, s_i'}(T)$ , wobei $i = 1$ oder $i = 2$ , je nachdem, ob $q \equiv 1$ oder $q \equiv 2 \mod 2$ ist. Damit folgt aus (4.12)

$$Q(\hat{v}_p , \hat{v}_q) = Q(\hat{v}_p , \hat{v}_{q-1}) \qquad \text{für alle } p \text{ und } q \text{ mit } p \equiv q \mod 2. \tag{4.17}$$

Hieraus schliesst man, dass

$$Q(\hat{v}_{p+2\nu} , \hat{v}_p) = Q(\hat{v}_{p+\nu} , \hat{v}_{p+\nu}) \tag{4.18}$$

für alle natürlichen Zahlen $p$ und $\nu$ gilt. Für $p = q$ folgt aus (4.17) insbesondere $Q(\hat{v}_p) = Q(\hat{v}_p , \hat{v}_{p-1})$ , und wegen $Q(\hat{v}_{p-1} - \hat{v}_p) = Q(\hat{v}_{p-1}) + Q(\hat{v}_p) - 2\, Q(\hat{v}_p , \hat{v}_{p-1})$ folgt

$$Q(\hat{v}_{p-1} - \hat{v}_p) = Q(\hat{v}_{p-1}) - Q(\hat{v}_p) . \tag{4.19}$$

Aus (3.16), (4.18) und (4.19) ergibt sich schliesslich wegen

$$Q(\hat{v}_{p+2\nu+1} - \hat{v}_p) \leqq 2 \{ Q(\hat{v}_{p+2\nu+1} - \hat{v}_{p+2\nu}) + Q(\hat{v}_{p+2\nu} - \hat{v}_p) \} :$$

$$\begin{aligned} &\|\hat{v}_{p+2\nu} - \hat{v}_p\|_1^2 \leqq \varepsilon^{-1} \{ [Q(\hat{v}_{p+2\nu}) - Q(\hat{v}_{p+\nu})] + [Q(\hat{v}_p) - Q(\hat{v}_{p+\nu})] \} \\ &\|\hat{v}_{p+2\nu+1} - \hat{v}_p\|_1^2 \leqq \end{aligned} \tag{4.20}$$

$$2\, \varepsilon^{-1} \{ [Q(\hat{v}_{p+2\nu}) - Q(\hat{v}_{p+2\nu+1})] + [Q(\hat{v}_{p+2\nu}) - Q(\hat{v}_{p+\nu})] + [Q(\hat{v}_p) - Q(\hat{v}_{p+\nu})] \} .$$

Nach (4.16) ergibt sich hieraus $\lim\limits_{p, q \to \infty} \|\hat{v}_p - \hat{v}_q\|_1 = 0$ , die $\hat{v}_p$ bilden also eine Cauchyfolge in $\mathfrak{A}_1(T)$ . Wegen der Vollständigkeit von $\mathfrak{A}_1(T)$ existiert also ein Element $\hat{v}_0$ mit $\hat{v}_p \xrightarrow[\mathfrak{A}_1(T)]{} \hat{v}_0$ .

Wir zeigen nun, dass $\hat{v}_0$ die (eindeutig bestimmte) Lösung der Aufgabe

$$(4.21)\qquad \begin{aligned} Q(\hat{v}_0, u) &= 0 \qquad \text{für alle } u \in \mathfrak{A}_1(T)\,, \\ \hat{v}_0 &= 0 \qquad \text{auf } \partial T\,, \end{aligned}$$

ist, d. h. $\hat{v}_0 = 0$.

Wegen (4.12) gilt zunächst

$$\begin{aligned} Q(\hat{v}_{2k+1}, w_1) &= 0 \qquad \text{für alle } w_1 \in \mathfrak{A}_1(T_1)\,. \\ Q(\hat{v}_{2k}, w_2) &= 0 \qquad \text{für alle } w_2 \in \mathfrak{A}_1(T_2)\,. \end{aligned}$$

Wegen $\hat{v}_{2k}, \hat{v}_{2k+1} \xrightarrow[\mathfrak{A}_1(T)]{} \hat{v}_0$ folgt erst recht $\hat{v}_{2k} \xrightarrow[\mathfrak{A}_1(T_2)]{} \hat{v}_0$, $\hat{v}_{2k+1} \xrightarrow[\mathfrak{A}_1(T_1)]{} \hat{v}_0$ und damit

$$(4.22)\qquad \begin{aligned} Q(\hat{v}_0, w_1) &= 0 \qquad \text{für alle } w_1 \in \mathfrak{A}_1(T_1)\,, \\ Q(\hat{v}_0, w_2) &= 0 \qquad \text{für alle } w_2 \in \mathfrak{A}_1(T_2)\,. \end{aligned}$$

Aus Approximationsgründen genügt es, (4.21) für $u \in \mathfrak{A}_1(T)$ zu zeigen, die in einem $\delta$-Streifen um $\partial T$ innerhalb $T$ verschwinden, wobei $\delta > 0$ beliebig klein sein darf. Sei also $T_\delta \subset T$, der Abstand von $\partial T$ und $\partial T_\delta$ sei $\delta > 0$, $u \in \mathfrak{A}_1(T_\delta)$ und $u = 0$ auf $T - T_\delta$. Dann kann man für hinreichend kleine $\delta$ in bekannter Weise folgende Zerlegung der Eins konstruieren:

Es gibt Funktionen $\eta_1(t)$ und $\eta_2(t)$ aus $C_c^\infty(T)$, so dass $\eta_i \in C_c^\infty(T_i)$ und $\eta_1 + \eta_2 = 1$ für alle $t \in T_\delta$ ist. Setzen wir dann $w_i = \eta_i u$, so ist $w_i \in \mathfrak{A}_1(T_i)$, und wegen (4.22) ergibt sich

$$Q(\hat{v}_0, u) = Q(\hat{v}_0, w_1) + Q(\hat{v}_0, w_2) = 0\,.$$

Da $\hat{v}_0$ als Limes der $\hat{v}_p$ in $\mathfrak{A}_1(T)$ liegt, ist es gleich Null auf $\partial T$, d. h. $\hat{v}_0$ ist in der Tat Lösung von (4.21).

Wir haben also $\hat{v}_p = v_p + h \xrightarrow[\mathfrak{A}_1(T)]{} 0$ und somit $x_p = g + v_p \xrightarrow[\mathfrak{H}_1(T)]{} x_0 = g - h$ gezeigt. Wegen (4.1) ist $x_0 = g - h$ Lösung der Randwertaufgabe (3.10).

Fassen wir die erhaltenen Ergebnisse zusammen:

**Satz 4.1.** *Wenn man $Q(u)$ als positiv definit auf $\mathfrak{A}_1(T)$ voraussetzt. so konvergiert die durch (4.2) bis (4.7) definierte Schwarzsche Folge $\{x_p\}$ stark in $\mathfrak{H}_1(T)$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung $x_0 = g - h$ der Randwertaufgabe (3.10). Die Schwarzsche Folge ist also eine Minimalfolge für das zur Randwertaufgabe (3.10) gehörige Variationsproblem*

$$Q(x_0) = \min_{\substack{x \in \mathfrak{H}_1(T) \\ x = g \text{ auf } \partial T}} Q(x)\,.$$

*Da $\hat{v}_q - \hat{v}_p = x_q - x_p$ und $\hat{v}_p = x_p - x_0$ ist, geben die Gleichungen (4.20) die Güte der Konvergenz der Folge $\{x_p\}$ an.*

## 5. Nachweis der gleichmässigen Konvergenz des alternierenden Verfahrens im Innern von $T$

Wir wollen jetzt die Frage der gleichmässigen Konvergenz der Schwarzschen Folge $\{x_p\}$ gegen die Lösung $x_0$ der Randwertaufgabe (3.10) untersuchen. Als wesentliches Hilfsmittel benutzen wir von Morrey angegebene a priori -Abschätzungen von Lösungen elliptischer Differentialgleichungssysteme zweiter Ordnung, vgl. [18]. Mittels der von Morrey bewiesenen allgemeinen Fassung des Haarschen Lemmas (vgl. [17]) folgt nämlich, dass die Gleichungen (3.10) den Haarschen Gleichungen

$$\int_{\partial R} (a_{ij}^{\alpha\beta}\, x^j_{,t^\beta} + b_{ij}^{\alpha}\, x^j + e_i^{\alpha})\, dt'_\alpha = \int_R (c_{ij}^{\alpha}\, x^j_{,t^\alpha} + d_{ij}\, x^j + f_i)\, \mathrm{dt}\,, \tag{5.1}$$

$$dt'_\alpha = (\mathfrak{t}_\alpha \cdot \mathfrak{n})\, dS\,,$$

äquivalent sind, wobei $\mathfrak{t}_\alpha$ den Einheitsvektor in der $t^\alpha$-Richtung, $\mathfrak{n}$ die äussere Normale auf $\partial R$ und $dS$ das Flächenelement auf $\partial R$ bezeichnet. Dabei muss $x$ die Gleichung (5.1) für 'fast alle' Zellen (vgl. [1]) $R = [a\,, b]$ in $T$ erfüllen. Auf Gleichungen vom Typ (5.1) beziehen sich die Morreyschen Regularitätsuntersuchungen, deren für uns wichtige Resultate wir im folgenden Satz zitieren wollen:

**Satz 5.1.** *a) Wenn wir ausser den in Abschnitt 3 über die Koeffizienten von (5.1) gemachten Voraussetzungen noch annehmen, dass die Tensoren $e$ und $f$ der Wachstumsbeziehung*

$$\max\,(\|e\|_{0,C(P,r)}\,, \|f\|_{0,C(P,r)}) \leqq \begin{cases} L\left(\dfrac{r}{a}\right)^{\frac{\mu}{2}-1+\nu} & \text{für } 0 \leqq r \leqq a\,, \\ L & \text{für } r \geqq a\,, \end{cases} \qquad 0 < \nu < 1\,,$$

*für alle Kugeln $C(P\,, a) \subset T$ mit dem Mittelpunkt $P$ und dem Radius $a$ genügen, so ist jede Lösung $x$ von (5.1) auf $T$ $\nu$-Hölderstetig, und die Lösungen $x$ von (5.1) mit gleichmässig beschränkter Norm*

$$\|x\|_{0,T} = \left(\int_T x^i\, x^i\, dt\right)^{1/2}$$

*sind eine Familie von Vektoren, deren Komponenten auf jedem inneren Gebiet $G$ von $T$ (d. h. $\bar{G} \subset T$) eine Familie von gleichmässig und gleichgradig stetigen, gleichmässig beschränkten Funktionen bilden.*

*b) Wenn ausserdem die Tensoren $a$ und $b$ auf $T$ einer gleichmässigen Hölderbedingung mit dem Exponenten $\nu$ genügen und wenn $e$ und $f$ die Bedingungen*

$$|e(\tau) - e(t)| \leqq L\, \delta_t^{-\frac{\mu}{2}-\nu} |t-\tau|^\nu , \qquad |t-\tau| < \frac{\delta_t}{2} , \qquad t \in C_a = C(P, a) ,$$

$$\|f\|_{0, C(t,r)} \leqq L \left(\frac{r}{\delta_t}\right)^{\frac{\mu}{2}-1+\nu} , \qquad 0 \leqq r \leqq \delta_t ,$$

*für jedes $C(P, a) \subset T$ erfüllen, so sind auch die ersten Ableitungen der Lösungen von (5.1) H-stetig in $T$ mit dem Exponenten $\nu$, und alle Lösungen $x$ mit gleichmässig beschränkten $\|x\|_{0,T}$ sind eine Familie von Vektoren, für die auch die $x^i_{t^\alpha}$ eine Familie von gleichmässig und gleichgradig stetigen, gleichmässig beschränkten Funktionen auf jedem inneren Gebiet $G$ von $T$ bilden* (vgl. [18], S. 125, 126, Theorem 4.4).

*c) Wenn ausserdem $c, d, f$ und die ersten Ableitungen von $a, b$ und $e$ $\nu$-Hölderstetig auf $\bar{T}$ sind, so sind auch die zweiten Ableitungen der Lösungen $x$ von (5.1) in $T$ $\nu$-Hölderstetig; unter diesen Voraussetzungen befriedigen also die Lösungen von (3.10) auch (3.9), und für alle Lösungen $x$ von (5.1) mit gleichmässig beschränkten $\|x\|_{0,T}$ bilden auch die $x^i_{t^\alpha t^\beta}$ eine Familie von gleichmässig und gleichgradig stetigen, gleichmässig beschränkten Funktionen auf jedem inneren Gebiet von $T$* (vgl. [18], S. 126, 127, Theorem 4.5).

*d) Wenn $a, b, c, d, e$ und $f$ von der Klasse $C_\nu^{(m+1)}$* [2]) *auf $\bar{T}$ sind, so ist $x$ von der Klasse $C_\nu^{(m+2)}$ auf $T$, und für alle Lösungen $x$ von (5.1) mit gleichmässig beschränkten $\|x\|_{0,T}$ bilden die $x^i$ einschliesslich ihrer Ableitungen bis zur $(m+2)$-ten Ordnung eine Familie von gleichmässig und gleichgradig stetigen, gleichmässig beschränkten Funktionen auf jedem inneren Gebiet $G$ von $T$* (vgl. [18], S. 129, Theorem 4.7).

Sei nun $T = T_1 \dot{+} T_2$, wobei $T_1, T_2$ und $T$ Lipschitzgebiete sind, und sei $\{x_p\}$ die in Abschnitt 4 konstruierte Schwarzsche Folge, von der wir gezeigt haben, dass sie in $\mathfrak{H}_1(T)$ stark gegen die Lösung $x_0$ von (3.10) konvergiert.

**Satz 5.2.** *a) Wenn wir über die Koeffizienten die Voraussetzungen von Satz 5.1.a) machen, so konvergieren die $x_{2k+1}$ gleichmässig in jedem inneren Gebiet $G_1$ von $T_1$ gegen $x_0$, und die $x_{2k}$ konvergieren gleichmässig in jedem inneren Gebiet $G_2$ von $T_2$ gegen $x_0$* [3]).

*b) Unter den Voraussetzungen von Satz 5.1.b) gilt:*

---

[2]) $C_\nu^{(m)}(T)$ ist die Klasse der auf $T$ $m$-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit $\nu$-stetigen $m$-ten Ableitungen auf $T$.

[3]) '$x_{2k}$ strebt gleichmässig gegen $x_0$' wird mit $x_{2k} \rightrightarrows x_0$ abgekürzt und ist komponentenweise zu verstehen, d.h. $x_{2k} \rightrightarrows x_0$ bedeutet: $\overset{i}{x}_{2k} \rightrightarrows \overset{i}{x}_0$. Wenn man mit $\nabla x = \{x^i_{t^\alpha}\}$, $\nabla^2 x = \{x^i_{t^\alpha t^\beta}\}$, ... die ersten, zweiten, ... Ableitungen von $x$ bezeichnet, so bedeutet $\nabla x_{2k} \rightrightarrows \nabla x_0$, dass $\frac{\partial}{\partial t^\alpha} \overset{i}{x}_{2k} \rightrightarrows \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \overset{i}{x}_0$, usw.

$$\nabla x_{2k+1} \rightrightarrows \nabla x_0 \quad in\ G_1\,, \qquad \nabla x_{2k} \rightrightarrows \nabla x_0 \quad in\ G_2$$

*für jedes innere Gebiet* $G_i$ *von* $T_i$.

*c) Schliesslich gilt unter den Annahmen von Satz 5.1.c):*

$$\nabla^2 x_{2k+1} \rightrightarrows \nabla^2 x_0 \quad in\ G_1\,, \qquad \nabla^2 x_{2k} \rightrightarrows \nabla^2 x_0 \quad in\ G_2\,,$$

*d) und allgemein unter der Annahme von Satz 5.1.d):*

$$\nabla^l x_{2k+1} \rightrightarrows \nabla^l x_0 \quad in\ G_1\,, \qquad \nabla^l x_{2k} \rightrightarrows \nabla^l x_0 \quad in\ G_2$$

*für* $l$ *mit* $0 \leqq l \leqq m + 2$, *wobei* $G_i$ *inneres Gebiet von* $T_i$ *ist.*

Beweis: a) Wegen $x_{2k+1} \xrightarrow[\mathfrak{H}_0(T)]{} x_0$ folgt nach einem bekannten Satz aus der Theorie der reellen Funktionen, dass man aus den $\{x_{2k+1}\}$ eine Teilfolge $\{x_{2k_l+1}\}$ auswählen kann, die fast überall auf $T$ gegen $x_0$ konvergiert. Nun sind $x_0$ und die $x_{2k+1}$ sämtlich Lösungen derselben Differentialgleichung (5.1) in $T_1$, und aus $x_p \xrightarrow[\mathfrak{H}_0(T)]{} x_0$ folgt die gleichmässige Beschränktheit der Normen $\|x_0\|_{0,\,T_1}$, $\|x_{2k+1}\|_{0,\,T_1}$. Dann ergibt sich aus Satz 5.1.a), dass die $x_0$ und $x_{2k+1}$ eine Familie von gleichmässig und gleichgradig stetigen, gleichmässig beschränkten Vektoren auf jedem inneren Gebiet $G_1$ von $T_1$ bilden. Nach einer bekannten Schlussweise folgt dann: $x_{2k_l+1} \rightrightarrows x_0$ auf $G_1$. Analog beweist man die folgende Verallgemeinerung dieses Resultates:

Aus jeder Teilfolge von $\{x_{2k+1}\}$ kann man eine weitere Teilfolge $\{x_{2k_l+1}\}$ auswählen, so dass $x_{2k_l+1} \rightrightarrows x_0$ auf jedem inneren Gebiet $G_1$ von $T_1$ gilt.

Man wendet nun den folgenden bekannten Satz: 'Seien $y_0$ und $y_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) Elemente eines metrischen Raumes $E$ und es gelte: jede Teilfolge von $\{y_n\}$ enthält eine weitere Teilfolge, die gegen $y_0$ konvergiert. Dann konvergiert $\{y_n\}$ gegen $y_0$.' auf den Raum der Vektoren $x$ mit $x^i$ aus $C^0(G_1)$ mit der Norm $|x| = \sup\limits_{t \in G_1} (|x^1|, \ldots, |x^n|)$ an, und bekommt so $x_{2k+1} \rightrightarrows x_0$ auf $G_1$ für alle inneren Gebiete $G_1$ von $T_1$. Analog ergibt sich $x_{2k} \rightrightarrows x_0$ auf $G_2$ für alle $\bar{G}_2 \subset T_2$.

b) Unter den Voraussetzungen von Satz 5.1.b) bilden auch die $\nabla x_{2k+1}$ auf $G_1$ ($\bar{G}_1 \subset T_1$) eine Familie von gleichmässig und gleichgradig stetigen, gleichmässig beschränkten Vektoren. Nach einem bekannten Satz von Arzelà—Ascoli kann man dann aus jeder Teilfolge von $\{x_{2k+1}\}$ eine weitere Teilfolge $\{x_{2k_l+1}\}$ auswählen, so dass die $\dfrac{\partial}{\partial t^\alpha} x^i_{2k_l+1}$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha = 1, \ldots, \mu$, auf $G_1$ gleichmässig gegen Grenzfunktionen $p^i_\alpha$ konvergieren, die auf $G_1$ stetig und beschränkt sind. Hieraus folgt aber, dass

$$\lim_{l \to \infty} \int\limits_{G_1} \left[ (x^i_0 - x^i_{2k_l+1})^2 + \sum_{\alpha=1}^{\mu} \left( p^i_\alpha - \frac{\partial x^i_{2k_l+1}}{\partial t^\alpha} \right)^2 \right] dt = 0\,, \qquad i = 1, \ldots, n\,,$$

ist. Da nach Abschnitt 3 $\mathfrak{P}_2(G_1) = W_2^1(G_1)$ ist, so ergibt sich, dass die $p_\alpha^i$ mit den $\frac{\partial x_0^i}{\partial t^\alpha}$ auf $G_1$ bis auf eine Menge vom Masse Null übereinstimmen. Da die $p_\alpha^i$ und wegen Satz 5.1.b.) auch die $\frac{\partial x_0^i}{\partial t^\alpha}$ stetige Funktionen auf $G_1$ sind, so gilt, $p_\alpha^i = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} x_0^i$ auf $G_1$. Nach der Schlussweise von a) folgt hieraus $\nabla x_{2k+1} \rightrightarrows \nabla x_0$ in $G_1$.

c) und d): Ähnlich beweist man $\nabla^2 x_{2k+1} \rightrightarrows \nabla^2 x_0$ auf $G_1$ $(\bar{G}_1 \subset T_1)$ bzw. $\nabla^l x_{2k+1} \rightrightarrows \nabla^l x_0$, $0 \leqq l \leqq m+2$, auf $G_1$ unter den Voraussetzungen von Satz 5.1.c) bzw. d).

**Zusatz bei der Korrektur** (19. Februar 1963)

Weitere Literaturhinweise zum alternierenden Verfahren habe ich in [25] gefunden: S. Ja. Kogan [27] (diese Arbeit behandelt die Lösung des Neumannschen Problems für die Laplace-Gleichung mittels des alternierenden Verfahrens), K. Kalik [26]. Die Arbeit von Kalik war mir nicht zugänglich; die Konvergenzbetrachtungen scheinen aber anders als in meiner Arbeit zu sein, da sie auf der Darstellbarkeit der Lösung durch Randintegrale beruhen. Man vergleiche hierzu die Besprechung von K. Maurin [28]. Dort findet sich auch ein Hinweis auf eine interessante Arbeit von F. E. Browder [24], in der der Beweis der schwachen Konvergenz für ein allgemeines Näherungsverfahren zur Lösung des Dirichletschen Problems bei einer (positiv definiten) homogenen partiellen Differentialgleichung $2m$ -ter Ordnung, das sowohl das Schwarzsche alternierende Verfahren als auch die Poincarésche Balayage-Methode enthält, mittels eines Hilfssatzes von Kakutani über die Folgen iterierter Projektoren im Hilbertraum geliefert wird. Die starke Konvergenz des alternierenden Verfahrens führt Browder auf einen Satz von Rellich und v. Neumann zurück. Die Frage der gleichmässigen Konvergenz behandelt Browder, indem er die Existenz einer Bergmanschen Kernfunktion beweist. Voraussetzung bei allem ist, dass die Koeffizienten des Differentialoperators aus $C^\infty(G)$ sind, und dass die zugehörige quadratische Form auf dem ganzen Funktionenraum $W^{m,2}(G)$ (und nicht nur auf dem Raum $\dot{W}^{m,2}(G)$ = Abschluss von $C_c^\infty(G)$ in $W^{m,2}(G)$ ) positiv definit (bzw. semidefinit) ist. In beiden Richtungen ist meine Arbeit also weitergehender. Man vergleiche dazu auch meine demnächst erscheinende Arbeit [29].

Johannes Gutenberg-Universität
Mainz, Deutschland

## Literatur


[1] CALKIN, J. W.: Functions of several variables and absolute continuity. I. - Duke Math. J. 6, 1940, S. 170–186.

[2] CARATHÉODORY, C.: Gesammelte mathematische Schriften. III. - C. H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München, 1955.

[3] COURANT, R., und D. HILBERT: Methoden der mathematischen Physik. I/II. - Grundlehren d. math. Wiss. XII/XLVIII, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1924/1937.

[4] HESTENES, M. R.: Applications of the theory of quadratic forms in Hilbert space to the calculus of variations. - Pacific J. Math. 1, 1951, S. 525–581.

[5] HILDEBRANDT, S.: Über die Identität der Sobolewschen und der Calkin–Morreyschen Räume. - Math. Ann. 148, 1962, S. 226–237.

[6] —»— Rand- und Eigenwertaufgaben bei stark elliptischen Systemen linearer Differentialgleichungen. - Math. Ann. 148, 1962, S. 411–429.

[7] HÖLDER, E.: Über die partiellen Differentialgleichungssysteme der mehrdimensionalen Variationsrechnung. - Jber. Deutsch. Math. Verein. 62, 1959, S. 34–52.

[8] —»— Beweise einiger Ergebnisse aus der Theorie der 2. Variation mehrfacher Extremalintegrale. - Math. Ann. 148, 1962, S. 214–225.

[9] KANTOROWITSCH, I. W., und W. I. KRYLOW: Näherungsmethoden der höheren Analysis. - Hochschulbücher f. Math. 19, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[10] KELLOGG, O. D.: Foundations of potential theory. - Grundlehren d. math. Wiss. XXXI, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1929.

[11] LICHTENSTEIN, L.: Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. - Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften II. C. 3, Verlag und Druck von B. G. Teubner, Leipzig, 1918, S. 177–377.

[12] LOUHIVAARA, I. S.: Über das Dirichletsche Problem für die selbstadjungierten linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. - Rend. Circ. Mat. Palermo (2) 5, 1956, S. 260–274.

[13] —»— Zur Theorie der Unterräume in linearen Räumen mit indefiniter Metrik. - Ann. Acad. Scient. Fennicæ A. I. 252, 1958.

[14] Михлин, С. Г.: Проблема минимума квадратичного функционала. - Современные проблемы математики, Гостехиздат, Москва/Ленинград, 1952.

[15] MIKHLIN, S. G.: Integral equations and their applications to certain problems in mechanics, mathematical physics and technology. - International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics 4, Pergamon Press, London/NewYork/Paris/LosAngeles, 1957.

[16] MORREY, C. B., JR.: Functions of several variables and absolute continuity. II. - Duke Math. J. 6, 1940, S. 187–215.

[17] —»— Multiple integral problems in the calculus of variations and related topics. - Univ. California Publ. Math. (New Ser.) 1, 1943, S. 1–130.

[18] MORREY, C. B., JR.: Second order elliptic systems of differential equations. - Contributions to the theory of partial differential equations, Annals of Mathematics Studies 33, Princeton University Press, Princeton (N. J.), 1954, S. 101—159.

[19] MORREY, C. B., JR., und J. EELLS, JR.: A variational method in the theory of harmonic integrals. I. - Ann. of Math. (2) 63, 1956, S. 91—128.

[20] NEVANLINNA, R.: Über metrische lineare Räume. I. Allgemeine Bemerkungen zur Metrisierbarkeit. II. Bilinearformen und Stetigkeit. III. Theorie der Orthogonalsysteme. IV. Zur Theorie der Unterräume. V. Relationen zwischen verschiedenen Metriken. - Ann. Acad. Scient. Fennicæ A. I. 108/113/115/163/222, 1952/1952/1952/1954/1956.

[21] PFLUGER, A.: Theorie der Riemannschen Flächen. - Grundlehren d. math. Wiss. LXXXIX, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1957.

[22] RIESZ, F., und B. SZ.-NAGY: Vorlesungen über Funktionalanalysis. - Hochschulbücher f. Math. 27, Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[23] СОБОЛЕВ, С. Л.: Алгорифм Шварца в теории упругости. - Докл. Акад. Наук СССР (Новая Серия) 13, 1936, S. 236—238.

[24] BROWDER, F. E.: On some approximation methods for solutions of the Dirichlet problem for linear elliptic equations of arbitrary order. - J. Math. Mech. 7, 1958, S. 69—80.

[25] DIAZ, J. B.: Partial differential equations (1947—1960). - Recent Soviet contributions to mathematics, Macmillan, NewYork/London, 1962, S. 155—202.

[26] КАЛИК, К.: К вопросу о сходимости алгорифмов типа Шварца. - Изв. Высш. Учебн. Завед. Математика 1 (8), 1959, S. 75—90.

[27] КОГАН, С. Я.: О решении задачи Неймана альтернирующим методом Шварца. - Докл. Акад. Наук СССР (Новая Серия) 65, 1949, S. 261—264.

[28] MAURIN, K.: Besprechung von [26], Zbl. Math. 84, 1960, S. 94.

[29] HILDEBRANDT, S.: Einige konstruktive Methoden bei Randwertaufgaben für lineare partielle Differentialgleichungssysteme und in der Theorie harmonischer Differentialformen. - Erscheint im J. Reine Angew. Math.

Gedruckt März 1963.