ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

332

ÜBER DAS EXISTENZGEBIET VON INTEGRALEN PARTIELLER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG

VON

JOUKO MANNINEN

HELSINKI 1963
SUOMALAINEN TIEDEAKADEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1963.332

Am 11 Januar 1963 vorgelegt von R. NEVANLINNA und OLLI LEHTO

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1963

Über das Existenzgebiet von Integralen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung

1. Bei der Behandlung eines Anfangswertproblems für ein System von partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung ist bekanntlich zuerst zu untersuchen, ob das Problem überhaupt Lösungen in der Umgebung der Anfangsmannigfaltigkeit zulässt und ob die Lösung durch die Anfangsbedingungen eindeutig bestimmt ist. Neben diesen Betrachtungen rein lokaler Natur erhebt sich die Frage, wie gross das Gebiet ist, in dem das Problem eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Diese Frage sollte speziell in der heutigen Entwicklungslage der praktischen Mathematik beachtenswert sein, u.a. deshalb weil grosse elektronische Rechengeräte bei Behandlung der Systeme partieller Differentialgleichungen angewendet werden können. Im folgenden wird nun ein Versuch gemacht, Abschätzungen des Existenzgebietes der eindeutig bestimmten Lösung abzuleiten. Dabei wollen wir nach möglichst grosser Genauigkeit streben, weniger nach praktischer Einfachheit der Abschätzungen. Unsere Methode, die sich auch auf Systeme von impliziten partiellen Differentialgleichungen anwenden lässt, fusst auf dem von F. und R. Nevanlinna entwickelten koordinatenfreien Infinitesimalkalkül, auf der sog. absoluten Analysis[1].

2. *Hilfssatz über implizite Funktionen.* Es sei $f(x, y)$ eine in den Kugeln $|x| < A_x$ $(< \infty)$ und $|y| < A_y$ $(< \infty)$ der Räume R_x^m bzw. R_y^n definierte Funktion mit Werten in dem Raum R_z^n $(m\,, n < \infty)$[2]. Wir betrachten die Gleichung

---

[1] In bezug auf die Grundbegriffe der absoluten Analysis verweisen wir auf die Monographie [5] der Herren Nevanlinna.

Aus der reichhaltigen Literatur zu der Theorie von Systemen partieller Differentialgleichungen seien hier die von Kamke [3] (S. 352—362) und Wazewski [8], [9] gegebenen Abschätzungen des Existenzgebietes erwähnt. Diese Verfasser haben die Frage in Koordinatenform betrachtet (die Differentialgleichung als nach einer partiellen Ableitung gelöst vorausgesetzt, eine Koordinatenhyperebene als Anfangsmannigfaltigkeit gewählt und die Existenz in einer Zone oder in einer Doppelpyramide bewiesen). Verallgemeinerungen dieser älteren Arbeiten auf Systeme partieller Differentialgleichungen sind in den letzten Jahren u.a. von Szarski [7] und Pawelski [6] gegeben worden

[2] Wir bezeichnen einen reellen linearen Raum mit $R_u = R_u^p$, wobei u die Variable

$$f(x, y) = 0, \tag{1}$$

und bestimmen unter gewissen Voraussetzungen ein Gebiet, in dem y durch diese Gleichung als eine eindeutige Funktion von x definiert wird. Daneben wird auch eine Abschätzung für die Funktion $y = y(x)$ gewonnen.

Es sei also angenommen:

1. Die Funktion $f(x, y)$ ist für $|x| < A_x$, $|y| < A_y$ zweimal stetig differenzierbar.

2. $f(0, 0) = 0$.

3. $\inf\limits_{|dy|=1} |f_y(0, 0)\, dy| = \mu > 0$, d.h. der Operator $f_y(0, 0)$ ist regulär.

Wir definieren zwei stetige nichtnegative monoton wachsende Funktionen von zwei reellen Variablen ϱ, r $(\geqq 0)$[3]

$$M(\varrho, r) = \sup_{\substack{|x| \leqq \varrho \\ |y| \leqq r}} |f_x(x, y)|,$$

$$\varphi(\varrho, r) = \sup_{\substack{|x| \leqq \varrho \\ |y| \leqq r}} |f_y(x, y) - f_y(0, 0)|.$$

Über die Funktion $M(\varrho, r)$ sei noch zusätzlich angenommen:

4. $M(\varrho, 0) > 0$, für $\varrho > 0$.

Wegen der vorausgesetzten Stetigkeit von f_y folgt $\varphi(\varrho, r) < \mu$ für genügend kleine ϱ und r. Es sei ϱ_0 die obere Grenze derjenigen Zahlen $\varrho \leqq A_x$, für die $\lim\limits_{r \to 0} \varphi(\varrho, r) < \mu$, und $r_0(\varrho)$ die obere Grenze derjenigen Zahlen $r \leqq A_y$, für die $\varphi(\varrho, r)$ mit festem $\varrho < \varrho_0$ kleiner als μ bleibt. Für $|x| \leqq \varrho < \varrho_0$, $|y| < r < r_0(\varrho)$ ist

$$\inf_{|dy|=1} |f_y(x, y)dy| \geqq \inf_{|dy|=1} |f_y(0, 0)dy| - \sup_{\substack{|x| \leqq \varrho \\ |y| \leqq r}} |f_y(x, y) - f_y(0, 0)|$$
$$= \mu - \varphi(\varrho, r) > 0;$$

der Operator $f_y(x, y)$ ist also dann regulär.

Ist die Funktion $y = y(x)$ durch (1) definiert, so ergibt sich von (1) durch Differentiation nach x

$$f_x(x, y)dx + f_y(x, y)\, y'(x)dx = 0 \tag{2}$$

oder, f_y als regulär vorausgesetzt,

$$dy = y'(x)dx = -\,(f_y(x, y))^{-1} f_x(x, y)dx, \tag{3}$$

---

und p die Dimension des Raumes angibt. Die Norm eines Vektors $u \in R_u$ im Sinne der in R_u eingeführten (etwa Minkowskischen) Metrik sei wie üblich mit $|u|$ bezeichnet.

[3] Die Norm $|A|$ einer linearen Abbildung $A: R_x \to R_y$ ist durch $|A| = \sup\limits_{|h|=1} |Ah|$ definiert.

und die Funktion $y = y(x)$ ist somit eine Lösung der Differentialgleichung (3). Ist umgekehrt $y = y(x)$ eine Lösung von (3), für die $y(0) = 0$, so gilt wegen (2) $df(x, y(x)) = 0$, und die Gleichung (1) wird identisch erfüllt.

Die Differentialgleichung (3) ist eine Gleichung von der Form

$$dy = F(x, y)dx,$$

wobei der Operator $F(x, y) = -(f_y(x, y))^{-1} f_x(x, y)$ in einer konvexen Umgebung von (0, 0) im Produktraum $R_x \times R_y$ stetig differenzierbar ist. Die Theorie von Differentialgleichungen besagt[4], dass eine Differentialgleichung dieser Art vollständig integrierbar ist, wenn die bekannte Integrabilitätsbedingung

$$(F_x + F_y F)hk - (F_x - F_y F)kh = 0 \qquad (h, k \in R_x)$$

für alle vorkommenden Werte x, y besteht. Das ist aber hier gerade der Fall wegen der speziellen Form des Operators F. Die durch den Anfangspunkt (0, 0) gehende, eindeutig bestimmte Integralfläche existiert also bis zum Rand desjenigen konvexen Gebietes, in dem F die erwähnte stetige Differenzierbarkeit besitzt. Die Aufgabe der Abschätzung des Existenzgebietes einer impliziten Funktion ist somit auf die Abschätzung desjenigen der Lösung einer Differentialgleichung erster Ordnung zurückgeführt worden.

Wir bezeichnen mit $\psi(\varrho, r)$ die nach den beiden Variablen monoton zuwachsende Funktion

$$\psi(\varrho, r) = \frac{M(\varrho, r)}{\mu - \varphi(\varrho, r)},$$

die für $\varrho < \varrho_0, r < r_0(\varrho)$ stückweise stetig differenzierbar ist. Der Differentialgleichung

$$\frac{dr}{d\varrho} = \psi(\varrho, r)$$

kann man eine der Bedingung $r(0) = 0$ genügende Funktion $\bar{r}(\varrho)$ zuordnen, so dass sie die durch die Anfangsbedingung $r(0) = 0$ eindeutig bestimmte Lösung dieser Differentialgleichung in dem Intervall $I = \{\varrho \mid 0 \leqq \varrho < \varrho_0, \bar{r}(\varrho) < r_0(\varrho)\}$ ist. Die Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung (3) genügt nun der Ungleichung

$$|y'(x)| \leqq \psi(\varrho, r)$$

---

[4] Vgl. [5] und [3] S. 135.

auf der Kugel $\{x \mid |x| \leqq \varrho \, , |y(x)| \leqq r\}$ mit $\varrho < \varrho_0, r < r_0(\varrho)$. Daraus geht aber zugleich die Existenz der Funktion $y = y(x)$ in der Kugel $\{x \mid |x| \in I\}$ hervor.

Wir bezeichnen mit $\varrho = \bar{\varrho}(r)$ die inverse Funktion von $\bar{r}(\varrho)$; sie existiert in dem Gebiet $0 \leq r < r_0(\bar{\varrho})$, wobei $\bar{\varrho}$ die obere Grenze derjenigen Zahlen $\varrho < \varrho_0$ ist, für die $\bar{r}(\varrho) < r_0(\varrho)$. Die Funktion $\varrho = \bar{\varrho}(r)$ genügt dazu der Differentialgleichung

$$d\varrho \, / \, dr = 1/\psi(\varrho \, , r) \equiv \chi(\varrho \, , r) \, ,$$

wobei die Funktion χ nach den beiden Variablen stetig und monoton abnehmend ist.

Man erklärt die Funktion

$$P(\varrho \, , r) = \int\limits_0^r \chi \, (\varrho \, , r) \, dr$$

für $\varrho < \varrho_0 \, , r < r_0(\varrho)$ und definiert durch

$$F(\varrho) = \int\limits_0^{r_0(\varrho)} \chi(\varrho \, , r) \, dr = P(\varrho \, , r_0(\varrho) \,)$$

eine monoton abnehmende Funktion für $0 \leq \varrho < \varrho_0$, die für $\varrho > \bar{\varrho}$ der Ungleichung

$$F(\varrho) \leqq \bar{\varrho}(r_0(\varrho) \,) \leqq \bar{\varrho}(r_0(\bar{\varrho}) \,) < \varrho$$

genügt. Bezeichnet man mit ϱ_x die obere Grenze derjenigen Zahlen $\varrho < \varrho_0$, für die $F(\varrho) > \varrho$, so ist $\varrho_x \leqq \bar{\varrho}$, und die Funktion $r = \bar{r}(\varrho)$ existiert für $0 \leqq \varrho \leqq \varrho_x$. Das letzte Ergebnis heisst aber auch: *die Funktion* $y = y(x)$ *existiert im Gebiet* $|x| < \varrho_x$.

Es sei $r = G(\varrho)$ die eindeutige inverse Funktion von $\varrho = \varrho(r) = P(\varrho_x, r)$. Dann gilt für $|x| \leqq \varrho < \varrho_x$ die Abschätzung $\bar{r}(\varrho) \leqq G(\varrho)$, und es ist also

$$|y(x)| \leqq \bar{r}(\varrho) \leqq G(\varrho) \, .$$

Wir haben so den folgenden *Hilfssatz 1* erreicht:

Unter den gemachten Annahmen 1—4 definiert die Gleichung (1) die Funktion $y = y(x)$ $(y(0) = 0)$ in der Kugel $|x| < \varrho_x$, wobei ϱ_x die obere Grenze derjenigen Zahlen $\varrho < \varrho_0$ bezeichnet, für die $P(\varrho \, , r_0(\varrho)) > \varrho$ gilt. Diese Funktion ist stetig differenzierbar und genügt der Abschätzung

$$|y(x)| \leqq G(|x|) \, .$$

Die erreichten Abschätzungen für das Existenzgebiet und für die Funktion $y(x)$ sind unter den gemachten Annahmen die bestmöglichen, d.h. es lassen sich Beispiele (etwa die Gleichung $f(x, y) = x^2 + y^2 - ay = 0$, $a > 0$) aufzeigen, bei denen diese Abschätzungen genau sind.

3. *Hilfssatz über Differentialgleichungen.* Betrachtet sei eine Differentialgleichung der Form

$$dy = f(y)dt \qquad (y, dy \in R_y^n, \quad dt \in R_t^1) \tag{4}$$

wobei der Operator $f(y)$ folgende Eigenschaften hat:

1. $f(y)$ ist eine in der Kugel $|y - y_0| \leqq r_y (< \infty)$ des Raumes R_y^n stetige Funktion von y und erklärt für jedes y dieser Kugel eine lineare Abbildung von R_t^1 in R_y^n.
2. $f(y)$ erfüllt die Lipschitz-Bedingung

$$|f(y_1) - f(y_2)| \leqq M|y_1 - y_2|$$

für je zwei Punkte y_1, y_2 in der Kugel $|y - y_0| \leqq r_y$.

In Koordinatenform entspricht der Differentialgleichung (4) ein Normalsystem

$$dy_i/dt = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4'}$$

Gemäss der Theorie von Differentialgleichungen[5] hat obige Gleichung (oder obiges Gleichungssystem) eine und nur eine Lösungskurve $y = Y(t)$, die durch den Punkt (t_0, y_0) geht, und diese Kurve existiert bis zum Rande des Zylindergebietes

$$|y - y_0| < r_y, \qquad |t| < \infty,$$

in $R_t \times R_y$, wo der Operator f definiert ist. Wir wollen das Existenzgebiet für die Lösung unter der Anfangsbedingung $Y(t_0) = y_0$ abschätzen, indem wir eine Abschätzung für die Norm $|Y(t) - y_0|$ bilden und darauf achten, wo diese kleiner als r_y bleibt.

Es sei $F(r)$ eine in dem Intervall $0 \leqq r < r_y$ definierte, stetige reelle Funktion, die

a) für $r \geqq |y - y_0|$ der Ungleichung $F(r) \geqq |f(y)|$ genügt,

b) für $0 \leqq r_1, r_2 < r_y$ eine Lipschitz-Bedingung erfüllt:

$$|F(r_1) - F(r_2)| \leqq \bar{M}|r_1 - r_2|$$

Speziell kann z.B.

$$F(r) = \sup_{|y-y_0| \leqq r} |f(y)| \tag{5}$$

gesetzt werden.

[5] Vgl. z.B. [3] S. 135.

Die Differentialgleichung

$$ds = F(s)dt$$

hat in einer Strecke rechts von t_0 eine und nur eine Lösung $s = S(t)$ unter der Anfangsbedingung $S(t_0) = 0$. Wird die eindeutige inverse Funktion von $S(t)$ mit $t = T(s)$ bezeichnet, so ist für $0 \leqq r < r_y$

$$T(r) = t_0 + \int_0^r \frac{ds}{F(s)} .$$

Die Lösung $s = S(t)$ existiert, solange $0 \leqq S(t) < r_y$ ist, also für $t_0 \leqq t < t_0 + \varrho_t$, wobei

$$\varrho_t = T(r_y) - t_0 = \int_0^{r_y} \frac{ds}{F(s)} .$$

Sei $[t_0 , t_1]$ ein Intervall rechts von t_0, in dem $Y(t)$ und $S(t)$ existieren. Die Funktion $\varphi(t) = |Y(t) - y_0|$ ist dort stückweise stetig differenzierbar, und es gilt die Ungleichung

$$\varphi'(t) \leqq |Y'(t)| = |f(Y(t))| \leqq F(|Y(t) - y_0|) = F(\varphi) .$$

Es sind $\varphi(t)$ bzw. $S(t)$ für $0 \leqq t \leqq t_1$ Lösungen der Differentialgleichungen

$$\varphi'(t) = G(\varphi) \qquad \text{bzw.} \qquad S'(t) = F(S)$$

unter der Anfangsbedingung

$$\varphi(t_0) = S(t_0) = 0 ,$$

wobei die rechten Seiten $G(u)$ und $F(u)$ in der Beziehung $G(u) \leqq F(u)$ stehen. Daher schliesst man: $\varphi(t) \leqq S(t)$ für $t_0 \leqq t \leqq t_1$ [6]. Das bedeutet, die Funktion $\varphi(t)$ existiert in dem ganzen Intervall $t_0 \leqq t < t_0 + \varrho_t$, oder mit Rücksicht auf Obiges, *dass* $Y(t)$ *für* $|t - t_0| < \varrho_t$ *existiert.*

Wir haben somit den folgenden *Hilfssatz 2:*

Es sei $f(y)$ eine lineare Operatorfunktion mit den Eigenschaften 1, 2 und $F(r)$ eine in dem Intervall $0 \leqq r < r_y$ definierte stetige reelle Funktion mit den Eigenschaften a, b. Dann hat die Differentialgleichung (4) unter der Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$ eine und nur eine Lösung, in deren Existenzintervall wenigstens die Strecke

$$|t - t_0| < \varrho_t = \int_0^{r_y} \frac{ds}{F(s)}$$

eingeht.

[6] Vgl. [3] S. 91.

Die spezielle Wahl (5) der Funktion $F(r)$ ergibt die genaueste Abschätzung, die unter den gemachten Annahmen nicht zu vergrössern ist. Dies geht aus dem Beispiel

$$f(y) = \frac{y}{|y|} \frac{1}{r_y - |y|}$$

hervor.

4. Nach den obigen Vorbereitungen wollen wir zu dem eigentlichen Gegenstand dieser Arbeit übergehen. Wir betrachten eine implizite Differentialgleichung erster Ordnung,

$$H(x\,,\, dz/dx\,,\, z) = 0 \quad (x \in R_x^m\,,\, z \in R_z^1\,,\, H \in R_H^p\,,\, 1 \leqq p < m), \tag{6}$$

nebst einer gegebenen »Anfangsmannigfaltigkeit» $x = \xi(t)$ $(t \in R_t^{m-p})$ und einer »Anfangswertfunktion» $z = \zeta(t)$. Falls nun solche Elemente $x_0 = \xi(t_0)$, $z_0 = \zeta(t_0)$, $y_0 \in R_y^m = R_{x*}$ existieren [7], bei denen $H(x_0\,, y_0\,, z_0) = 0$, $\zeta'(t_0) = y_0\, \xi'(t_0)$ ist, und falls die Funktionen $H, \xi\,, \zeta$ gewisse weitere Voraussetzungen erfüllen, so ist bekanntlich in der Umgebung von x_0 die Existenz einer eindeutig bestimmten Funktion $z = z(x)$ garantiert, die der Differentialgleichung (6) und der Gleichung $z(\xi(t)) = \zeta(t)$ genügt [8]. Wir wollen im folgenden das Existenzgebiet dieser Funktion abschätzen, nachdem wir die Annahmen der Einfachheit halber folgendermassen formuliert haben:

Es seien R_u^p und R_v^{m-p} zwei orthogonale Komplemente des euklidisch metrisierten Argumentraums R_x^m. Dementsprechend zerfällt dann der zu R_x duale Raum R_y^m, bezüglich der von der R_x-Metrik induzierten dualen Metrik, in zwei Orthogonalkomplemente R_f^p und R_g^{m-p}, so dass $g\ u = f\ v = 0$ für $g \in R_g$, $f \in R_f$, $u \in R_u$, $v \in R_v$. Für die Funktion $H(u, v, f, g, z)$, deren Werte in R_H^p liegen, wird folgendes angenommen:

1. $H(u, v, f, g, z)$ ist in dem Gebiet $U : |u - u_0| < A_u$, $|v - v_0| < A_v$, $|f - f_0| < A_f$, $|g - g_0| < A_g$, $|z - z_0| < A_z$ zweimal stetig differenzierbar und $H(u_0, v_0, f_0, g_0, z_0) = 0$.

2. $H_f(u_0, v_0, f_0, g_0, z_0)$ ist eine *reguläre* lineare Abbildung von R_f auf R_H.

3. Für alle Elemente (u, v, f, g, z) in U, die der Gleichung $H(u, v, f, g, z) = 0$ genügen, gilt die »Integrabilitätsbedingung»

$$R\, h\, k = 0 \qquad (h\,, k \in R_t = R_{H*})\,,$$

wobei $R = R(u, v, f, g, z)$ den durch

[7] Unter dem zu R_x dualen Raum R_y der auch mit R_{x*} bezeichnet wird, versteht man den Raum der in R_x definierten reellen linearen Funktionen.

[8] Vgl. z.B. [2] S. 53—68; in [4] wird auch dasselbe Resultat in der hier benutzten »absoluten» Schreibweise abgeleitet.

$$R\,h\,k = \wedge\ \{\ (H_u^* + f\,H_z^*)h\ H_f^*k + (H_v^* + g\,H_z^*)h\ H_g^*k\}$$

definierten alternierenden bilinearen Operator bezeichnet[9].

Wit setzen im besonderen voraus, dass die Anfangsfläche, in der die Funktionswerte gegeben sind, eine zu R_v parallele $(m-p)$-dimensionale Hyperebene ist. Dann ist in den Punkten dieser Fläche $u = u_0$ (= konst.) und die Variable v kann als Parameter gewählt werden. Die gegebenen Funktionswerte bezeichne man mit $\zeta(v)$ und nehme folgendes an:

4. $z = \zeta(v)$ ist für $|v - v_0| < A_v$ eine dreimal stetig differenzierbare Funktion, für die $|\zeta(v) - z_0| < A_z$, $|\zeta'(v) - g_0| < A_g$.

5. $\zeta(v_0) = z_0$, $\zeta'(v_0) = g_0$.

Es existiert also, wie schon bemerkt, in der Umgebung von $x_0 = (u_0\,, v_0)$ eine eindeutig bestimmte Funktion $z = z(x) = z(u\,, v)$, die die Gleichung (6) und die Bedingung $z(u_0\,, v) = \zeta(v)$ erfüllt. Bei Abschätzung des Existenzgebietes dieser Funktion wollen wir die oben gegebenen Hilfssätze sowie den Umkehrsatz von Nevanlinna [5] und Bartle [1] benutzen. Wir gehen aus von der Gleichung

$$H(u_0\,, v\,, f\,, \zeta'(v)\,, \zeta(v)\,) = 0\,, \tag{7}$$

die die Funktion $f = f(v)$ in einer Umgebung von v_0 bestimmt, und wollen mittels des Hilfssatzes 1 diese Umgebung abschätzen. Darauf bildet man die charakteristischen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} du &= H_f^*\,dt\,, \qquad dv = H_g^*\,dt\,, \qquad & df &= (-\,H_u^* - H_z^*f)dt\,,\\ dg &= (-\,H_v^* - H_z^*g)dt\,, & dz &= (fH_f^* + gH_g^*)dt\,, \end{aligned} \tag{8}$$

die sich für den Produktraum $R_\Omega = R_u \times R_v \times R_f \times R_g \times R_z$ auch in der Form

$$d\Omega = \Phi\,(\Omega)\,dt \tag{8'}$$

zusammenfassen lassen. Dieses System hat in der Umgebung des Nullpunktes ein Integral $\Omega(t) = \Omega(t\,;\bar\Omega)$, das durch die Anfangsbedingung

$$\Omega(0) = \bar\Omega = (u_0\,, v\,, f(v)\,, \zeta'(v)\,, \zeta(v)\,) \tag{9}$$

(mit festem v) eindeutig bestimmt ist, vorausgesetzt, dass der Punkt $\bar\Omega$ zu dem Gebiet U gehört. Ein Existenzgebiet für dieses Integral ergibt sich durch Hilfssatz 2. Die Lösung von (8) unter der Anfangsbedingung (9) definiert in dem Produktraum $R_\omega = R_v \times R_t$ in der Umgebung von $\omega_0 = (v_0\,, t_0)$ eine eindeutige differenzierbare Funktion

$$\Omega = \Omega(\omega) = \Omega(v\,, t) = (U(v\,, t)\,, V(v\,, t)\,, F(v\,, t)\,, G(v\,, t)\,, Z(v\,, t)\,)\,, \tag{10}$$

---

[9] Einer linearen Abbildung $A\colon R_u \to R_x$ ordnet man durch $x^*(Au) = (A^*x^*)u$ $(u \in R_u\,, x^* \in R_{x^*})$ eine eindeutig bestimmte duale Abbildung $A^*: R_{x^*} \to R_{u^*}$ zu.

die in einer Umgebung von ω_0 umkehrbar ist. Durch Einführung geeigneter Hilfsmetriken in R_ω und R_Ω lässt sich das Existenzgebiet der Umkehrfunktion durch den erwähnten Satz abschätzen, wobei zugleich eine Abschätzung für das Existenzgebiet der Lösung der partiellen Differentialgleichung (6) gewonnen wird.

Wir kommen also auf die Gleichung (7) und auf die zueinander dual metrisierten Räume R_f und R_u bzw. R_g und R_v zurück. Der Hilfssatz 1 ist nun anwendbar, wobei die Konstante μ den Wert

$$\mu_0 = \inf_{|df|=1} |H_f(u_0\,, v_0\,, f_0\,, g_0\,, z_0)df|$$

hat, und weiter

$$M(\varrho\,, r) = \sup_{\substack{|v-v_0|\leqq\varrho \\ |f-f_0|\leqq r}} |H_v + H_g\zeta'' + H_z\zeta'| \qquad (u = u_0\,, g = \zeta'(v)\,, z = \zeta(v)\,)\,,$$

$$\varphi(\varrho\,, r) = \sup_{\substack{|v-v_0|\leqq\varrho \\ |f-f_0|\leqq r}} |H_f(u_0\,, v\,, f\,, \zeta'(v)\,, \zeta(v)\,) - H_f(u_0\,, v_0\,, f_0\,, g_0\,, z_0)|$$

sind. Bei Anwendung der im Hilfssatz benutzten Bezeichnung $\psi(\varrho\,, r)$ kann das Ergebnis jetzt wie folgt ausgedrückt werden:

Die Funktion $f = f(v)$ existiert in dem Gebiet $|v - v_0| < \varrho_v$, wobei

$$\varrho_v = \sup_{\varrho\in B} \varrho \qquad \left(B = \left\{\varrho \,\Big|\, \int_0^{r_0(\varrho)} \frac{dr}{\psi(\varrho\,, r)} > \varrho\right\}\right).$$

Für $|v - v_0| \leqq \varrho < \varrho_v$ gilt

$$|f(v) - f_0| \leqq G(\varrho)\,,$$

worin $G(\varrho)$ die in Hilfssatz 1 erklärte inverse Funktion von $\varrho = \varrho(r) = P(\varrho_v\,, r)$ bezeichnet.

Zweitens schätzen wir das Existenzgebiet der Lösung von charakteristischen Differentialgleichungen ab, die bei gewisser Parameterwahl die Form (8) haben. Wir führen in den Raum R_Ω^{2m+1} eine Minkowskische Hilfsmetrik ein, indem wir für die Strecke $d\Omega$ mit den Komponenten du, dv, df, dg, dz eine Norm

$$|d\Omega| = \max\left(\frac{|du|}{A_u}\,, \frac{|dv|}{A_v}\,, \frac{|df|}{A_f}\,, \frac{|dg|}{A_g}\,, \frac{|dz|}{A_z}\right)$$

definieren. Wenn $\overline{\Omega}$ zu dem Gebiet U gehört, wie im folgenden vorausgesetzt wird, liegt die Kugel

$$|\Omega - \overline{\Omega}| < 1 - |\overline{\Omega} - \Omega_0| = 1 - \max\left\{\frac{|v-v_0|}{A_v}\,, \frac{|f(v)-f_0|}{A_f}\,, \frac{|\zeta'(v)-g_0|}{A_g}\,, \frac{|\zeta(v)-z_0|}{A_z}\right\}$$

ganz in dem Gebiet U. Wir bezeichnen

$$\sigma(\Omega) = \sigma(u, v, f, g, z) = \max\left\{\frac{|H_f|}{A_u}, \frac{|H_g|}{A_v}, \frac{|H_u + H_z f|}{A_f}, \frac{|H_v + H_z g|}{A_s}, \frac{|H_f f + H_g g|}{A_z}\right\},$$

$$F(\lambda) = \sup_{|\Omega - \Omega_0| \leqq \lambda} (\sigma(\Omega)) ,$$

$$T(\lambda) = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{F(\lambda)}$$

und die eindeutige inverse Funktion der letzten mit

$$\lambda = \Lambda\,(t) ,$$

so dass u.a. $|\Phi(\Omega)| \leqq F(\lambda)$ für $|\Omega - \Omega_0| \leqq \lambda$ gilt. Der Hilfssatz 1 ist nun auf die Funktionen $\Phi(\Omega)$ und $F(\lambda)$ anwendbar und liefert somit für das Existenzgebiet der Lösung von (8) eine Abschätzung:

$$|t - t_0| < \varrho_t = \int_{|\overline{\Omega} - \Omega_0|}^{1} \frac{d\lambda}{F(\lambda)} = T(1) - T(|\overline{\Omega} - \Omega_0|) .$$

Man bezeichne

$$\lambda(\varrho) = \sup_{|v - v_0| \leqq \varrho} \left(\frac{\varrho}{A_v}, \frac{|\zeta'(v) - g_0|}{A_g}, \frac{G(\varrho)}{A_f}, \frac{|\zeta(v) - z_0|}{A_z}\right) ,$$

so dass

$$|\overline{\Omega} - \Omega_0| \leqq \lambda(|v - v_0|) .$$

Die Funktion (10) ist also in dem Gebiet

$$(11) \qquad |v - v_0| < \varrho_v , \qquad |t - t_0| < \int_{\lambda(|v - v_0|)} \frac{d\lambda}{F(\lambda)}$$

definiert und in den beiden Variablen sogar stetig differenzierbar.

Um die zu betrachtende partielle Differentialgleichung (6) zu integrieren, ist die Variable $\omega = (v\,,\,t) = \omega(x)$ aus der Gleichung $x = X(v\,,\,t) = (U(v\,,\,t)\,,\,V(v\,,\,t))$ zu lösen und danach in die Gleichung $z = Z(v\,,\,t)$ zu substituieren. Das Gebiet, in dem diese Lösung möglich ist, kann durch den Umkehrsatz abgeschätzt werden, nachdem in R_ω eine Hilfsmetrik mit der Norm

$$|d\omega| = \max\,(|dv|\,,\,|dt|/\mu_0)$$

eingeführt worden ist, in der

$$\mu_0 = \inf_{|df| = 1} |H_f(u_0\,,\,v_0\,,f_0\,,\,g_0\,,\,z_0)\,df| .$$

Bei dieser Wahl der Hilfsmetrik hat die Konstante μ des Umkehrsatzes den Wert $\mu = 1$. Um die Funktion

$$\varphi(r) = \sup_{|\omega-\omega_0| \leqq r} |X'(\omega) - X'(\omega_0)| = \sup_{\substack{|\omega-\omega_0| \leqq r \\ |d\omega| = 1}} |(X'(\omega) - X'(\omega_0))d\omega|$$

weiter abzuschätzen, setze man

$$K(\lambda) = \sup_{|\Omega-\Omega_0| \leqq \lambda} \sqrt{|H_f(\Omega) - H_f(\Omega_0)|^2 + |H_g(\Omega) - H_g(\Omega_0)|^2}\,.$$

Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\varphi(r) &\leqq \sup_{|\omega-\omega_0| \leqq r} (|X_t(\omega) - X_t(\omega_0)| + |X_v(\omega) - X_v(\omega_0)|) \\
&= \sup_{|\omega-\omega_0| \leqq r} \sqrt{|U_t(\omega) - U_t(\omega_0)|^2 + |V_t(\omega) - V_t(\omega_0)|^2} \\
&+ \sup_{|\omega-\omega_0| \leqq r} \sqrt{|U_v(\omega) - U_v(\omega_0)|^2 + |V_v(\omega) - V_v(\omega_0)|^2} \\
&\leqq \sup_{|\omega-\omega_0| \leqq r} \sqrt{|H_f(\Omega(\omega)) - H_f(\Omega_0)|^2 + |H_g(\Omega(\omega)) - H_g(\Omega_0)|^2} \\
&+ \sqrt{2} \sup_{|\omega-\omega_0| \leqq r} \left| \left(\frac{\partial\Omega(t\,;\,\overline{\Omega}(v))}{\partial\overline{\Omega}} - \frac{\partial\Omega(0\,;\,\overline{\Omega}(v))}{\partial\overline{\Omega}} \right) \right| \\
&\leqq K(\Lambda(T(\lambda(r)) + \mu_0 r)) + \sqrt{2}\,(e^{\int_0^{\mu_0 r} k(\tau\,,\,\lambda(r))d\tau} - 1)\,,
\end{aligned}$$

wobei

$$k(\tau\,,\,\lambda) = \sup_{|\Omega-\Omega_0| \leqq \Lambda(T(\lambda)+\tau)} |\Phi'(\Omega)|$$

bezeichnet.

Nach dem Umkehrsatz in [1] existiert somit die eindeutige Funktion $\omega = \omega(x)$ in der Kugel

$$|x - x_0| < R = \int_0^{r_0} (\mu_0 - \varphi(\varrho))d\varrho\,, \tag{12}$$

deren Radius sich wie folgt abschätzen lässt:

$$R \geqq \bar{R} = \int_0^{r_0} (1 - K(\Lambda(T(\lambda(\varrho)) + \mu_0\varrho)) - \sqrt{2}\,(e^{\int_0^{\mu_0\varrho} k(\tau\,,\,\lambda(\varrho))d\tau} - 1))d\varrho\,,$$

wobei r_0 die obere Grenze derjenigen Zahlen r $(< r_1)$ bezeichnet, für die $\varphi(r) < 1$ ist. Hierbei ist r_1 der Radius der grössten R_ω-Kugel im Gebiet (11), also die Wurzel der Gleichung

$$\mu_0 r = \int_{\lambda(r)}^{1} \frac{d\lambda}{F(\lambda)} .$$

Die Kugel (12) ist also in dem Existenzgebiet der Lösung der Differentialgleichung (6) enthalten, und $\bar{R}$ dient folglich auch zur Abschätzung des letzteren.

5. Die obigen Ergebnisse sind in einer sehr allgemeinen Form angegeben. Um eine konkretere Darstellung der Methode vorzulegen, wollen wir die spezielle partielle Differentialgleichung

$$f g = \frac{2\, u\, z\, (1 + v^2)}{(1 - u^2)^2\, (1 - v^2)^2} \quad \left(u \text{ , } v \text{ reelle Variablen;} f = \frac{\partial z}{\partial u} \text{ , } g = \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

betrachten und das Existenzgebiet der durch die Anfangskurve $u = 0$, $z = \dfrac{v}{1 - v^2}$ gehenden Lösung abschätzen. Dabei werden wir auch die Genauigkeit der Abschätzung erfahren, denn die explizite Lösung der Differentialgleichung unter der erwähnten Anfangsbedingung ist

$$z = \frac{v}{(1 - u^2)\, (1 - v^2)} ,$$

welche Funktion das exakte Existenzgebiet $|u| < 1$, $|v| < 1$ hat.

Die Funktion $f = f(v)$ unserer allgemeinen Betrachtung ist hier wegen der speziellen Form der Differentialgleichung explizit auflösbar, und zwar ist $f(v) \equiv 0$, so dass in der Funktion $\lambda(\varrho)$ auch $G(\varrho) \equiv 0$ gesetzt werden kann.

Man wählt $A_u = A_v = \delta < 1$, $A_f = A_g = A \geqq \dfrac{1 + \delta^2}{(1 - \delta^2)^2}$ und hat also $F(\lambda) = \max F_i(\lambda)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$,

wobei

$$F_1(\lambda) = \frac{1 + A\lambda}{\delta} , \qquad F_2(\lambda) = 2\lambda(1 + A\lambda) ,$$

$$F_3(\lambda) = \frac{2\lambda(1 + \delta^2\lambda^2)\, (1 + \delta\lambda + 3\delta^2\lambda^2 - \delta^3\lambda^3)}{(1 - \delta^2\lambda^2)^5} ,$$

$$F_4(\lambda) = \frac{2\delta\lambda}{(1 - \delta^2\lambda^2)^5} \left(2\delta\lambda^2 (3 + \delta^2\lambda^2) + (1 - \delta^4\lambda^4)\, (\lambda + A^{-1}\right) .$$

Weiter hat man

$$\lambda(\varrho) = \max \left(\frac{\varrho}{\delta} , \frac{\varrho^2(3 - \varrho^2)}{A(1 - \varrho^2)^2} , \frac{\varrho}{A(1 - \varrho^2)}\right) ,$$

und

$$k(\tau\,,\,\lambda) = S(A(T(\lambda)+\tau))\,,\ \text{mit}\ S(\lambda) = \max\left(\frac{A}{\delta}\,,\,2+4A\lambda\,,\,W(\delta\lambda)\right),$$

wobei $W(t)$

$$= \frac{2}{A(1-t^2)^5}\left(\delta t(1-t^4) + (1+At)(1+10t^2+5t^4) + \frac{2t^2}{1-t^2}\max\,(w_1(t)\,,\,w_2(t))\right)$$

mit

$$w_1(t) = 2A(3+14t^2+3t^4) + \delta\,(3-2t^2-t^4)\,,$$

$$w_2(t) = A(9+22t^2+9t^4) - \delta(3-2t^2-t^4)\,.$$

Je nach der anpassenden Wahl der Konstante δ, A kann nun nach unserer Methode eine Abschätzung des Existenzradius ausgerechnet werden; die grösste Abschätzung $R = 0{,}026$ ergibt sich mit $\delta = 0{,}39$, $A = 1{,}60$.[10]

Die übliche Wazewskische Abschätzung gibt, angewandt auf das obige Beispiel, ein Existenzgebiet

$$|u| < 7\cdot 10^{-7}\,,\ |v| < 0{,}0075 - 2{,}3\cdot|u|\,.$$

6. Wir haben in den obigen Betrachtungen vorausgesetzt, dass die Werte der Lösung $z = z(x)$ auf einer $(m-p)$-dimensionalen Hyperebene vorgeschrieben sind. Dies bedeutet jedoch keine Einschränkung. Denn, es sei vielmehr angenommen, dass die Funktionswerte auf einer beliebigen, dreimal stetig differenzierbaren $(m-p)$-dimensionalen durch den Punkt x_0 gehenden Fläche gegeben sind. Wählt man dann den Unterraum R_v parallel zu der Tangentialebene in Punkt x_0, so kann diese Fläche in der Form $u = u_0 + \gamma(v)$ ausgedrückt werden, wobei die Funktion $\gamma(v)$ in einer Umgebung von v_0 eindeutig und dreimal stetig differenzierbar ist ($\gamma(v_0) = 0$, $\gamma'(v_0) = 0$). Die Transformation $u = \bar{u} + \gamma(\bar{v})\,,\ v = \bar{v}$ führt die Gleichung $H(u, v, f, g, z) = 0$ in die Gleichung

$$H(\bar{u}+\gamma(\bar{v}), \bar{v}, \bar{f}, \bar{g}+\bar{f}\gamma'(\bar{v}), \bar{z}) = \bar{H}(\bar{u}, \bar{v}, \bar{f}, \bar{g}, \bar{z}) = 0$$

über, deren Lösung $\bar{z}(\bar{u}, \bar{v})$ nun auf der Hyperebene $\bar{u} = u_0$ vorgeschriebene Werte hat. Somit ist die Aufgabe auf den schon betrachteten Sonderfall zurückgeführt.

[10] Mit Dankbarkeit sei erwähnt, dass dieses Ergebnis von Herrn Erkki Mikkola, cand. rer. nat. (Abteilung für angewandte Mathematik, Universität Helsinki), mit IBM 1620 ausgerechnet worden ist.

Literatur

[1] BARTLE, R. G.: On the opennes and inversion of differentiable mappings. - Ann. Acad. Scient. Fennicæ A. I. 257, 1958, 8 S.

[2] CHARATHÉODORY, C.: Variationsrechnung und partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, I, - 2. Aufl., Teubner, Leipzig, 1956, XII + 171 S.

[3] KAMKE, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen. - Akademische Verlagsges., Leipzig, 1930, XIV + 436 S.

[4] MANNINEN, J.: Zur Charakteristikentheorie von Systemen partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. - Ann. Acad. Scient. Fennicæ A. I. 283, 1960, 37 S.

[5] NEVANLINNA, F. und R.: Absolute Analysis. - Grundlehren math. Wiss. 102, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959, VIII + 259 S.

[6] PAWELSKI, W.: Appréciation du domaine d'existence de l'intégrale d'un système involutif d'équations aux dérivées partielles du premier ordre. - Ann. Polon. Math. II. 1, 1955, S. 29—36.

[7] SZARSKI, J.: Sur un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre complètement intégrable. - Ann. Soc. Polon. Math. 24, 1953, S. 9—16.

[8] WAŻEWSKI, T.: Sur le domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre. - Ann. Soc. Polon. Math. 13, 1934, S. 1—9.

[9] —»— Sur l'appréciation du domaine d'existence des intégrales de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre. - Ann. Soc. Polon. Math. 14, 1935, S. 149—177.

Gedruckt März 1963