ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

330

ÜBER SYMMETRISCHE BILINEARABBILDUNGEN VON LINEAREN RÄUMEN

VON

HARRI RIKKONEN

HELSINKI 1962
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1963.330

Am 12 Oktober 1962 vorgelegt von R. NEVANLINNA und OLLI LEHTO

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1962

Symmetrische Bilinearabbildungen

1. Im folgenden werden einige Beziehungen zwischen einer symmetrischen Bilinearabbildung und den zugehörigen Linearabbildungen, die durch Fixierung eines von den beiden Argumenten entstehen, hergeleitet. Ein unserem Satz 1 ähnliches Ergebnis ist früher von Abraham Schwartz in einer differentialgeometrische Untersuchung[1]) angegeben worden.

Es seien E_x^m und E_X^n zwei lineare m- bzw. n-dimensionale Räume mit einem beliebigen kommutativen Koeffizientenkörper (mit unendlich vielen Elementen) und Y eine bilineare symmetrische Abbildung von E_x^m in E_X^n. Es gilt also[2])

$$Y\,h\,k \in E_X^n \quad \text{für} \quad h\,,\,k \in E_x^m$$

und

$$Y\,h\,k = Y\,k\,h\,. \tag{1}$$

Ferner sei die Dimension der linearen Hülle $H(Y)$ der Bildmenge von Y eine gegebene Zahl $p \leqq n$. Wegen der Bilinearität und Symmetrie muss auch

$$p \leqq \tfrac{1}{2}\,m(m+1)$$

gelten. Wenn hier die Ungleichheit vorkommt, kann man die betrachtete Abbildung *ausgeartet* nennen. Solchen Abbildungen schenken wir spezielle Aufmerksamkeit; die nachfolgenden Resultate sind nämlich für den maximalen Fall $p = \frac{1}{2}\,m\,(m+1)$ beinahe trivial. Unser erstes Ziel ist eine Zerlegung von $H(Y)$ zu konstruieren.

2. Fixiert man zum Beispiel das erste Argument h von Y, so erhält man eine lineare Abbildung $Y\,h$, die einen bestimmten *Kern* $K(h)$ in E_x^m und einen bestimmten *Bildraum* $B(h)$ in E_X^n hat. Für die Dimensionen gilt bekanntlich

$$\dim B(h) = m - \dim K(h)\,. \tag{2}$$

Wenn nun h den ganzen Raum E_x^m durchläuft, können diese Zahlen vielleicht variieren. Die Dimension $\dim K(h)$ erhält dabei einen minimalen

---

1) Vgl. [3].

2) Über die Begriffe und Bezeichnungen vgl. [1], [2].

Wert und gleichzeitig $\dim B(h)$ einen maximalen Wert, den wir mit d_1 bezeichnen:

$$d_1 = \max\{\dim B(h)\} . \tag{3}$$

Fixiert man jetzt k_1 so, dass

$$\dim B(k_1) = d_1 , \tag{4}$$

so wird in $H(Y)$ ein d_1-dimensionaler Unterraum $B(k_1)$ festgelegt.

Um den Verlauf kommender Betrachtungen zu verdeutlichen, führen wir in E_x^m einige Mengen ein, die wir entweder »*erlaubt*» oder »*verboten*» nennen. Die erste erlaubte Menge $\mathrm{Erl}(k_1)$ ist der Raum E_x^m, weil

$$\dim B(k_1) \geqq \dim B(h) \text{ für jedes } h \in E_x^m ,$$

so dass die Konkurrenzklasse für k_1 den ganzen Raum E_x^m umfasst.

3. Wir betrachten nun alle Elemente von E_x^m ausser denjenigen, die im Kern $K(k_1)$ liegen. Die letztgenannten Elemente bilden die erste verbotene Menge $\mathrm{Verb}(k_2) = K(k_1)$; die entsprechende zweite erlaubte Menge ist $\mathrm{Erl}\,(k_2) = E_x^m - K(k_1)$[1]. Es gilt also

$$\mathrm{Erl}\,(k_2) \subset \mathrm{Erl}\,(k_1) . \tag{5}$$

Durchläuft h die Menge $\mathrm{Erl}\,(k_2)$, so gibt es einen maximalen Wert für die Dimension des Unterraumes $B(k_1) + B(h)$, den die Unterräume $B(k_1)$ und $B(h)$ aufspannen. Wir fixieren k_2 so, dass

$$\dim\,[B(k_1) + B(k_2)] = \max\{\dim\,[B(k_1) + B(h)]\} , \tag{6}$$

für $h \in \mathrm{Erl}\,(k_2)$.

Wegen (6) und (5) gilt

$$\dim\,[B(k_1) + B(k_2)] \leqq 2\, d_1 .$$

Hier ist das Gleichheitszeichen nur dann möglich, wenn 0 das einzige gemeinsame Element von $B(k_1)$ und $B(k_2)$ ist. Weil k_2 nicht in dem Kern $K(k_1)$ der Abbildung $Y k_1$ enthalten ist, so gilt

$$Y\, k_1\, k_2 = Y\, k_2\, k_1 \neq 0 ,$$

und dieses Element liegt sowohl in $B(k_1)$ als in $B(k_2)$. Es ist also

$$\dim\,[B(k_1) + B(k_2)] = d_1 + d_2 , \text{ mit } d_1 > d_2 .$$

[1]) Wir schreiben $-$ für die mengentheoretische Subtraktion (Bildung des Komplements); $U_1 \oplus U_2$ bzw. $U_1 + U_2$ für den Unterraum, den die Unterräume U_1 und U_2 aufspannen, falls 0 das einzige gemeinsame Element von U_1 und U_2 ist bzw. nicht ist.

4. Um fortwährend von der Symmetrie (1) Gebrauch machen zu können, müssen wir eine neue verbotene Menge Verb (k_3) konstruieren. Verb (k_3) sei die Menge der Vektoren $h \in E_x^m$, die durch $Y\,k_2$ auf den Durchschnitt $B(k_1) \cap B(k_2)$ abgebildet werden. Weil $B(k_1) \cap B(k_2)$ ein Unterraum von E_X^n ist, so ist

$$\text{Verb}\,(k_3) = \{h\,;\; Y\,k_2\,h \in B(k_1) \cap B(k_2)\} \tag{7}$$

ein Unterraum von E_x^m. Es gilt offensichtlich

$$\dim\,[B(k_1) \cap B(k_2)] = \dim B(k_2) - d_2\,,$$

und da der Kern $K(k_2)$ auch in Verb (k_3) enthalten ist, so ist

$$\dim \text{Verb}\,(k_3) = \dim K(k_2) + \dim B(k_2) - d_2 = m - d_2\,.$$

Verb (k_3) ist also ein $(m - d_2)$-dimensionaler Unterraum von E_x^m, während Verb $(k_2) = K(k_1)$ nur $(m - d_1)$-dimensional war. Die erlaubte Menge Erl (k_3) sei nun

$$\text{Erl}\,(k_3) = E_x^m - [\text{Verb}\,(k_2) \cup \text{Verb}\,(k_3)]\,.$$

Es gilt also

$$\text{Erl}\,(k_3) \subset \text{Erl}\,(k_2)\,. \tag{8}$$

Nun setzen wir wie vorher fort. Es gibt einen maximalen Wert für die Dimension des Unterraumes $B(k_1) + B(k_2) + B(h)$, für $h \in$ Erl (k_3), und k_3 wird so fixiert, dass dieser Wert erreicht ist. Wegen (8) und (6) gilt

$$\dim\,[B(k_1) + B(k_2) + B(k_3)] \leqq d_1 + 2\,d_2$$

und $=$ ist möglich, wenn

$$B(k_2) \cap B(k_3) \subset B(k_1) + B(k_2)\,.$$

$Y\,k_2\,k_3\,(= Y\,k_3\,k_2)$ ist aber ein Element, das in dem Durchschnitt, aber wegen (7) nicht in $B(k_1) + B(k_2)$ liegt, so dass

$$\dim\,[B(k_1) + B(k_2) + B(k_3)] = d_1 + d_2 + d_3\,,\ \text{mit}\ d_2 > d_3\,.$$

5. Der Vollständigkeit halber betrachten wir noch den allgemeinen Schritt unseres Prozesses. Es sei die Folge $k_1, k_2, \ldots, k_i$ in E_x^m konstruiert so, dass

$$\dim\,[B(k_1) + B(k_2) + \ldots + B(k_i)] = d_1 + d_2 + \ldots + d_i\,,$$

mit $d_1 > d_2 > \ldots > d_i$. Die entsprechende Folge von erlaubten Mengen sei

$$\text{Erl}\,(k_1) \supset \text{Erl}\,(k_2) \supset \ldots \supset \text{Erl}\,(k_i)\,.$$

Die zugeordneten verbotenen Mengen sind Unterräume von E_x^m, und

$$\dim \operatorname{Verb}(k_i) = m - d_{i-1} .$$

Die nächstfolgende verbotene Menge definieren wir durch:

$$\operatorname{Verb}(k_{i+1}) = \{h\,;\ Y\,k_i\,h \in [B(k_1) + \ldots + B(k_{i-1})] \cap B(k_i)\} .$$

Sie ist ein $(m - d_i)$-dimensionaler Unterraum von E_x^m. Die erlaubte Menge $\operatorname{Erl}(k_{i+1})$ wird

$$\operatorname{Erl}(k_{i+1}) = E_x^m - [\operatorname{Verb}(k_2) \cup \operatorname{Verb}(k_3) \cup \ldots \cup \operatorname{Verb}(k_{i+1})]$$

sein. Es gilt

$$\operatorname{Erl}(k_{i+1}) \subset \operatorname{Erl}(k_i) .$$

Das Element k_{i+1} wird so fixiert, dass

$$\dim [B(k_1) + \ldots + B(k_i) + B(k_{i+1})] =$$
$$= \max \{\dim [B(k_1) + \ldots + B(k_i) + B(h)]\} , \text{ für } h \in \operatorname{Erl}(k_{i+1}) .$$

Mit Hilfe von $Y\,k_i\,k_{i+1}$ können wir dann wie vorher zeigen, dass

$$\dim [B(k_1) + \ldots + B(k_i) + B(k_{i+1})] = d_1 + \ldots + d_i + d_{i+1} ,$$

mit $d_{i+1} < d_i$.

6. Weil die Folge der positiven Zahlen d_i abnehmend ist, muss der Prozess einmal abbrechen. Es geschieht also für ein gewisses j folgendes: wenn die Folge $k_1, k_2, \ldots, k_j$ und folglich auch der $(m - d_j)$-dimensionale Unterraum $\operatorname{Verb}(k_{j+1})$ und die entsprechende erlaubte Menge $\operatorname{Erl}(k_{j+1})$ konstruiert worden sind, so liegt der Bildraum $B(h)$ der Abbildung $Y\,h$ für jedes $h \in \operatorname{Erl}(k_{j+1})$ in dem Unterraum

$$B(k_1) + B(k_2) + \ldots + B(k_j) .$$

Das bedeutet, dass

$$Y\,h\,k \in B(k_1) + B(k_2) + \ldots + B(k_j) ,$$

wenn mindestens eines von den Argumenten h und k zu der Menge $\operatorname{Erl}(k_{j+1})$ gehört.

7. Die letzterwähnte Einschränkung ist keineswegs wesentlich, wie aus dem folgenden, anschaulich fast trivialen *Hilfsatz* folgt:

In einem linearen m-dimensionalen Raum E_x^m *sei eine Folge* $U_1, \ldots, U_j$ *von echten Unterräumen gegeben. Dann kann man jedes Element* h *der Vereinigungsmenge* $U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_j$ *als Linearkombination von zwei Elementen darstellen, die zu dem Komplement* $E_x^m - [U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_j]$ *gehören.*

Weil keiner von den Unterräumen U den ganzen Raum E_x^m umfasst, so gibt es ein Element l_1 des Komplements. Wir betrachten die Menge

$$l = \alpha\, l_1 + (\varepsilon - \alpha)\, h\,,$$

wo α ein beliebiges Element und ε das Einselement des Koeffizientenkörpers bedeutet. Diese Menge kann mit einem Unterraum $U_i (i = 1, \ldots, j)$ höchstens ein gemeinsames Element haben, denn sonst würde l_1 zu U_i gehören. Es gibt also eine Zahl $\alpha' \neq \varepsilon$, so dass

$$l_2 = \alpha'\, l_1 + (\varepsilon - \alpha')\, h \in E_x^m - [U_1 \cup U_2 \cup \ldots \cup U_j]\,,$$

woraus folgt

$$h = -\frac{\alpha'}{\varepsilon - \alpha'}\, l_1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon - \alpha'}\, l_2\,. \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Seien nun die beiden Argumenten von $Y\,h\,k$ »verboten». Dann kann eines von ihnen als Linearkombination von »erlaubten» dargestellt werden, und $Y\,h\,k$ liegt wegen der Bilinearität in allen Fällen im Raume

$$B(k_1) + B(k_2) + \ldots + B(k_j)\,.$$

8. Wir erhalten somit den

Satz 1: *Die lineare Hülle $H(Y)$ der Bildmenge einer symmetrischen Bilinearabbildung Y ist als Verbindungsraum von j Bildräumen $B(k_1), \ldots, B(k_j)$ darstellbar so, dass ihre Dimension sich in der Form*

$$\dim H(Y) = d_1 + d_2 + \ldots + d_j$$

schreiben lässt, wo

$$d_1 = \max\,\{\dim B(h)\}$$

und

$$d_1 > d_2 > \ldots > d_j\,.$$

Dann lässt sich natürlich auch eine *direkte* Zerlegung von $H(Y)$ konstruieren

$$H(Y) = B(k_1) \oplus C(k_2) \oplus \ldots \oplus C(k_j)\,,$$

wo

$$\dim C(k_i) = d_i\,, \text{ für } i = 2, \ldots, j\,.$$

Dadurch wird die ganze Hülle $H(Y)$ aufgespannt.

9. Aus dem obigen Satz 1 folgt nun leicht der

Satz 2: *Falls die lineare Hülle $H(Y)$ der Bildmenge von Y p-dimensional ist, so ist der kleinste mögliche Wert für* $\max\,\{\dim B(h)\}$ *gleich s, wo s durch*

$$s^2 - s < 2\,p \leqq s^2 + s$$

eindeutig bestimmt ist.

Ist nämlich p zufälligerweise von der Form $\frac{1}{2}\, s(s+1)$, so kann es geschehen, dass $j = s$ und

$$d_1 = s\,,\, d_2 = s-1, \ldots, d_{s-1} = 2\,,\, d_s = 1\,.$$

Mit einer kleineren Zahl d_1 kann die Summe $d_1 + \ldots + d_j$ den Wert p nicht erreichen.

Ist dagegen $\frac{1}{2}\,(s-1)\, s < p < \frac{1}{2}\, s(s+1)$ für ein gewisses s, also p von der Form

$$p = \tfrac{1}{2}\, s(s+1) - t\,, \text{ mit } 1 \leqq t \leqq s-1\,,$$

so lassen wir aus der obigen Zahlenfolge

$$s\,,\, s-1, \ldots, 2\,,\, 1$$

die Zahl t weg und erhalten wieder eine passend abnehmende Folge von $s-1$ Zahlen, von denen die grösste gleich s ist. Also gilt

$$d_1 = \max\,\{\dim B(h)\} \geqq s\,,\ \text{mit } s^2 - s < 2\,p \leqq s^2 + s\,. \qquad \text{w.z.b.w.}$$

10. Mit Hinblick auf die Formel (2) erwähnen wir schliesslich noch das direkte

Korollar: *Mit einem festen* p *ist*

$$\min\,\{\dim K(h)\} \leqq m - s\,,$$

wo $s^2 - s < 2\,p \leqq s^2 + s$.

Wenn also die Dimensionen m und p des Argumentenraumes bzw. der linearen Hülle der Bildmenge $Y\,h\,k$ im voraus gegeben sind, so gibt es eine wohlbestimmte, von m und p abhängende, obere Grenze für die minimale Dimension der Kernen $K(h)$ der Linearabbildungen $Y\,h$.

Literatur

[1] Graeub, W.: Lineare Algebra. — Grundlehren math. Wiss. 97, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1958, X+219 S.

[2] Nevanlinna, F. und R.: Absolute Analysis. — Grundlehren math. Wiss. 102, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959, VIII+259 S.

[3] Schwartz, A.: On higher normal spaces for V_m in S_n, Amer. J. Math. 68, 1946, S. 660—666.

Gedruckt November 1962