

ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

327

EINE VERALLGEMEINERUNG DER
ABELSCHEN FUNKTIONALGLEICHUNG

VON

P. J. MYRBERG

HELSINKI 1962
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

<https://doi.org/10.5186/aasfm.1963.327>

Vorgelegt am 14. September 1962.

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1962

1. Einleitung

1. Gegenstand der folgenden Untersuchungen bilden Funktionalgleichungen von der Form

$$(1,1) \quad f(R(z)) = A(z)f(z) + B(z),$$

wo $R(z)$, $A(z)$ und $B(z)$ gegebene rationale Funktionen von z bezeichnen. Es ist unsere Absicht, unter den analytischen Lösungen $f(z)$ der Gleichung (1,1) gewisse spezielle Lösungen zu finden, die wegen ihrer besonderen Eigenschaften als einfachste angesehen werden können.

Unsere Gleichung enthält als Spezialfälle die Gleichungen

$$(1,2) \quad f(R(z)) = f(z) + 1$$

und

$$(1,3) \quad f(R(z)) = cf(z),$$

die von ABEL bzw. SCHRÖDER untersucht worden sind. Allgemeinere Gleichungen von der Form (1,1) haben später u.a. FATOU und PICARD behandelt.

Offenbar gelten für die Lösungen von (1,1) die folgenden formalen Sätze.

1. Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ irgendzwei Lösungen der nichthomogenen Gleichung (1,1), so genügt die Differenz

$$f(z) = f_1(z) - f_2(z)$$

der entsprechenden homogenen Gleichung

$$(1,4) \quad f(R(z)) = A(z)f(z).$$

2. Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ irgendzwei Lösungen von (1,4), so genügt der Quotient $f(z) = f_1(z)/f_2(z)$ der Gleichung

$$(1,5) \quad f(R(z)) = f(z),$$

und er ist also eine automorphe Funktion der von der rationalen Funktion $R(z)$ erzeugten Gruppe.

3. Sind $f_1(z)$ und $f_2(z)$ Lösungen der homogenen Gleichungen

$$f_1(R(z)) = A_1(z)f_1(z) \quad \text{bzw.} \quad f_2(R(z)) = A_2(z)f_2(z),$$

so genügen die Funktionen

$$F_1(z) = f_1(z)f_2(z) \quad \text{und} \quad F_2(z) = f_1(z)/f_2(z)$$

den Gleichungen

$$F_1(R(z)) = A_1(z)A_2(z)F_1(z) \quad \text{bzw.} \quad F_2(R(z)) = [A_1(z)/A_2(z)]F_2(z).$$

Wird insbesondere $R(z) = kz$ gewählt, wo k eine Konstante bezeichnet, so gelangt man zu den speziellen Gleichungen

$$(1,6) \quad f(kz) = A(z)f(z) + B(z)$$

und

$$(1,7) \quad f(kz) = A(z)f(z).$$

Die Bedeutung dieser Gleichungen besteht darin, dass aus ihren Lösungen diejenigen der allgemeinen Gleichungen (1,1) und (1,4) durch eine Transformation der Variablen z erhalten werden können.

2. Die spezielle homogene Gleichung

$$(X_0): \quad f(kz) = A(z)f(z).$$

2. Weil die Gleichung (X_0) äquivalent ist mit der Gleichung

$$f(hz) = \frac{1}{A(hz)}f(z), \quad h = \frac{1}{k},$$

welche wieder die Form (X_0) hat, so kann im Falle $|k| \neq 1$ ohne Einschränkung $|k| < 1$ angenommen werden. In diesem Falle ist der Nullpunkt $z = 0$ ein attraktiver Fixpunkt der Abbildung $z' = kz$.

Wir wollen zuerst untersuchen, wann die Gleichung (X_0) Lösungen besitzt, die im Nullpunkt regulär sind.

Es sei

$$(2,1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

die in einer Umgebung des Nullpunktes konvergente Reihenentwicklung der gesuchten Funktion und

$$(2,2) \quad A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Durch Einsetzung der Reihen (2,1) und (2,2) in (X_0) und durch Vergleich der Koeffizienten der Potenzen von z bekommt man folgendes:

Aus $c_0 = a_0 c_0$ ergibt sich $a_0 = 1$, wenn $c_0 \neq 0$.

Für $a_0 \neq 1$ ist $c_0 = 0$, und aus $c_1 k = a_0 c_1$ ergibt sich $a_0 = k$, wenn $c_1 \neq 0$.

Für $a_0 \neq 1, k$ ist $c_0 = c_1 = 0$, und aus $c_2 k^2 = a_0 c_2$ ergibt sich $a_0 = k^2$, wenn $c_2 \neq 0$, usw. Hieraus erhält man den

Satz 1. Wenn

$$(2,3) \quad a_0 \neq k^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

so hat (X_0) keine im Nullpunkt reguläre Lösung ausser $f(z) \equiv 0$.

Es ist somit für die Existenz einer im Nullpunkt regulären Lösung von (X_0) notwendig, dass

$$(2,4) \quad a_0 = A(0) = k^n \quad (n \geq 0).$$

Wir behaupten, dass unsere Bedingung (2,4) dafür auch hinreichend ist.

Es sei zuerst $a_0 = 1$. Wir bilden dann mit Fatou das unendliche Produkt

$$(2,5) \quad \pi(z) = \prod_{n=0}^{\infty} A(k^n z).$$

Offenbar konvergiert der Ausdruck (2,5) in jedem gegebenen endlichen Bereich der z -Ebene wenigstens nach Verkürzung, d.h. nach Fortlassen derjenigen endlich vielen Glieder, die im genannten Bereich Pole besitzen. Der Ausdruck

$$(2,6) \quad f(z) = \frac{1}{\pi(z)},$$

welcher der Gleichung (X_0) formal genügt, definiert dann eine der Anfangsbedingung $f(0) = 1$ genügende, in der ganzen z -Ebene meromorphe Lösung unserer Gleichung (X_0) . Die allgemeine für $z = 0$ reguläre Lösung hat dabei den Ausdruck $Cf(z)$, wo C eine willkürliche Konstante bezeichnet.

Es sei nachher $a_0 = k^n$. Dann ist nach dem Obigen

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{n-1} = 0.$$

Wir bilden jetzt den Ausdruck

$$f_n(z) = f(z)/z^n,$$

der einer Gleichung der Form (X_0) genügt, wo jetzt $A(0) = 1$. Hieraus ergibt sich für die entsprechende Lösung von (X_0) der Ausdruck

$$f(z) = z^n/\pi(z).$$

Es gilt somit der

Satz 2. Die Gleichung (X_0) hat eine bis auf eine multiplikative Konstante bestimmte, im Nullpunkt reguläre Lösung stets und nur dann, wenn

$$A(0) = k^n, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

und die genannte Lösung besteht aus einer in der ganzen endlichen Ebene meromorphen Funktion, die durch den konvergenten Ausdruck (2,5) darstellbar ist.

Offenbar ist unser Satz noch dann gültig, wenn $A(z)$ eine beliebige der Bedingung (2,4) genügende ganze oder meromorphe Funktion bezeichnet.

Wir ergänzen unsere Ergebnisse noch mit der Bemerkung, dass im Falle

$$A(0) = k^{-n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

die Funktion

$$z^n f(z) = \tilde{f}_n(z)$$

der Gleichung (X_0) mit der Bedingung $\tilde{f}_n(0) = 1$ genügt. Im vorliegenden Falle besitzt also die Gleichung (X_0) eine meromorphe Lösung, die im Nullpunkt einen Pol n ter Ordnung besitzt.

Nach der in Nr. 1 gemachten 2. Bemerkung bekommt man die allgemeine Lösung von (X_0) , wenn man die oben gefundene spezielle Lösung mit einer durch

$$f_0(kz) = f_0(z)$$

definierten automorphen Funktion multipliziert. Jede solche eindeutige Funktion hat den Ausdruck

$$f_0(z) = E(\log z; 2\pi i, \log k),$$

wo E eine elliptische Funktion von $\log z$ mit den Perioden $2\pi i$ und $\log k$ bezeichnet. Eine solche Funktion hat aber die Punkte $z = 0$ und $z = \infty$ als wesentlich singuläre Stellen.

3. Indem wir jetzt zur Behandlung des allgemeinen Falles

$$(3,1) \quad A(0) \neq k^n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

übergehen, können wir setzen

$$A(z) = A_0(z) a_0, \quad A_0(z) = \frac{A(z)}{A(0)},$$

wodurch die Auflösung von (X_0) auf die Auflösung der Gleichungen

$$(3,2) \quad F_1(kz) = A_0(z) F_1(z)$$

und

$$(3,3) \quad F_0(kz) = a_0 F_0(z)$$

zurückgeführt wird.

Die erste Gleichung (3,2) gehört wegen $A_0(0) = 1$ zur Kategorie der in der vorigen Nummer behandelten Gleichungen. Zur Auflösung der zweiten Gleichung setzen wir $z = e^t$, wodurch $F_0(z)$ in eine Funktion $g(t)$ übergeht, die den Gleichungen

$$(3,4) \quad g(t + 2\pi i) = g(t), \quad g(t + \omega) = a_0 g(t), \quad \omega = \log k$$

genügt. Bekanntlich existiert für das System (3,4) eine meromorphe Lösung $g(t)$, die in der Form

$$g(t) = C \frac{H(t - \alpha)}{H(t)}, \quad \alpha = \log a_0$$

vermittels der elliptischen Thetafunktion $H(t)$ darstellbar ist, die den Gleichungen

$$H(t + 2\pi i) = -H(t), \quad H(t + \omega) = \frac{1}{k} e^{-t} H(t)$$

genügt. In der Funktion

$$(3,5) \quad F_0(z) = g(\log z) = \vartheta(z)$$

besitzen wir eine für $z \neq 0$ meromorphe Lösung von (X_0) , die im allgemeinen den Punkt $z = 0$ als wesentlich singulären Punkt hat, der eine Häufungsstelle für die Pole ist.

4. Übrig ist noch der oben ausgeschlossene Fall $A(0) = 0$. Als Vorbereitung betrachten wir das Beispiel $A(z) = z$, also die Gleichung

$$(4,1) \quad f_0(kz) = z f_0(z), \quad |k| > 1.$$

Wird hier

$$f_0(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

eingesetzt, so erhält man zur Bestimmung der Koeffizienten c_n die Gleichungen

$$c_n k^n = c_{n-1}.$$

Für $c_0 = 1$ ergibt sich hieraus

$$c_n = \frac{1}{k^{\frac{n(n+1)}{2}}}.$$

Nun können wir schreiben

$$(4,2) \quad f_0(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

wo

$$(4,3) \quad f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{k \frac{n(n+1)}{2}}$$

und

$$(4,4) \quad f_2(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{-m}}{k \frac{m(m-1)}{2}}.$$

Die erste Reihe (4,3) definiert eine ganze Funktion, die der Gleichung

$$f_1(kz) = zf_1(z) + 1$$

genügt, während die zweite Reihe eine der Gleichung

$$f_2(kz) = zf_2(z) - 1$$

genügende ganze Funktion von $\frac{1}{z}$ definiert. In der Summe (4,2) besitzen wir also eine für $z \neq 0, \infty$ reguläre Lösung der Gleichung (4,1).

In dem allgemeinen Falle, wo $A(0) = 0$, kann man die Gleichung (X_0) in der Form

$$(4,5) \quad f(kz) = z^n A_0(z) f(z)$$

darstellen, wo $A_0(0) \neq 0$. Nach dem Obigen gibt jetzt der Ausdruck

$$(4,6) \quad f(z) = F_1(z) \vartheta(z) f_0^n(z)$$

eine für $z \neq 0, \infty$ meromorphe Lösung von (4,5). Weil gleiches für den Fall $A(0) = \infty$ gilt, gelangt man zusammenfassend zu

Satz 3. Die spezielle homogene Gleichung (X_0) besitzt stets eine in der Form (4,6) darstellbare für $z \neq 0, \infty$ meromorphe Lösung, die im Falle $A(0) = k^n$ im Nullpunkt regulär ist und in diesem speziellen Fall bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist.

Zum Abschluss noch ein paar Bemerkungen.

Ist $A(\infty) = k^n$, so existiert bei (X_0) eine im Unendlichen reguläre Lösung, wie man durch Ausführung der Transformation $z' = \frac{1}{z}$ bestätigt.

In speziellen Fällen reduziert sich eine Lösung von (X_0) auf eine rationale Funktion. Ist nämlich $r(z)$ eine beliebige rationale Funktion von z , so kann diese als Lösung der Gleichung (X_0) angesehen werden, wo

$$A(z) = \frac{r(kz)}{r(z)}.$$

3. Die spezielle nichthomogene Gleichung

$$(X): \quad f(kz) = A(z)f(z) + B(z), \quad (|k| < 1).$$

5. Zur Auflösung von (X) gehen wir mit Fatou von der unendlichen Reihe

$$(5,1) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}(k^n z) \prod_{r=0}^{n-1} \tilde{A}(k^r z)$$

aus, wo

$$\tilde{A}(z) = \frac{1}{A(z)}, \quad \tilde{B}(z) = -B(z),$$

und wir haben es mit einem Ausdruck zu tun, der unserer Gleichung (X) formal genügt.

Zur Untersuchung der Konvergenz von (5,1) betrachten wir dessen allgemeines Glied. Unter der Annahme

$$A(0) = a_0 \neq 0, \quad B(0) = 0^m$$

ist es bis auf einen endlichen Faktor asymptotisch gleich $\left(\frac{k^m}{a_0}\right)^n$.

Ist nun

$$(5,2) \quad |k|^m < |a_0|,$$

was stets für einen hinreichend grossen Wert von m gilt, so ist die Reihe (5,1), wenigstens nach Verkürzung, in jedem endlichen Bereich der z -Ebene gleichmässig konvergent, und ihre Summe definiert dann eine meromorphe Lösung der Gleichung (X).

Es soll nun im folgenden gezeigt werden, dass man unter der Annahme

$$(5,3) \quad a_0 \neq k^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

zur Bedingung (5,2) stets durch eine einfache Transformation gelangen kann.

Wir führen zu diesem Zweck in (X) die Substitution

$$(5,4) \quad f(z) = g(z) + P(z)$$

ein, wo $P(z)$ ein unbestimmtes Polynom bezeichnet. Die neue Funktion $g(z)$ genügt dann einer Gleichung der Form (X), nämlich

$$(5,5) \quad g(kz) = A(z)g(z) + B^*(z),$$

wo

$$(5,6) \quad B^*(z) = B(z) + A(z)P(z) - P(kz).$$

Es seien nun

$$A(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r, \quad B(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_r z^r$$

die Entwicklungen der Koeffizienten von (X) im Nullpunkt, die dort als regulär angenommen werden. Sei ferner

$$P(z) = \sum p_r z^r.$$

Für die Koeffizienten von

$$(5,7) \quad B^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^* z^n$$

gelten dann Ausdrücke von der Form

$$b_n^* = (a_0 - k^n) p_n + q_n,$$

wo allgemein q_n eine ganze rationale Funktion von

$$p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$$

bezeichnet. Unter der Annahme (5,3) kann man nun das Polynom $P(z)$ so wählen, dass beliebig viele unter seinen ersten Koeffizienten verschwinden werden. Insbesondere kann man dadurch erreichen, dass die Bedingung (5,2) für die Gleichung (5,5) gelten wird.

Wir haben somit den

Satz 4. Die Gleichung (X) hat unter der Bedingung $a_0 \neq k^n$ eine meromorphe Lösung, die dabei in der Form

$$f(z) = g(z) + P(z)$$

darstellbar ist als Summe einer durch die Reihe (5,1) darstellbaren Funktion $g(z)$ und des Polynoms $P(z)$.

Zu bemerken ist, dass unsere Lösung eindeutig bestimmt ist. Denn die Differenz zweier Lösungen würde einer homogenen Gleichung (X_0) mit $a_0 \neq k^n$ genügen und im Nullpunkte regulär sein, was unserem Satz 1 widerspricht.

6. Es sei nachher

$$(6,1) \quad a_0 = k^n, \quad (n \geq 0).$$

Wie oben kann man durch die Substitution (5,4) beliebig viele unter den Koeffizienten von $g(z)$ zum Verschwinden bringen, vom Koeffizienten b_n^* von z^n allerdings abgesehen.

Wir setzen nun

$$B(z) = B_0(z) + b_n^* z^n$$

und ersetzen die gegebene Gleichung (X) durch das System

$$(6,2) \quad F(kz) = A(z) F(z) + B_0(z), \quad f_0(kz) = A(z) f_0(z) + b_n^* z^n,$$

aus dessen Lösungen eine Lösung von (X) durch Addition erhalten werden kann. Nach dem Obigen besitzt die erste Gleichung (6,2) eine durch die Reihe (5,1) darstellbare meromorphe Lösung. Ferner ergibt sich aus der zweiten Gleichung (6,2) durch die Substitution

$$f_0(z) = \frac{b_n^*}{k^n} z^n g(z)$$

die Gleichung

$$(6,3) \quad g(kz) = A(z) g(z) + 1.$$

Es ist also übrig, noch die Art der Lösungen von (6,3) zu untersuchen.

Wir betrachten als Vorbereitung die spezielle Gleichung

$$(6,4) \quad g(kz) = g(z) + 1,$$

welche eine Abelsche Gleichung (1,2) ist. Wird hier $z = e^t$ gesetzt, so bekommt man für die Funktion $h(t) = g(e^t)$ das Gleichungssystem

$$(6,5) \quad h(t + 2\pi i) = h(t), \quad h(t + \omega) = h(t) + 1, \quad (\omega = \log k)$$

für welches der vermittle der elliptischen ζ -Funktion gebildete Ausdruck

$$h(t) = \zeta(t) + Ct$$

eine Lösung gibt. In der so erhaltenen Funktion

$$(6,6) \quad g(z) = \zeta(\log z) + C \log z$$

haben wir eine Lösung von (6,4), die meromorph ist ausserhalb der Punkte $z = 0, \infty$, die Häufungspunkte der Pole sind.

Eine einfachere Lösung von (6,4) hat man in der Funktion

$$g(z) = \frac{\log z}{\log k},$$

die allerdings nicht eindeutig ist.

7. Indem wir nachher zu der allgemeinen Gleichung (6,3) übergehen, schreiben wir diese in der Form

$$(7,1) \quad P(z) f(kz) = Q(z) f(z) + P(z),$$

wo $P(z)$ und $Q(z)$ Polynome bezeichnen und $P(0) = Q(0) = 1$. Wir setzen nun

$$(7,2) \quad f(z) = \varphi(z) g(z),$$

wo $\varphi(z)$ aus

$$(7,3) \quad P(z) \varphi(kz) = Q(z) \varphi(z)$$

bestimmt wird, und wir erhalten für $g(z)$ die Gleichung

$$(7,4) \quad g(kz) = g(z) + B(z),$$

wo

$$B(z) = \frac{P(z)}{Q(z) \varphi(z)}.$$

Nun ist die Gleichung (7,3) homogen, und nach Satz 2 besitzt sie eine meromorphe Lösung, die im Nullpunkt regulär ist, und $\varphi(0) = 1$. Zur Auflösung von (7,4) schreiben wir $g(z)$ als Summe

$$g(z) = g_0(z) + g_1(z)$$

zweier Funktionen, die bzw. den Gleichungen

$$(7,5) \quad g_0(kz) = g_0(z) + 1$$

$$(7,6) \quad g_1(kz) = g_1(z) + B_1(z), \quad B_1(z) = B(z) - 1$$

genügen. Die erste Gleichung (7,5) ist identisch mit der Abelschen (6,4). Was die zweite (7,6) betrifft, so ist für sie unsere Bedingung (5,2), die sich hier wegen $B_1(0) = 0$ auf $|k| < 1$ reduziert, immer gültig. Als Lösung hat $g_1(z)$ nach Nr. 5 eine im Nullpunkt reguläre, durch die Reihe (5,1) darstellbare meromorphe Funktion. Wir haben damit eine Lösung für unsere Gleichung (7,1) gefunden, die meromorph für $z \neq 0, \infty$ ist. Dabei ist $z = 0$ als Häufungsstelle der Pole stets wesentlich singular, während der Punkt $z = \infty$ unter speziellen Bedingungen im Unendlichen regulär sein kann.

4. Die allgemeine homogene Gleichung

$$(Y_0): \quad f(R(z)) = A(z) f(z).$$

8. Es soll im folgenden gezeigt werden, dass es Lösungen von (Y_0) gibt, welche in einem gegebenen Fixpunkt der durch

$$(8,1) \quad z' = R(z)$$

geleisteten Abbildung ein bestimmtes Verhalten aufweisen.

Man hat hier zwischen zwei wesentlich verschiedenen Fällen zu unterscheiden, je nachdem ob der betreffende Fixpunkt attraktiv oder repulsiv

ist. Wird der Fixpunkt als Nullstelle von $R(z)$ gewählt, was keine Einschränkung bedeutet, so ist der Wert des Multiplikators $k = R'(0)$ im ersten Falle absolut < 1 , im zweiten > 1 .

I. Fall $|k| < 1$. Bekanntlich gibt es jetzt ein den Fixpunkt enthaltendes Gebiet D , dessen Punkte bei der Iteration der Abbildung (8,1) gegen den Fixpunkt konvergieren, also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R(z) = 0,$$

wo $R_n(z)$ die n te Iterierte von $R(z)$ bezeichnet.

Angenommen, dass

$$A(0) = a_0 \neq 0,$$

kann man setzen

$$A(z) = a_0 A_0(z), A_0(z) = \frac{A(z)}{A(0)}, (A_0(0) = 1)$$

und dementsprechend die Gleichung (Y_0) durch das Gleichungspaar

$$(8,2) \quad F(R(z)) = A_0(z) F(z)$$

$$(8,2)' \quad f_0(R(z)) = a_0 f_0(z)$$

ersetzen, aus deren Lösungen eine Lösung von (Y_0) durch Multiplikation erhalten wird:

$$(8,3) \quad f(z) = F(z) f_0(z).$$

Nun gibt der in D konvergente Ausdruck

$$(8,4) \quad \frac{1}{F(z)} = \prod_{n=0}^{\infty} A_0(R_n(z)). \quad R_0(z) = z$$

eine im Innern von D meromorphe Lösung von (8,2), wobei der Rand C von D für die Funktion $F(z)$ eine natürliche Grenze bildet, über welche hinaus sie analytisch nicht fortgesetzt werden kann.

Zur Auflösung der zweiten Gleichung (8,2)' nehmen wir zuerst an, dass $a = k$. Wir haben es dann mit einer Schröderschen Funktionalgleichung zu tun, für welche die Koenigsche Funktion

$$(8,5) \quad f_0(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(z)}{k^n}$$

eine Lösung gibt, die bei endlichem Gebiet D in diesem regulär ist.

Es sei nachher a_0 eine beliebige Konstante $\neq 0, 1$. Indem wir die in Nr. 3 definierte, für $z \neq 0, \infty$ meromorphe Lösung $\vartheta(z)$ der Gleichung

$$(8,6) \quad \vartheta(kz) = a_0 \vartheta(z)$$

eingeführen, bekommen wir durch Zusammensetzung die Funktion

$$(8,7) \quad F_0(z) = \vartheta(f_0(z)),$$

welche offenbar unserer Gleichung (8,2)' genügt. Die so erhaltene Funktion ist zwar in D eindeutig, nicht aber meromorph, denn sie hat die in D liegenden durch die Iteration der zu (8,1) inversen Operation erhaltenen Bildpunkte des Nullpunktes, welche bekanntlich jeden Punkt des Randes C als Häufungsstelle haben, als wesentlich singuläre Punkte. Im Spezialfalle $a = k^n$, wo $\vartheta(z) = z^n$, ist $F_0(z)$ allerdings in D meromorph.

Zusammenfassend können wir nun den folgenden Satz aufstellen.

Satz 6. Die homogene Gleichung (Y_0) hat für jeden attraktiven Fixpunkt der Abbildung (8,1) eine Lösung, die im zugehörigen Attraktionsgebiet D eindeutig ist. Sie ist dort meromorph, wenn $a = k^n$.

9. Fall $|k| > 1$. Wir beginnen mit dem Spezialfall $A(z) \equiv a$. Aus der zugehörigen Gleichung

$$(9,1) \quad \psi(R(z)) = a\psi(z)$$

ergibt sich durch Übergang zur inversen Funktion $z = \varphi(t)$ von $t = \psi(z)$ die Gleichung

$$(9,2) \quad \varphi(at) = R(\varphi(t)),$$

d.h. die Funktion $\varphi(t)$ besitzt ein rationales Multiplikationstheorem.

Es sei zuerst $a = k$. Nach Poincaré besitzt dann (9,2) eine bis auf die Transformation ct bestimmte meromorphe, im Falle eines Polynoms $R(z)$ eine ganze Lösung, die im Nullpunkt regulär und gleich null ist. In der inversen Funktion $t = \psi(z)$ haben wir dann eine im allgemeinen unendlich vieldeutige Lösung von (9,1), die in einer Umgebung des Nullpunktes regulär ist.

Im allgemeinen, von Picard untersuchten Falle kann eine Lösung von (9,1) offenbar aus

$$(9,3) \quad f(z) = \vartheta(\psi(z))$$

erhalten werden, wo $\vartheta(z)$ die früher eingeführte Lösung von (8,6) bezeichnet. Unsere Funktion (9,3), die in einer Umgebung des Punktes $z = 0$ eindeutig ist, hat diesen Punkt im allgemeinen als wesentlich singulären Punkt. Eine Ausnahme findet in der Tat nur im Falle $a = k^n$ statt, wo $f(z) = \psi^n(z)$.

Indem wir nachher zum allgemeinen Fall übergehen, bilden wir die Funktion

$$(9,4) \quad F(t) = f(\varphi(t))$$

durch Zusammensetzung aus der gesuchten Lösung $f(z)$ von (Y_0) und der Poincaréschen Funktion $\varphi(t)$. Es gilt dann

$$F(kt) = f(\varphi(kt)) = A(\varphi(t))f(\varphi(t)),$$

d.h. die Funktion $F(t)$ ist eine Lösung der speziellen homogenen Gleichung

$$(9,5) \quad F(kt) = \tilde{A}(t)F(t),$$

wo jetzt

$$\tilde{A}(t) = A(\varphi(t))$$

eine im allgemeinen transzendente, im Nullpunkt $t = 0$ reguläre Funktion bezeichnet, für welche $\tilde{A}(0) = A(0)$ gilt. In der zusammengesetzten Funktion

$$(9,6) \quad f(z) = F(\psi(z))$$

besitzen wir dann eine im allgemeinen unendlich vieldeutige Lösung der gegebenen homogenen Gleichung, die in einer Umgebung des im allgemeinen wesentlich singulären repulsiven Fixpunktes eindeutig ist.

10. Als Beispiel betrachten wir die Gleichung

$$(10,1) \quad f(4z(1-z)) = \frac{1}{1-2z}f(z),$$

welche die hypergeometrische Funktion

$$f(z) = F(1, 1; 3/2, z)$$

als Lösung hat. Durch die Substitution $z = \frac{2-x}{4}$ geht (10,1) in die Gleichung

$$(10,2) \quad g(x^2 - 2) = \frac{2}{x}g(x)$$

über, wo

$$A(x) = \frac{2}{x}, \quad R(x) = x^2 - 2$$

und $k = 4$ für den attraktiven Fixpunkt $x = 2$ ist. Durch Auflösung der zugehörigen Poincaréschen Gleichung

$$\varphi(4t) = \varphi^2(t) - 2$$

ergibt sich $\varphi(t) = 2 \cos \sqrt{t}$ und die entsprechende Gleichung (9,5):

$$F(4t) = \frac{1}{\cos \sqrt{t}} F(t)$$

hat die Lösung $F(t) = \frac{\sqrt{t}}{\sin \sqrt{t}}$. Nach Ausführung der Rechnungen bekommt man zuerst

$$g(x) = \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}}$$

und schliesslich

$$f(z) = \frac{\arccos(1 - 2z)}{2\sqrt{z - z^2}}$$

als Lösung von (10,1).

5. Die allgemeine nichthomogene Gleichung

$$(Y) \quad f(R(z)) = A(z)f(z) + B(z).$$

11. Man hat hier wie im homogenen Falle zwischen zwei verschiedenen Fällen zu unterscheiden.

I. Fall: $|k| < 1$. Wir bilden wie bei den speziellen Gleichungen mit Fatou den Ausdruck

$$(11,1) \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{B}(z_n) \prod_{\nu=0}^n \tilde{A}(z_{\nu}),$$

wo

$$\tilde{A}(z) = \frac{1}{A(z)}, \quad \tilde{B}(z) = -B(z), \quad z_n = R_n(z),$$

welcher der Gleichung (Y) formal genügt. Wie im speziellen Falle $R(z) = kz$ kann man auch jetzt zeigen, dass die Reihe (11,1) unter der Bedingung

$$A(0) \neq k^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

in jedem zum Attraktionsgebiet D des Fixpunktes gehörigen Bereich, ev. nach Verkürzung, gleichmässig konvergent wird, wenigstens nachdem $f(z)$ durch

$$g(z) = f(z) - P(z)$$

ersetzt wird, wo $P(z)$ ein geeignet gewähltes Polynom bezeichnet. Aus

$$(11,2) \quad f(z) = g(z) + P(z)$$

geht aber hervor, dass die so erhaltene Lösung eine im Gebiet D meromorphe Funktion ist.

Weil im Falle $A(0) = k^n$ Entsprechendes gilt wie bei den speziellen Gleichungen, kann man die Richtigkeit des folgenden Satzes bestätigen.

Satz 7. Für jeden attraktiven Fixpunkt der Abbildung (8,1) gibt es im allgemeinen Falle $A(0) \neq k^n$ eine eindeutig bestimmte, im zugehörigen Attraktionsgebiet meromorphe Lösung, welche dann als Summe der Fatouschen Reihe (11,1) und eines Polynoms darstellbar ist. Im Falle $A(0) = k^n$ existieren in dem im Fixpunkte punktierten Gebiet D meromorphe Lösungen, die im allgemeinen den Fixpunkt als Häufungspunkt von Polen haben.

12. Fall $|k| > 1$. Wir bilden wie im homogenen Falle die Funktion

$$(12,1) \quad F(t) = f(\varphi(t))$$

durch Zusammensetzung aus einer Lösung von (Y) und der Poincaréschen Funktion $\varphi(t)$. Unsere Funktion $F(t)$ genügt jetzt der Gleichung

$$(12,2) \quad F(kt) = A^*(t) F(t) + B^*(t),$$

wo

$$A^*(t) = A(\varphi(t)), B^*(t) = B(\varphi(t))$$

meromorphe Funktionen von t bezeichnen, die den Anfangsbedingungen

$$A^*(0) = A(0), B^*(0) = B(0)$$

genügen.

Es sei zuerst $A(0) \neq k^n$. Nach Satz 4 hat die Gleichung (12,2) als Lösung eine meromorphe Funktion. Aus

$$(12,3) \quad f(z) = F(\psi(z))$$

ergibt sich nun als Lösung der Gleichung (Y) eine analytische Funktion, die wie $\psi(z)$ im allgemeinen unendlich vieldeutig ist und die in einer Umgebung des Fixpunktes regulär ist.

Dasselbe gilt noch im speziellen Falle $A(0) = k^n$ mit dem Unterschied, dass der Fixpunkt ein wesentlich singulärer Punkt der Funktion $f(z)$ ist.

Als Beispiel betrachten wir die allgemeine Abelsche Gleichung

$$(12,4) \quad f(R(z)) = f(z) + 1.$$

Weil die zugehörige Gleichung (12,2) den Ausdruck

$$F(kt) = F(t) + 1$$

hat, kann ihre Lösung in der Form

$$F(t) = \zeta(t) + Ct$$

vermittels der elliptischen ζ -Funktion dargestellt werden. Hieraus ergibt sich für die Gleichung (12,4) eine Lösung von der Form

$$(12,5) \quad f(z) = \zeta(\psi(z)) + C\psi(z).$$

Im Falle $|k| < 1$ ist hier $\psi(z)$ die Koenigsche Funktion (8,5), und der Ausdruck (12,5) definiert eine im Attraktionsgebiet eindeutige Funktion, die ausserhalb des Fixpunktes meromorph ist.

Im Falle $|k| > 1$, wo $\psi(z)$ die inverse Funktion der Poincaréschen φ -Funktion ist, gibt der Ausdruck (12,5) eine im allgemeinen unendlich vieldeutige Funktion, die in einer Umgebung des im allgemeinen wesentlich singulären Fixpunktes meromorph ist.

Literatur

- ABEL, N.-H.: Oeuvres, t. II (1881).
 DOMB, C. — FISHER, M. E.: Cambridge phil.soc. 56 (1956).
 FATOU, P.: Bull. soc. math. (1919—1920).
 JULIA, G.: Journal math. et appl. (1918).
 KOENIGS, G.: Ann. École. Normale (1884—85).
 MYRBERG, P. J.: Ann. Acad. sci. Fennicae A.I. 308 (1962).
 PICARD, E.: Équations fonctionnelles (1928).
 POINCARÉ, H.: Journal de Liouville, t. 6 (1890).
 SCHRÖDER, E.: Math. Annalen (1871).