ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

326

SUR LES HOMOMORPHISMES CANONIQUES DE ČECH

PAR

OLLI JUSSILA

HELSINKI 1962
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1963.326

Présenté à l'Académie le 12 octobre 1962 par MM. F. NEVANLINNA et OLLI LEHTO

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1962

Préface

Je suis heureux de pouvoir exprimer ici ma profonde reconnaissance à mon maître. M. KALLE VIRTANEN, chargé de cours à l'Université de Helsinki, dont les leçons m'ont guidé dans le domaine de la topologie algébrique, qui m'a proposé ce sujet et suivi mes recherches de sa critique toujours précieuse.

Ce m'est un grand plaisir d'adresser ma gratitude également à M. KLAUS VALA, docteur ès sciences, qui a revu le manuscrit et dont les conseils et remarques ont beaucoup amélioré le texte.

Je tiens à remercier vivement Mme HELKA VALA, qui a bien voulu reviser et améliorer la langue du texte.

Qu'il me soit permis d'adresser enfin mes remerciements les plus respectueux à l'Académie des Sciences de Finlande, qui a imprimé ce travail.

Haukipudas, octobre 1962.

Olli Jussila

Table des matières

Introduction

Le but de ce travail est d'étudier les homomorphismes fonctoriels des groupes homologiques et cohomologiques appartenant aux nerves et aux systèmes projectifs de nerves.

Les résultats connus par l'auteur sont contenus dans les ouvrages [7] – [12] et [14] — [16]. Ce travail sous presse nous avons trouvé quelques résultats analogiques dans le travail »Regular mappings and dimension» de M. Dyer (cf. Annals. of Math., 67, 1958 pp. 119—149). Tous ces résultats sont représentés pour les coefficients constants.

Au § 1 nous donnons brièvement les notations, les conventions et les lemmes ayant choisi [8] pour notre principal ouvrage de réference. L'homologie et la cohomologie sont developées côte à côte. Les formules et les théorèmes appartenant à la cohomologie sont désignés par la lettre c. Le lemme 6 contient une nouvelle définition des faisceaux et des co-faisceaux. Les lemmes 9 et 10 donnent trois conditions suffisantes pour que l'homologie de Čech soit exacte.

Le but du § 2 est de démontrer les théorèmes 1 et 1c et leurs corollaires qui généralisent les résultats des ouvrages [7] et [11] pour les complexes doubles généraux. Ils seront nécessaires dans le paragraphe suivant.

Le § 3 contient les théorèmes 2 et 2c et leurs corollaires.

Dans le dernier paragraphe on généralise les théorèmes de Helly (cf. [9] et [10]) aux espaces topologiques de dimension finie.

§ 1. Notions préliminaires

1. 1. **Définition 1.** Un agrégat α d'un ensemble X est une famille $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de X (cf. [6]: »indexed family of sets» et [13] p.13).

Supposerons désormais I totalement ordonné ce qui évidemment ne restreint pas la généralité. Voici quelques conventions:

—1° Convenons de désigner $A_i < A_j$, si $i < j$ $(i, j \in I)$.

—2° Soit f une application de X dans un ensemble Y, β un agrégat de Y et $\pi_{\alpha\beta}$ une application croissante de α dans β. On dit alors que

$\pi_{\alpha\beta}$ est une f-projection, si $A_i \subset f^{-1}(\pi_{\alpha\beta}(A_i))$ pour tout $A_i \in \alpha$. Si f est l'application identique de X sur lui-même, on dit que $\pi_{\alpha\beta}$ est une projection.

—3° On dit que α est un (f-) affinement de β, s'il existe une (f-) projection de α dans β. La notation est $\alpha > \beta$ ($\alpha \mid f > \beta$).

—4° Le support $|\alpha|$ de α est le sous-ensemble $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ de X. α est un recouvrement de X, si $|\alpha| = X$. Si X est un espace topologique, alors α est ouvert (fermé) dès que ses éléments A_i sont ouverts (fermés).

—5° La dimension $\dim(\alpha)$ de α est le plus petit entier n tel que toute intersection de $n+2$ éléments de α est vide.

1. 2. On peut considérer α comme un schéma simplicial ordonné (cf. [8] p. 39) en convenant que toute suite $s_i^n = (A_{i_0}, \ldots, A_{i_n})$ ($n = 0, 1, \ldots$, $A_{i_j} \in \alpha$, $j = 0, \ldots, n$) soit un n-simplexe.

—6° On augmente α en ajoutant le -1-simplexe s_α^{-1} qui est la suite vide ($\emptyset$).

—7° On identifie $s_j^n = (A_{j_0}, \ldots, A_{j_n})$ ($n > 0$) à s_i^n ci-dessus, s'il existe une permutation paire ε, qui transforme s_j^n en s_i^n. Si ε est impaire, on écrit $s_j^n = -s_i^n$ et $s_i^n = -s_j^n$.

Également on associe à tout 0-simplexe $s_i^0 = (A_{i_0})$ le 0-simplexe $-s_i^0 = -(A_{i_0})$ et au -1-simplexe s_α^{-1} le -1-simplexe $-s_\alpha^{-1}$ de telle sorte que $-(-s_i^0) = s_i^0$ et $-(-s_\alpha^{-1}) = s_\alpha^{-1}$.

— 8° Le support $\widehat{s_i^n} = \widehat{-s_i^n}$ ($n > -1$) des simplexes s_i^n et $-s_i^n$ est l'intersection

$$A_{i_0} \cap A_{i_1} \cap \ldots\ldots \cap A_{i_n}$$

et le support $\widehat{s_\alpha^{-1}} = \widehat{-s_\alpha^{-1}}$ des simplexes s_α^{-1} et $-s_\alpha^{-1}$ est le support $|\alpha|$ de α.

— 9° α^n est l'ensemble des n-simplexes de α. α^n est vide pour $n < -1$.

— 10° $s_i^n = (A_{i_0}, \ldots, A_{i_n})$ est strictement croissant, si $i_0 < i_1 < \ldots < i_n$. Convenons que les 0-simplexes (A_{i_0}) et le -1-simplexe $(\emptyset)$ soient strictement croissants. Convenons de désigner par $^-\alpha^n$ l'ensemble des n-simplexes strictement croissants de α.

— 11° Les faces du simplexe $s_i^n = (A_{i_0}, \ldots, A_{i_n})$ sont les $n-1$-simplexes

$$s_{ik}^{n-1} = (-1)^k (A_{i_0}, \ldots, \widehat{A}_{i_k}, \ldots, A_{i_n}).$$

(ici le chapeau $\wedge$ signifie l'absence de l'élément A_{i_k}).

En particulier, $s_\alpha^{-1} = (\emptyset)$ ($-s_\alpha^{-1} = -(\emptyset)$) est la seule face de tous les 0-simplexes (A_{i_0}) ($-(A_{i_0})$) de α.

Convenons de désigner $s' < s$, si le simplexe s' est un face du simplexe s.

1. 3. **Définition 2.** Un »groupe» G est un module topologique. Un »sous-groupe» est un sous-module fermé. Un »homomorphisme» est un homomorphisme continu (cf. [6] pp. 6.7).
— 12° $\mathfrak{G}_C$ est la catégorie des groupes abeliens compacts et $\mathfrak{G}_R$ la catégorie des R-modules discrets, où R est un anneau de base donné.
— 13° On appelle une variété de G (cf. [3] p. 126) toute classe $V = g + H = \{g + h\,;\, h \in H\}$ $(g \in G)$ suivant un sous-groupe H de G (cf. [2] p. 69). Convenons que l'ensemble vide est également une variété de G.

Il est clair que $g \in V$, si $V \neq \emptyset$ et que V ne dépend alors du choix de son élément g i.e. $g + H = g' + H$, si $g - g' \in H$.

On voit, de plus, que

(i) toute intersection $\bigcap_i (g_i + H_i)$ de variétés de G est — ou bien $\emptyset$ ou bien la variété $g + \bigcap_i H_i \,(g \in \bigcap_i (g_i + H_i))$ — i.e. une variété de G.

Soit f un homomorphisme de G dans un groupe G'. Alors

(iii) toute image réciproque $f^{-1}(g')$ $(g' \in G')$ est ou bien vide ou bien de la forme $g + \mathrm{Ker}(f)$ $(g \in f^{-1}(g'))$ i.e. une variété de G.

(iv) Si $g + H$ est une variété de G, alors $f(g + H) = f(g) + f(H)$ est évidemment une variété de G'.

Définition 3. (cf. [13] p. 78) Un groupe G est linéairement compact, s'il satisfait à la condition suivante:

(ii′) Si $\mathfrak{S} = \{V_i\}$ est un ensemble filtrant décroissant de variétés non-vides de G, alors l'intersection $\bigcap_i V_i$ est non-vide.

Exemples. *A*. Tout groupe compact est linéairement compact. *B*. Le groupe additif Z des entiers rationnels n'est pas linéairement compact. En effet, soit $\mathfrak{S} = \{V_1, V_2, \ldots\}$ et $V_i = 2^{2^i} + 3 \cdot 2^{2^i} Z$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Alors $V_1 \supset V_2 \supset \ldots\ldots$ et $2^{2^i}Z - \{0\} \supset V_i$ de sorte que $\mathfrak{S}$ est un ensemble filtrant décroissant de variétés non-vides de Z et $\bigcap_i V_i = \emptyset$.

Lemme 1. Tout sous-groupe d'un groupe linéairement compact est linéairement compact.

Définition 4. (cf. [4] p. 21) Un groupe G est artinien, s'il vérifie les conditions équivalentes suivantes

a) tout ensemble non-vide de sous-groupes de G, ordonné par inclusion, possède un élément minimal,

b) toute suite décroissante de sous-groupes de G est stationnaire.

Exemples. *A*. Z n'est pas artinien.

B. Le groupe multiplicatif $Z(p^\infty)$, où p est un nombre premier, des p^n-ièmes racines de 1 $(n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ est artinien.

C. Tout groupe fini est artinien.

D. Tout espace vectoriel de dimension finie est artinien.

Lemme 2. (cf. [4] p. 22) Tout sous-groupe et tout groupe quotient d'un groupe artinien est artinien. Tout produit direct fini de groupes artiniens est artinien.

Lemme 3. (cf. [5] p. 141) Tout groupe artinien est linéairement compact.

Les conditions (i), (ii'), (iii) et (iv) ci-dessus sont les hypothèses du théorème 1 de [5] au p. 138. On obtient donc le

Lemme 4. Soit $\{G_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ (Ici $\alpha \geq \beta$ et $f_{\alpha\beta}: V_\alpha \to V_\beta$) un système projectif de groupes (cf. [1] § 1) tel que $f_{\alpha\alpha}$ est une application identique pour tout α. Supposons donnée pour tout α une variété V_α de G_α de telle sorte que $f_{\alpha\beta}(V_\alpha) \subset V_\beta$. Si les groupes G_α sont linéairement compacts, alors on a

a)
$$f_\beta(V) = \bigcap_{\alpha \geq \beta} f_{\alpha\beta}(V_\alpha)$$

où $V = \varprojlim_{\alpha,\beta} \{V_\alpha, f_{\alpha\beta}\}$ et f_α est l'application canonique $V \to V_\alpha$.

b) Si tout V_α est non-vide, alors V est non-vide.

1. 4. On peut considérer l'ensemble $P(X)$ des sous-ensembles de X comme une catégorie (cf. [8] p. 16) en convenant que pour deux sous-ensembles $P \subset X$ et $Q \subset X$ l'ensemble Hom (P, Q) se réduit à un élément, si $P \subset Q$ et est vide dans le cas contraire.

Définition 5. Un ∂ — (δ —) domaine M (N) de coefficients de base X est un foncteur covariant (contravariant) sur la catégorie $P(X)$ à valeurs dans une catégorie $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G}_R$) de groupes tel que $M(\emptyset) = 0$ ($N(\emptyset) = 0$).

Si X est un espace topologique, $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_C$ et si l'on remplace $P(X)$ par la souscatégorie $\hat{U}(X)$ des ouverts de X, on obtient les précofaisceaux (les préfaisceaux) de base X.

Un ∂ — (δ —) domaine de coefficients de base X est donc un précofaisceau (préfaisceau) de base X dans la topologie discrète.

— 14° Si aucun danger de confusion n'est possible, nous notons tout homomorphisme de groupes par φ.

— 15° Soit M' (N') un ∂ — (δ —) domaine de coefficients de base Y. Un (f —) homomorphisme φ_* (φ^*) de M (N') dans M' (N) est un homomorphisme ou une transformation naturelle de foncteurs compatible à f (cf. [4] p. 12), c'est à dire, les diagrammes

$$\begin{tikzcd} M(f^{-1}(P)) \arrow[r, "\varphi_*"] \arrow[d, "\varphi"'] & M'(P) \arrow[d, "\varphi"] \\ M(f^{-1}(Q)) \arrow[r, "\varphi_*"] & M'(Q) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} N(f^{-1}(P)) & N'(P) \arrow[l, "\varphi^*"'] \\ N(f^{-1}(Q)) \arrow[u, "\varphi"] & N'(Q) \arrow[l, "\varphi^*"] \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

sont commutatifs pour tout $P \subset Q \subset Y$.

Exemples. A. On peut considérer tout groupe G comme un ∂ — et δ-domaine de coefficients en convenant que $G(\emptyset) = 0$, $G(P) = G$ pour $P \subset X$, $P \neq \emptyset$ et φ: $G \to G$ identique. On dit alors que les coefficients sont constants.

B. Si X est un espace topologique, on peut prolonger tout précofaisceau I (tout préfaisceau F) de base X à un ∂ — (δ —) domaine de coefficients comme suit:

Un ouvert U_0 de X est le plus grand élément de l'ensemble filtrant décroissant $F_{U_0} = \{U \in \hat{U}(X) ; U_0 \subset U\}$ d'où l'isomorphisme $I(U_0) = \varprojlim I(U)$ $(F(U_0) = \varinjlim F(U))$. Ici $\varprojlim$ ($\varinjlim$) est le foncteur limite projective (inductive) par rapport à F_{U_0} (cf. [1] § 1).

Si $P \subset Q \subset X$, on a l'inclusion $F_P \supset F_Q$ d'où l'homomorphisme fonctoriel

$$\varphi : \varprojlim_{U \in F_P} I(U) \longrightarrow \varprojlim_{U \in F_Q} I(U)$$

$$(\varphi : \varinjlim_{U \in F_Q} F(U) \longrightarrow \varinjlim_{U \in F_P} F(U)) .$$

Ici le mot »fonctoriel» signifie que les applications $P \to \varprojlim_{U \in F_P} (I(U))$ $(P \to \varprojlim_{U \in F_P} (F(U)))$ et les homomorphismes φ ci-dessus définissent un foncteur covariant (contravariant) sur $P(X)$. Ce foncteur est le prolongement cherché.

C. Définition 6. (cf. [12] pp. 444, 446 et [8] p. 109) Un précofaisceau I de base X est un cofaisceau, s'il vérifie les conditions suivantes: Pour tout agrégat ouvert et fini α de X on a

(I_1) $I(|\alpha|) = \sum_{A_i \in \alpha} \varphi(I(A_i))$ et

(I_2) Si $\sum_{A_i \in \alpha} \varphi(g_i) = 0 \in I(|\alpha|)$ $(g_i \in I(A_i)$, $A_i \in \alpha)$, on trouve les éléments $g_{ij} = - g_{ji} \in I(A_i \cap A_j)$ de telle sorte que $g_i = \sum_{j \neq i} \varphi(g_{ij})$.

Également, un préfaisceau F de base X est un faisceau, s'il vérifie les conditions suivantes: Pour tout agrégat ouvert α de X on a

(F_1) Si g et g' sont deux éléments de $F(|\alpha|)$ tels que $\varphi(g) = \varphi(g') \in F(A_i)$ pour tout $A_i \in \alpha$, on a $g = g'$.

(F_2) Si $(g_i)_{i \in I}$ est une famille d'éléments des groupes $F(A_i)$ telle que $\varphi(g_i) = \varphi(g_j) \in F\,(A_i \cap A_j)$ pour tout i , j , $\in I$, il existe un tel $g \in F\,(|\alpha|)$ que $\varphi(g) = g_i$ pour tout $i \in I$.

Tout faisceau F de base X définit un δ-domaine F de coefficients de base X de telle sorte que $F(P)$ est le groupe des sections de F au dessus de P (cf. [8] p. 109). Remarquons que ce domaine n'est pas en général celui défini par le préfaisceau F sauf dans le cas où X admet un système fondamental de voisinages paracompacts (cf. [8] p. 151).

— 16° Si $P \subset X$, convenons de désigner par $M|P$ et $N|P$ le ∂-resp. δ-domaine de coefficients défini par les équations

$$(M|P)\,(Q) = M(P \cap Q) \text{ resp. } (N|P)\,(Q) = N(P \cap Q)$$

les homomorphismes fonctoriels φ étant ceux de M resp. N.

Si $P \subset P' \subset X$, on a les homomorphismes naturels $M|P \to M|P'$ et $N|P' \to N|P$ définis par les homomorphismes $M\,(P \cap Q) \to M(P' \cap Q)$ resp. $N(P' \cap Q) \to N(P \cap Q)$. M resp. N définit ainsi un foncteur $\overset{\circ}{M} : P \to M|P$ resp. $\overset{\circ}{N} : P \to N|P$ covariant resp. contravariant sur P et à valeurs dans la catégorie des ∂ — (δ —) domaines de coefficients.

— 17° Convenons de désigner par M^P resp. N^P $(P \subset X)$ les ∂-resp. δ-domaines de coefficients définis comme suit (cf. [8] p. 234):

$M^P(Q) = M(Q)$ et $N^P(Q) = N(Q)$, si $P \cap Q = \emptyset$ et nul dans le cas contraire. Les homomorphismes $\varphi : M^P(Q_1) \to M^P(Q_2)$ et $\varphi : N^P(Q_2) \to N^P(Q_1)$ $(Q_1 \subset Q_2 \subset X\,;\, Q_2 \cap P = \emptyset)$ sont les homomorphismes correspondants

$$\varphi : M(Q_1) \to M(Q_2) \text{ et } \varphi : N(Q_2) \to N(Q_1)\,.$$

1. 5. Considérons maintenant 2° et 15°. Si α et β sont finis, on peut supposer $M(P) \in \mathfrak{G}_C$ et $M'(P') \in \mathfrak{G}_C$ pour tout $P \subset X$ et pour tout $P' \subset Y$.

Définition 7. Le groupe des n-chaînes orientées de α à coefficients dans M est pour $n > -2$ la somme directe

$$C_n(\alpha\,,M) = \bigoplus_{s_i^n \in^+ \alpha^n} M(\widehat{s_i^n})$$

et nul pour $n < -1$. Le groupe des n-cochaînes alternées de α à coefficients dans N est pour $n > -2$ le produit direct

$$C^n(\alpha\,,N) = \prod_{s_i^n \in^+ \alpha^n} N(\widehat{s_i^n})$$

et nul pour $n < -1$.

Il est clair que $C_n(\alpha\,,M)$ et $C^n(\alpha\,,N)$ sont nuls, si $M(\emptyset) = N(\emptyset) = 0$ et $\dim(\alpha) < n$.

Les éléments de $C_n(\alpha\,,M)$ sont les sommes directes finies $c = \sum_{s_i^n \in^+ \alpha^n} c(s_i^n)$ où $c(s_i^n) \in M(\widehat{s_i^n})$ et les éléments de $C^n(\alpha\,,N)$ sont les familles $(c(s_i^n))_{s_i^n \in^+ \alpha^n}$ où $c(s_i^n) \in N(\widehat{s_i^n})$. Si $-s_i^n \in^+ \alpha^n$, on pose $c(s_i^n) = -c(-s_i^n)$ et nul, si $\pm s_i^n \notin^+ \alpha^n$.

Si aucun danger de confusion n'est possible, nous omettrons M et N dans les notations.

— 18° L'opérateur bord $\partial : C_n(\alpha) \to C_{n-1}(\alpha)$ $(n > -1)$ et l'opérateur cobord $\delta : C^{n-1}(\alpha) \to C^n(\alpha)$ sont définis comme suit:

$$\partial c(s_j^{n-1}) = \sum_{s_i^n > s_j^{n-1}} \varphi(c(s_i^n)) \text{ et } \delta c(s_i^n) = \sum_{s_j^{n-1} < s_i^n} \varphi(c(s_j^{n-1})) .$$

Il est alors trivial de montrer que les groupes gradués

$$C_*(\alpha) = \{C_n(\alpha) ; \partial\} \quad \text{et} \quad C^*(\alpha) = \{C^n(\alpha) ; \delta\}$$

sont des complexes augmentés de chaînes resp. cochaînes semisimpliciales (cf. [8] pp. 36, 39). Ils définissent des foncteurs covariants $C_*(\alpha, 0)$ et $C^*(\alpha, 0)$ $Z_*(\alpha, 0)$ e.t.c. au moyen des equations

$$C_*(\alpha, 0)(M) = C_*(\alpha, M) \text{ et } C^*(\alpha, 0)(N) = C^*(\alpha, N) \text{ e.t.c.}$$

— 19° Au complexe $C_*(\alpha)$ $(C^*(\alpha))$ sont associés les groupes

$$\begin{aligned} Z_n(\alpha) &= \operatorname{Ker}(\partial : C_n(\alpha) \to C_{n-1}(\alpha)) , \\ (Z^n(\alpha) &= \operatorname{Ker}(\delta : C^n(\alpha) \to C^{n+1}(\alpha))) , \\ B_n(\alpha) &= \operatorname{Im}(\partial : C_{n+1}(\alpha) \to C_n(\alpha)) , \\ (B^n(\alpha) &= \operatorname{Im}(\delta : C^{n-1}(\alpha) \to C^n(\alpha))) , \\ &\text{et} \\ H_n(\alpha) &= Z_n(\alpha)/B_n(\alpha) \quad (H^n(\alpha) = Z^n(\alpha)/B^n(\alpha)) \end{aligned}$$

(cf. [8] pp. 19—23). Ce sont les groupes des (co-)cycles, (co-)bords et les groupes d'homologie (de cohomologie) de α à coefficients dans M (N).

Exemple. Soit X un espace topologique, A un sous-espace de X, α un recouvrement de X et G un groupe. Alors les groupes $H_n(\alpha, G^A)$ et $H^j(\alpha, G^A)$ sont isomorphes aux groupes correspondantes du nerf de α mod A à coefficients dans G i.e. $H_n(X_\alpha, A_\alpha, G)$ et $H^n(X_\alpha, A_\alpha, G)$ (cf. [6] pp. 234—236).

— 20° La f-projection $\pi_{\alpha\beta}$ et les f-homomorphismes φ^* et φ_* définissent les homomorphismes

$$\pi_n^{\alpha\beta} : C_n(\alpha) \to C_n(\beta) \quad \text{et} \quad \pi_{\alpha\beta}^n : C^n(\beta) \to C^n(\alpha)$$

au moyen des equations

$$\begin{aligned} \pi_n^{\alpha\beta}(c)(s) &= \sum_{\pi_{\alpha\beta}(s') = s} \varphi(c(s')) \quad \text{et} \\ \pi_{\alpha\beta}^n(c)(s') &= \varphi(c(\pi_{\alpha\beta}(s'))) , \; s' \in \alpha^n , \; s \in \beta^n . \end{aligned}$$

$\pi_n^{\alpha\beta}$ et $\pi_{\alpha\beta}^n$ commutent aux opérateurs bord resp. cobord induisant donc les homomorphismes

$$\pi_{(n)}^{\alpha\beta} : H_n(\alpha) \to H_n(\beta) \text{ et } \pi_{\alpha\beta}^{(n)} : H^n(\beta) \to H^n(\alpha) .$$

Lemme 5. Les homomorphismes $\pi_{(n)}^{\alpha\beta}$ et $\pi_{\alpha\beta}^{(n)}$ ne dépendent pas du choix de la projection $\pi_{\alpha\beta}$ (cf. [12] p. 458 et [8] pp. 26, 53, 54, 61 et 62).
— 21° L'agrégat α et le ∂ — (δ —) domaine $M(N)$ de coefficients définissent les foncteurs composés

$$\begin{aligned}
C_n(\alpha , \overset{\circ}{M}) &= C_n(\alpha , 0) \circ \overset{\circ}{M} , Z_n(\alpha , \overset{\circ}{M}) \text{ e.t.c.} \\
(C^n(\alpha , \overset{\circ}{N}) &= C^n(\alpha , 0) \circ \overset{\circ}{N} , Z^n(\alpha , \overset{\circ}{N}) \text{ e.t.c.) i.e.} \\
C_n(\alpha , \overset{\circ}{M})(P) &= C_n(\alpha , M|P) \text{ e.t.c. } (C^n(\alpha , \overset{\circ}{N})(P) = C^n(\alpha , N|P) \text{ e.t.c.)}
\end{aligned}$$

Ce sont évidemment des ∂ — (δ —) domaines de coefficients de base X .

Les transformations naturelles de foncteurs

$$C_*(\alpha , 0)(\partial) : C_n(\alpha , 0) \to C_{n-1}(\alpha , 0) \quad \text{et}$$
$$C^*(\alpha , 0)(\delta) : C^{n-1}(\alpha , 0) \to C^n(\alpha , 0)$$

définissent des homomorphismes

$$\overset{\circ}{\partial} : C_n(\alpha , \overset{\circ}{M}) \to C_{n-1}(\alpha , \overset{\circ}{M}) \text{ et } \overset{\circ}{\delta} : C^{n-1}(\alpha , \overset{\circ}{N}) \to C^n(\alpha , \overset{\circ}{N}) ,$$

satisfaisant aux conditions $\overset{\circ}{\partial}\overset{\circ}{\partial} = 0$ et $\overset{\circ}{\delta}\overset{\circ}{\delta} = 0$.

La projection $\pi_{\alpha\beta}$ et les f-homomorphismes φ_* et φ^* définissent les f-homomorphismes

$$\overset{\circ}{\pi}{}_*^{\alpha\beta} : C_*(\alpha , \overset{\circ}{M}) \to C_*(\beta , \overset{\circ}{M'}) \text{ et } \overset{\circ}{\pi}{}_{\alpha\beta}^* : C^*(\beta , \overset{\circ}{N'}) \to C^*(\alpha , \overset{\circ}{N}) .$$

Tenant compte des définitions 6, on obtient le

Lemme 6. Pour qu'un précofaisceau M (préfaisceau N) sur un espace topologique X soit un cofaisceau (faisceau) de base X il faut et il suffit que

$$H_i(\alpha , M) = 0 \qquad (H^i(\alpha , N) = 0)$$

pour $i = -1 , 0$ et pour tout agrégat ouvert α de X , fini dans l'homologie.

1\. 6. **Définitions 8.** D'après M. Alexandroff on appelle spectre de X tout système projectif $S = \{\alpha , \beta \in S ; \pi_{\alpha\beta}\}$ de recouvrements de X où les applications fonctoriels sont des projections $\pi_{\alpha\beta}$ (cf. [1] § 6). Convenons de désigner par $\ll$ la relation de préordre de S . La dimension dim (S) de S est le plus petit entier n , tel qu'il existe pour tout $\alpha \in S$ un tel $\beta \gg \alpha$ que $\dim(\beta) = n$.
— 22° Un autre spectre S_1 de X est plus fin que S , si tout $\alpha \in S$ possède un affinement dans S_1 . La notation est alors $S < S_1$.

— 23° Soit S' un spectre de Y. Un f-homomorphisme π de S dans S' est alors une transformation naturelle de S dans S' dont les applications fonctorielles $\pi_{\alpha\alpha'} : \alpha \to \alpha'$ $(\alpha \in S , \alpha' \in S')$ sont des f-projections.

Exemples:

A. (cf. [8] p. 233) Soit X un espace topologique. On peut supposer X totalement ordonné. Convenons de désigner par $U(X)$ l'ensemble des recouvrements ouverts de X de la forme $\alpha = (U_x^\alpha)_{x \in X}$ où U_x^α est un voisinage ouvert de x dans X. On pose $\alpha \ll \beta$, si $U_x^\alpha \supset U_x^\beta$ pour tout $x \in X$ et $\pi_{\beta\alpha}(U_x^\beta) = U_x^\alpha$ pour tout $x \in X$. On obtient ainsi un spectre $U(X)$ de X.

B. Si γ est un recouvrement ouvert quelconque de X, on trouve un tel $\alpha \in S$ que tout U_x^α est contenu dans $G_x \in \gamma$. Si l'on choisit pour tout U_x^α un G_x comme ci-dessus, on obtient une application $\pi_{\alpha\gamma}$ de α dans γ. Puisque $\pi_{\alpha\gamma}$ définit dans X une équivalence

$$x \sim x' \Leftrightarrow \pi_{\alpha\gamma}(U_x^\alpha) = \pi_{\alpha\gamma}(U_{x'}^\alpha) ,$$

on peut ordonner X de telle sorte que $\pi_{\alpha\gamma}$ est croissante et donc une projection. L'union $\{\gamma\} \cup \{\beta \in U(X) ; \beta \gg \alpha\}$ est alors un spectre $U(X)_\gamma$ de X.

C. Soit f une application continue de X dans Y. On peut alors ordonner X et Y de telle sorte que f est croissante. Si l'on pose $\alpha = (f^{-1}(U_{f(x)}^{\alpha'}))_{x \in X}$ et $\pi_{\alpha\alpha'}(f^{-1}(U_{f(x)}^{\alpha'})) = U_{f(x)}^{\alpha'}$ pour tout $\alpha' \in U(Y)$ et pour tout $x \in X$, on obtient un f-homomorphisme de $U(X)$ dans $U(Y)$.

D. Si l'on suppose dans **A.** que tout U_x^α soit un ensemble fermé qui contient x et que *l'ensemble* $\{U_x^\alpha\}_{x \in X}$ soit fini, on obtient un spectre $F(X)$ de X. Une application continue induit comme ci-dessus un f-homomorphisme $\bar{f} : F(X) \to F(Y)$. Si donc $A_n \subset A_{n-1} \subset \dots\dots \subset A_0 \subset A_{-1}$ est une suite de sous-ensembles fermés de X, les inclusions $I_i : A_i \to A_{i-1}$ induisent les homomorphismes $\bar{I}^i : F(A_i) \to F(A_{i-1})$, les ensembles A_i étant ordonnés par l'ensemble ordonné X. Il est alors évident, que les projections $\pi_{\beta_i\beta_{i-1}} : \beta_i \to \beta_{i-1}(\beta_i \in F(A_i) , \beta_{i-1} \in F(A_{i-1}))$ appartenant aux homomorphismes $\bar{I}^i$ sont injectives. Supposons donné comme dans [7] p. 320 un recouvrement fermé et fini α_i de A_i pour tout $i = -1, 0, \dots, n$ de telle sorte qu'on a donné pour tout $a_i \in \alpha_i$ $(i > -1)$ un élément $\pi_i(a_i)$ de α_{i-1} contenant a_i. Définissons successivement $J_n = \alpha_n$ et $J_{i-1} = J_i \cup \{\alpha_{i-1} - \pi_i(\alpha_i)\}$ $(i = 0, \dots, n)$. Il en découle que $J_i \subset J_{i-1}$ pour tout $i = 0, \dots, n$. Convenons de désigner par $\alpha_i' = (a_j')_{j \in J_i}$ $(i = -1, 0, \dots, n)$ le recouvrement fermé et fini de A_i tel que $a_j' = j$, si $j \in \alpha_i$, $j \notin \pi_{i+1}(\alpha_{i+1})$ et $a_j' = \pi_{i+1}(j)$, si $j \in J_{i+1}$. Si l'on ordonne J_{-1}, on ordonne à la fois ses sous-ensembles J_i $(i > -1)$. L'inclusion $J_i \to J_{i-1}$ définit alors une projection injective $\pi_i' : \alpha_i' \to \alpha_{i-1}'$ telle que

$$\pi_i'(a_j') = \pi_i(j) \text{ , si } j \in \alpha_i \text{ , } j \notin \pi_{i+1}(\alpha_{i+1}) \text{ et}$$
$$\pi_i'(a_j') = \pi_i(\pi_{i+1}(j)) \text{ , si } j \in J_{i+1} \text{ .}$$

Tenant compte du lemme 5 on a

$$H_n(\alpha_i , G) = H_n(\alpha_i' , G)$$

pour tout $n = -1, 0, 1, \ldots$; $i = -1, 0, \ldots, n$ et pour tout groupe G.

Soit $\beta_n = (\overset{n}{B}_x)_{x \in A_n}$ un recouvrement fermé de A_n tel que tout $\overset{n}{B}_x$ est un $a_n' \in \alpha_n'$ contenant x, — soit $\beta_{n-1} = (\overset{n-1}{B}_x)_{x \in A_{n-1}}$ un recouvrement fermé de A_{n-1} tel que $\overset{n-1}{B}_x = \pi_n'(\overset{n}{B}_x)$ pour $x \in A_n$ et du reste un $a_{n-1}' \in \alpha_{n-1}'$ contenant x e.t.c. Après un nombre fini de pas on obtient une suite

$$\beta_n , \beta_{n-1} , \ldots , \beta_0 , \beta_{-1}$$

de recouvrements fermés des ensembles A_i $(i = -1, 0, \ldots, n)$.

Si l'on ordonne X convenablement, alors $\beta_i \in F(A_i)$ pour tout $i = -1, 0, \ldots, n$. Si l'on considère tout élément de β_i comme un élément de α_i' on obtient une projection naturelle $\pi_{\beta_i \alpha_i'}$ et donc le spectre $F(A_i)_{\alpha_i'}$ pour tout $i = -1, 0, \ldots, n$. En vertu des définitions on voit alors que les inclusions $I_i : A_i \subset A_{i-1}$ et $J_i \subset J_{i-1}$ $(i = 0, \ldots, n)$ définissent les I_i-homomorphismes $\underset{i}{\pi''}: F(A_i)_{\alpha_i'} \to F(A_{i-1})_{\alpha_{i-1}'}$ et on obtient la situation de [7] p. 320.

1. 7. Au spectre S sont associés de façon fonctorielle les groupes

$$C_n(S , M) = \varprojlim_{\beta, \alpha \in S} \{C_n(\alpha , M) ; \pi_n^{\alpha\beta}\} \quad \text{et}$$
$$C^n(S , N) = \varinjlim_{\beta, \alpha \in S} \{C^n(\alpha , N) ; \pi^n_{\alpha\beta}\} ,$$

les opérateurs bord et cobord

$$\bar\partial = \varprojlim_{\beta, \alpha \in S} \{\partial : C_n(\alpha , M) \to C_{n-1}(\alpha , M) ; \pi_n^{\alpha\beta}\} \quad \text{et}$$
$$\bar\delta = \varinjlim_{\beta, \alpha \in S} \{\delta : C^{n-1}(\alpha , N) \to C^n(\alpha , N) ; \pi^n_{\alpha\beta}\} ,$$

les complexes

$$C_*(S , M) = \{C_n(S , M) ; \bar\partial\} \quad \text{et}$$
$$C^*(S , N) = \{C^n(S , N) ; \bar\delta\} ,$$

les groupes

$$Z_n(S , M) = \operatorname{Ker}(\bar\partial) , Z^{n-1}(S , N) = \operatorname{Ker}(\bar\delta) , B_{n-1}(S , M) = \operatorname{Im}(\bar\partial) ,$$
$$B^n(S , N) = \operatorname{Im}(\bar\delta) , H_n(S , M) = H_n(C_*(S , M)) , H^n(S , N) = H^n(C^*(S , N)) ,$$

$$\check{H}_n(S\,,M) = \lim_{\overleftarrow{\beta,\,\alpha \in S}} \{H^n(\alpha\,,M)\,;\,\pi^{\alpha\beta}_{(n)}\} \quad \text{et}$$

$$\check{H}^n(S\,,N) = \lim_{\overrightarrow{\beta,\,\alpha \in S}} \{H^n(\alpha\,,N)\,;\,\pi^{(n)}_{\alpha\beta}\}$$

et les ∂-resp. δ-domaines de coefficients

$$C_n(S\,,\mathring{M}) : C_n(S\,,\mathring{M})\,(P) = C_n(S\,,M|P) \quad \text{et}$$

$$C^n(S\,,\mathring{N}) : C^n(S\,,\mathring{N})\,(P) = C^n(S\,,N|P) \quad (P \subset X)\,.$$

Ici les homomorphismes

$$\varphi : C_n(S\,,\mathring{M})\,(P) \to C_n(S\,,\mathring{M})\,(Q) \qquad (P \subset Q \subset X) \text{ et}$$

$$\varphi : C^n(S\,,\mathring{N})\,(Q) \to C^n(S\,,\mathring{N})\,(P)$$

sont induits par les homomorphismes naturels $M|P \to M|Q$ et $N|Q \to N|P$.

Si aucun danger de confusion n'est possible, nous omettrons M et N dans les notations ci-dessus.

Les opérateurs bord et cobord

$$\bar{\partial} : C_n(S\,,M|P) \to C_{n-1}(S\,,M|P) \text{ et } \bar{\delta} : C^{n-1}(S\,,N|P) \to C^n(S\,,N|P)$$

induisent d'une façon naturelle les homomorphismes

$$\overline{\mathring{\partial}} : C_n(S\,,\mathring{M}) \to C_{n-1}(S\,,\mathring{M}) \text{ et } \overline{\mathring{\delta}} : C^{n-1}(S\,,\mathring{N}) \to C^n(S\,,\mathring{N})\,.$$

Les f-homomorphismes π, φ_* et φ^* et les projections $\pi_{\alpha\beta}$ et $\pi_{\alpha'\beta'}$ ci-dessus donnent naissance aux homomorphismes fonctoriels $C_n(S\,,\mathring{M}) \to C_n(S',\mathring{M}')$ et $C^n(S',\mathring{N}') \to C^n(S\,,\mathring{N})$, qui commutent aux homomorphismes $\overline{\mathring{\partial}}$ resp. $\overline{\mathring{\delta}}$, et aux diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
C_*(S\,,M) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "\pi^{\alpha}_*"'] & C_*(S',M') \arrow[d, "\pi^{\alpha'}_*"] \\
C_*(\alpha\,,M) \arrow[r, "\pi^{\alpha\alpha'}_*"] & C_*(\alpha',M')
\end{tikzcd}
,\qquad
\begin{tikzcd}
C^*(S\,,N) & C^*(S',N') \arrow[l, "\pi^*"'] \\
C^*(\alpha\,,N) \arrow[u, "\pi^*_{\alpha}"] & C^*(\alpha',N') \arrow[l, "\pi^*_{\alpha\alpha'}"'] \arrow[u, "\pi^*_{\alpha'}"']
\end{tikzcd}
,$$

$$\begin{tikzcd}
C_n(S\,,\mathring{M}) \arrow[r, "\mathring{\pi}_n"] \arrow[d, "\mathring{\pi}^{\alpha}_n"'] & C_n(S',\mathring{M}') \arrow[d, "\mathring{\pi}^{\alpha'}_n"] \\
C_n(\alpha\,,\mathring{M}) \arrow[r, "\mathring{\pi}_{\alpha\alpha'}"] & C_n(\alpha',\mathring{M}')
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
C^n(S\,,\mathring{N}) & C^n(S',\mathring{N}') \arrow[l, "\mathring{\pi}^n"'] \\
C^n(\alpha\,,\mathring{N}) \arrow[u, "\mathring{\pi}^n_{\alpha}"] & C^n(\alpha',\mathring{N}') \arrow[l, "\mathring{\pi}^n_{\alpha\alpha'}"'] \arrow[u, "\mathring{\pi}^n_{\alpha'}"']
\end{tikzcd}
.$$

Les homomorphismes π_* , π_*^{α} , $\pi_*^{\alpha'}$, π^* , π_{α}^* , $\pi_{\alpha'}^*$, $\pi_{(n)}^{\alpha\alpha'}$, $\pi_{\alpha\alpha'}^{(n)}$, $\pi_{(n)}^{\alpha\beta}$, $\pi_{\alpha\beta}^{(n)}$, $\pi_{(n)}^{\alpha'\beta'}$ et $\pi_{\alpha'\beta'}^{(n)}$ engendrent canoniquement les diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd}
H_n(S\,,M) \arrow[r, "\pi_{(n)}"] \arrow[d, "\varepsilon_{(n)}"'] & H_n(S',M') \arrow[d, "\varepsilon'_{(n)}"] \\
\check{H}_n(S\,,M) \arrow[r, "\check{\pi}_{(n)}"] \arrow[d, "\check{\pi}^{\alpha}_{(n)}"'] & \check{H}_n(S',M') \arrow[d, "\check{\pi}^{\alpha'}_{(n)}"] \\
H_n(\alpha\,,M) \arrow[r, "\pi^{\alpha\alpha'}_{(n)}"] & H_n(\alpha',M')
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
H^n(S\,,N) & H^n(S',N') \arrow[l, "\pi^{(n)}"'] \\
\check{H}^n(S\,,N) \arrow[u, "\varepsilon^{(n)}"] & \check{H}^n(S',N') \arrow[l, "\check{\pi}^{(n)}"'] \arrow[u, "\varepsilon'^{(n)}"'] \\
H^n(\alpha\,,N) \arrow[u, "\check{\pi}^{(n)}_{\alpha}"] & H^n(\alpha',N') \arrow[l, "\pi^{(n)}_{\alpha\alpha'}"'] \arrow[u, "\check{\pi}^{(n)}_{\alpha'}"']
\end{tikzcd} .$$

convenons de désigner par $\pi_{(n)}^{\alpha}$ resp. $\pi_{\alpha}^{(n)}$ l'homomorphisme composé $\check{\pi}_{(n)}^{\alpha}\varepsilon_{(n)}$ resp. $\varepsilon^{(n)}\check{\pi}_{\alpha}^{(n)}$.

Exemple. Soit A un sous-ensemble fermé d'un espace topologique X et G un groupe. Alors les groupes $\check{H}_j(U(X)\,,G^A)$ et $\check{H}^j(U(X)\,,G^A)$ sont deux à deux isomorphes aux groupes classiques de Čech du couple $(X\,,A)$ à coefficients dans G i.e. $H_j(X\,,A\,,G)$ et $H^j(X\,,A\,,G)$ (cf. [6] p. 237).

En vertu du lemme 5 on obtient le

Lemme 7. $\check{H}_n(S\,,M)$ et $\check{H}^n(S\,,N)$ ne dépendent pas du choix des projections de S.

Lemme 8. Supposons X compact et $F(X) > S > U(X)$. Si les sous-ensembles $A \subset P \subset X$ sont fermés dans X , il en découle que

$$\check{H}_n(F(X)\,,G^A|P) \cong \check{H}_n(S\,,G^A|P) \cong \check{H}_n(U(X)\,,G^A|P) \cong H_n(P\,,A\,,G) \text{ et}$$
$$\check{H}^n(F(X)\,,G^A|P) \cong \check{H}^n(S\,,G^A|P) \cong \check{H}^n(U(X)\,,G^A|P) \cong H^n(P\,,A\,,G)$$

pour tout groupe G .

Lemme 9. Si dim $(S) \leq n$, alors les groupes $C_{n+1}(S\,,M)$, $C^{n+1}(S\,,N)$, $H_{n+1}(S\,,M)$, $H^{n+1}(S\,,N)$, $\check{H}_{n+1}(S\,,M)$ et $\check{H}^{n+1}(S\,,N)$ sont tous nuls de sorte que

$$H_n(S\,,M) \cong Z_n(S\,,M) \cong \check{H}_n(S\,,M) .$$

Lemme 10. Les homomorphismes $\varepsilon^{(n)}$ sont toujours bijectifs. Pour que $\varepsilon_{(n)}$ soit bijectif il suffit qu'une de ces conditions est satisfaite:

a) dim $(S) \leq n$,

b) S est majoré (cf. [1] § 1) ,

c) Les groupes $C_n(\alpha\,,M)$ $(\alpha \in S)$ sont linéairement compacts.

Démonstration. La condition a) découle du lemme 9. Pour démontrer b) supposons que γ soit le plus grand élément de S (cf. [1] § 1). Alors les homomorphismes

$\pi_*^\gamma : C_*(S, M) \to C_*(\gamma, M)$ et $\check{\pi}_{(n)}^\gamma : \check{H}_n(S, M) \to H_n(\gamma, M)$ sont bijectifs de sorte que $\pi_{(n)}^\gamma : H_n(S, M) \to H_n(\gamma, M)$ est bijectif. Puisque $\check{\pi}_{(n)}^\gamma = \pi_{(n)}^\gamma \varepsilon_{(n)}$, on a $\varepsilon_{(n)} = \pi_{(n)}^\gamma \; (\check{\pi}_{(n)}^\gamma)^{-1}$ d'où l'assertion.

Dans le cas c) démontrons d'abord que $\varepsilon_{(n)}$ est surjectif. Tout élément de $\check{H}_n(S, M)$ est une famille $V = \{V_\alpha\} = \{z_\alpha + B_n(\alpha, M)\}_{\alpha \in S}$ ($z_\alpha \in Z_n(\alpha, M)$) de variétés non-vides des groupes $C_n(\alpha, M)$ telle que $\pi_n^{\beta\alpha}(V_\beta) \subset V_\alpha$ pour tout $\beta \gg \alpha$. En vertu de l'hypothèse et du lemme 4 l'ensemble $\overline{V} = \varprojlim_{\beta, \alpha \in S} \{V_\alpha ; \pi_n^{\beta\alpha}\}$ n'est pas vide. Si $z \in \overline{V} \subset Z_n(S, M)$, on voit que $\varepsilon_{(n)}(z + B_n(S, M)) = V$ d'où l'assertion.

Reste à montrer que $\varepsilon_{(n)}$ est injectif. Soit $z = \{z_\alpha\}$ un élément de $Z_n(S, M)$ tel que $z_\alpha = \partial c_\alpha \in B_n(\alpha, M)$ pour tout $\alpha \in S$. Convenons de désigner par V_α la variété $c_\alpha + Z_{n+1}(\alpha, M)$. Il en découle que $V_\alpha \neq \emptyset$ et $\pi_n^{\beta\alpha}(V_\beta) \subset V_\alpha$. Donc l'ensemble $\overline{V} = \varprojlim_{\beta, \alpha \in S} \{V_\alpha ; \pi_n^{\beta\alpha}\}$ n'est pas vide. Si $c \in \overline{V}$, on a $\partial c = z$, ce qui achève la démonstration.

1. 8. Pour terminer ce paragraphe on donne un exemple où $H_0(S, M) \neq \check{H}_0(S, M)$. Soit $T = \{e^{i\varphi} ; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ la 1-sphère et M le groupe additif Z des entiers rationnels. Convenons de désigner par $\bar{\alpha}_{-1}$ le recouvrement $\{T\}$ de T et par $\bar{\alpha}_n$ ($n \in Z$, $n > -1$) le recouvrement fermé et fini

$\{\overline{A}_1^n, \ldots, \overline{A}_{2\cdot 3^n}^n ; \overline{A}_{k+1}^n = \{\pi k/3^n \leq \varphi \leq \pi(k+1)/3^n ; k = 0, \ldots, 2 \cdot 3^n - 1\}\}$ de T (cf. fig. 1).

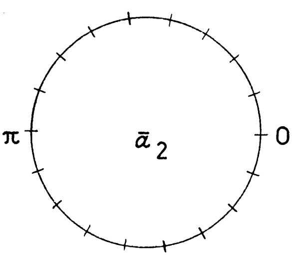

Fig.1.

Définissons l'application continue $f_j : T \to T$ ($j = 1, 2, 3, \ldots$) par l'équation $f_j(\varphi) = 3\varphi \bmod 2\pi$. Notons que $f_j(0) = 0$ et $f_j(\pi) = \pi$ pour tout j. On peut donc identifier 0 et π aux éléments de la limité projective $X = \varprojlim_j \{T ; f_j\}$ qui est bien connu comme la solenoide triadique. Elle est un espace compact et métrique. On a pour tout j l'application canonique $g_j : X \to T$ satisfaisant à la condition $g_{j-1} = f_j \circ g_j$. Il est facile de voir, que f_j applique les éléments de $\bar{\alpha}_j$ aux éléments de $\bar{\alpha}_{j-1}$.

Si l'on ordonne $\bar{\alpha}_j$ et $\bar{\alpha}_{j-1}$ convenablement, on obtient ainsi d'une façon naturelle une f_j-projection $\bar{\pi}_j : \bar{\alpha}_j \to \bar{\alpha}_{j-1}$.

Si l'on désigne pour tout j

$\alpha_j = \{A^j_k \,;\, A^j_k = g_j^{-1}(\bar{A}^j_k) \,;\, \bar{A}^j_k \in \bar{\alpha}_j\}$ et note par π_j la projection de α_j dans α_{j-1} défini par $\bar{\pi}_j$, on obtient, tenant compte de la condition $g^{j-1} = f_j \circ g_j$, un spectre S de X tel que $F(X) > S > U(X)$. On a $H_0(\alpha_j, Z) = 0$ pour tout j de sorte que $\check{H}_0(S, Z) = 0$.

Supposons $\bar{z} = \{z_j\} \in Z_0(S, Z)$ donné par les équations $z_j(A^j_1) = -1$, $z_j(A^j_{3^j}) = 1$ et supposons que $\bar{z} = \partial\bar{c} = \{\partial c_j\} \in B_0(S, Z)$. On a alors

$$c_j(A^j_1, A^j_2) - c_j(A^j_{2\cdot 3^j}, A^j_1) = -z_j(A^j_1) = 1,$$
$$c_j(A^j_{3^j-1}, A^j_{3^j}) - c_j(A^j_{3^j}, A^j_{3^j+1}) = z(A^j_{3^j}) = 1,$$
$$c_j(A^j_1, A^j_2) = c_j(A^j_2, A^j_3) = \ldots\ldots = c_j(A^j_{3^j-1}, A^j_{3^j}) = n_1 \quad \text{et}$$
$$c_j(A^j_{3^j}, A^j_{3^j+1}) = \ldots\ldots = c_j(A^j_{2\cdot 3^j}, A^j_1) = n_2 = n_1 - 1.$$

Alors il est un exercise de calcul trivial de montrer que

$$c_{j-1}(A^{j-1}_{3^{j-1}-1}, A^{j-1}_{3^{j-1}}) = 2n_1 + n_2 = 3n_1 - 1 \quad \text{et}$$
$$c_{j-1}(A^{j-1}_{2\cdot 3^{j-1}}, A^{j-1}_1) = n_1 + 2n_2 = 3n_1 - 2$$

(cf. Fig. 2).

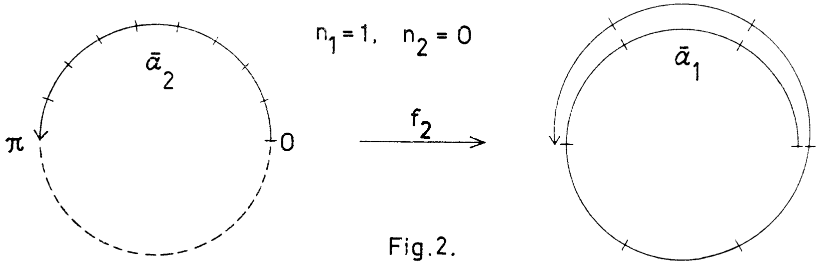

Fig. 2.

Par itération on obtient pour tout $0 < i < j$ les équations

$$d^j_i = c_{j-i}(A^{j-i}_{3^{j-i}-1}, A^{j-i}_{3^{j-i}}) = m_i n_1 + (m_i - 1)n_2 = (2m_i - 1)n_1 - m_i + 1$$

et

$$e^j_i = c_{j-i}(A^{j-i}_{2\cdot 3^{j-i}}, A^{j-i}_1) = (m_i - 1)n_1 + m_i n_2$$

où $m_1 = 2$ et $m_i = 3m_{i-1} - 1 > 2m_{i-1} > 2$ $(i > 1)$.

Puisque $n_2 = n_1 - 1$, on a $n_1 n_2 \geq 0$. On a donc $|d^j_i| > 2^i |n_1|$ et $|e^j_i| > 2^i |n_2|$.

Puisque $n_1 \neq n_2$, on peut, par exemple, supposer que $n_1 \neq 0$. Il en découle que $\lim\limits_{\substack{j\to\infty \\ i\to\infty}} |d_i^j| = \infty$. Puisqu'on peut choisir j (et donc i) aussi grand que l'on veut, on obtient une contradiction. Il en découle que $\bar{z} \notin B_0(S\,,Z)$ et donc $H_0(S\,,Z) \neq 0$.

§ 2. Complexes doubles

2. 1. Soit $\overset{i}{C}_* = \{\overset{i}{C}_{pq}\,;\,\partial'\,,\,\partial''\}$ un complexe double augmenté de chaînes de groupes (cf. [8] p. 32). On peut le représenter sous la forme d'un diagramme anticommutatif

$$\begin{tikzcd}
{} & {} \arrow[d, "\partial'"'] & {} \arrow[d, "\partial'"] & {} \\
{} & \overset{i}{C}_{p,q-1} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & \overset{i}{C}_{pq} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"] & {} \arrow[l, "\partial''"'] \\
{} & \overset{i}{C}_{p-1,q-1} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"'] & \overset{i}{C}_{p-1,q} \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, "\partial'"] & {} \arrow[l, "\partial''"'] \\
{} & {} & {} & {}
\end{tikzcd}$$

où $\overset{i}{C}_{pq} = 0$ pour $p < -1$ ou bien pour $q < -1$, $\partial'\,\partial' = 0$, $\partial''\,\partial'' = 0$ et $\partial'\,\partial'' + \partial''\,\partial' = 0$.

Les colonnes et les lignes de ce diagramme définissent les complexes de chaînes

$$'\overset{i}{C}_{*q} = \{\overset{i}{C}_{pq}\,;\,\partial'\} \text{ et } ''\overset{i}{C}_{p*} = \{\overset{i}{C}_{pq}\,;\,\partial''\}\,.$$

Également on peut représenter un complexe double augmenté $\overset{i}{C}{}^* = \{\overset{i}{C}{}^{pq}\,;\,\delta'\,,\,\delta''\}$ de cochaînes de groupes sous la forme d'un digramme anticommutatif

$$\begin{tikzcd}
{} & {} & {} & {} \\
{} \arrow[r, "\delta''"] & \overset{i}{C}{}^{p,q-1} \arrow[u, "\delta'"] \arrow[r, "\delta''"] & \overset{i}{C}{}^{pq} \arrow[u, "\delta'"'] \arrow[r, "\delta''"] & {} \\
{} \arrow[r, "\delta''"] & \overset{i}{C}{}^{p-1,q-1} \arrow[u, "\delta'"] \arrow[r, "\delta''"] & \overset{i}{C}{}^{p-1,q} \arrow[u, "\delta'"'] \arrow[r, "\delta''"] & {} \\
{} & {} \arrow[u, "\delta'"] & {} \arrow[u, "\delta'"'] & {}
\end{tikzcd}$$

où $\overset{i}{C}{}^{pq} = 0$ pour $p < -1$ ou bien pour $q < -1$, $\delta'\delta' = \delta''\delta'' = \delta'\delta'' + \delta''\delta' = 0$. Les colonnes et les lignes de ce diagramme sont des complexes simples et augmentés de cochaînes

$$'\overset{i}{C}{}^{*q} = \{\overset{i}{C}{}^{pq}\,;\,\delta'\} \text{ et } ''\overset{i}{C}{}^{p*} = \{\overset{i}{C}{}^{pq}\,;\,\delta''\}\,.$$

2. 2. Examinons d'abord $\overset{i}{C}_*$. Convenons de désigner par $''\overset{i}{Z}_{p*}$ le noyau Ker $(\partial' : ''\overset{i}{C}_{p*} \to ''\overset{i}{C}_{p-1*})$ et par $''\overset{i}{B}_p$ l'image $\partial'(''\overset{i}{C}_{p+1*})$ (cf. [11] p. 704). De la suite exacte

$$0 \longleftarrow ''\overset{i}{B}_{p-1*} \longleftarrow ''\overset{i}{C}_{p*} \longleftarrow ''\overset{i}{Z}_{p*} \longleftarrow 0$$

découle alors la suite exacte d'homologie

$$(2.\ 1) \quad \ldots \longleftarrow H_{q-1}(''\overset{i}{Z}_{p*}) \xleftarrow{\overset{i}{\partial}_q} H_q(''\overset{i}{B}_{p-1*}) \xleftarrow{\overset{i}{I}_q} H_q(''\overset{i}{C}_{p*}) \xleftarrow{\overset{i}{J}_q} H_q(''\overset{i}{Z}_{p*}) \xleftarrow{\overset{i}{\partial}_{q+1}} \ldots\ldots$$

On peut calculer l'homomorphisme $\overset{i}{\partial}_q$ par la construction habituelle (cf. par exemple [8] p. 24) comme suit: Prenons un $\partial'(z)$ $(z \in \overset{i}{C}_{pq})$ qui représente un élément x de $H_q(''\overset{i}{B}_{p-1*})$. Alors $\partial''(z)$ représente l'élément $\overset{i}{\partial}_q(x)$ de $H_{q-1}(''\overset{i}{Z}_{p*})$.

Si l'on suppose

$$(2.\ 2) \qquad ''\overset{i}{B}_{pq} = ''\overset{i}{Z}_{pq}$$

pour tout $q > -1$, il en découle que $H_q(''\overset{i}{B}_{p*}) = H_q(''\overset{i}{Z}_{p*})$ pour tout $q > -1$. On obtient ainsi par composition l'homomorphisme

$$\overset{i}{D}_n = \overset{i}{\partial}_0\, \overset{i}{\partial}_1 \ldots . \overset{i}{\partial}_n : H_n(''\overset{i}{Z}_{-1*}) \to H_{-1}(''\overset{i}{Z}_{n*})$$

pour tout $n > -1$.

2. 3. On obtient des résultats analogues dans la cohomologie en posant

$$''\overset{i}{B}{}^{p-1*} = \delta'(''\overset{i}{C}{}^{p-1*}) \text{ et } ''\overset{i}{Z}{}^{p*} = ''\overset{i}{C}{}^{p*}/''\overset{i}{B}{}^{p-1*}\,.$$

De la suite exacte

$$0 \to ''\overset{i}{B}{}^{p-1*} \to ''\overset{i}{C}{}^{p*} \to ''\overset{i}{Z}{}^{p*} \to 0$$

découle alors la suite exacte de cohomologie

$$\text{(2. 1. c.)} \qquad \ldots \longrightarrow H^{q-1}(''\overset{i}{Z}{}^{p*}) \xrightarrow{\overset{i}{\delta}{}^{q}} H^q(''\overset{i}{B}{}^{p-1*}) \xrightarrow{\overset{i}{I}{}^{q}} H^q(''\overset{i}{C}{}^{p*}) \xrightarrow{\overset{i}{J}{}^{q}} H^q(''\overset{i}{Z}{}^{p*}) \xrightarrow{\overset{i}{\delta}{}^{q+1}} \ldots$$

Si l'on suppose que

$$\text{(2. 2. c.)} \qquad ''\overset{i}{B}{}^{p-1,q} = \operatorname{Ker}\,(\delta' : ''\overset{i}{C}{}^{pq} \to ''\overset{i}{C}{}^{p+1,q})$$

pour tout $q > -1$, il en découle que $''\overset{i}{Z}{}^{pq}$ est canoniquement isomorphe à $''\overset{i}{B}{}^{pq}$ pour tout $q > -1$. On a alors $\delta''(''\overset{i}{B}{}^{p,-1}) \cong \delta''(''\overset{i}{Z}{}^{p,-1})$ de sorte que $H^q(''\overset{i}{Z}{}^{p*}) \cong H^q(''\overset{i}{B}{}^{p*})$ pour tout $q > -1$. On obtient alors par composition l'homomorphisme

$$\overset{i}{D}{}^{n} = \overset{i}{\delta}{}^{n}\overset{i}{\delta}{}^{n-1} \ldots \overset{i}{\delta}{}^{0} : H^{-1}(''\overset{i}{Z}{}^{n*}) \to H^n(''\overset{i}{Z}{}^{-1*})$$

pour tout $n > -1$.

2. 4. Si l'on a donné les homomorphismes $\overset{i}{g} : \overset{i}{C}_* \to \overset{i-1}{C}_*$ et $\overset{i}{h} : \overset{i-1}{C}{}^* \to \overset{i}{C}{}^*$ des complexes doubles de chaînes resp. cochaînes, on obtient de façon naturelle les diagrammes commutatifs

$$\text{(2. 3.)} \quad \begin{tikzcd}
{} & H_{q-1}(''\overset{i}{Z}_{p*}) \arrow[l] \arrow[d] & H_q(''\overset{i}{B}_{p-1*}) \arrow[l, "\overset{i}{\partial}_q"'] \arrow[d, "\overset{i}{g}{}^{B}_{q}"'] & H_q(''\overset{i}{C}_{*}) \arrow[l, "\overset{i}{I}_q"'] \arrow[d, "\overset{i}{g}{}^{C}_{q}"'] & {} \arrow[l, "\overset{i}{J}_q"'] \\
{} & H_{q-1}(''\overset{i-1}{Z}_{p*}) \arrow[l] & H_q(''\overset{i-1}{B}_{p-1*}) \arrow[l, "\overset{i-1}{\partial}_q"'] & H_q(''\overset{i-1}{C}_{p*}) \arrow[l, "\overset{i-1}{I}_q"'] & {} \arrow[l, "\overset{i-1}{J}_q"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
H_q(''\overset{i}{Z}_{p*}) \arrow[d, "\overset{i}{g}{}^{Z}_{q}"'] & H_{q+1}(''\overset{i}{B}_{p-1*}) \arrow[l, "\overset{i}{\partial}_{q+1}"'] \arrow[d] & {} \arrow[l] \\
H_q(''\overset{i-1}{Z}_{p*}) & H_{q+1}(''\overset{i-1}{B}_{p-1*}) \arrow[l, "\overset{i-1}{\partial}_{q+1}"'] & {} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \overset{i}{H}{}^{q-1}(''Z^{p*}) \arrow[r, "\overset{i}{\delta}{}^{q}"] & \overset{i}{H}{}^{q}(''B^{p-1*}) \arrow[r, "\overset{i}{I}{}^{q}"] & \overset{i}{H}{}^{q}(''C^{p*}) \arrow[r, "\overset{i}{J}{}^{q}"] & {} \\
{} \arrow[r] & \overset{i-1}{H}{}^{q-1}(''Z^{p*}) \arrow[u] \arrow[r, "\overset{i}{\delta}{}^{q}"] & \overset{i-1}{H}{}^{q}(''B^{p-1*}) \arrow[u, "\overset{i}{h}{}^{q}_{B}"] \arrow[r, "\overset{i-1}{I}{}^{q}"] & \overset{i-1}{H}{}^{q}(''C^{p*}) \arrow[u, "\overset{i}{h}{}^{q}_{C}"] \arrow[r, "\overset{i-1}{J}{}^{q}"] & {}
\end{tikzcd}$$

(2. 3. c.)

$$\begin{tikzcd}
\overset{i}{H}{}^{q}(''Z^{p*}) \arrow[r, "\overset{i}{\delta}{}^{q+1}"] & \overset{i}{H}{}^{q+1}(''B^{p-1*}) \\
\overset{i-1}{H}{}^{q}(''Z^{p*}) \arrow[u, "\overset{i}{h}{}^{q}_{Z}"] \arrow[r, "\overset{i-1}{\delta}{}^{q+1}"] & \overset{i-1}{H}{}^{q+1}(''B^{p-1*}) \arrow[u]
\end{tikzcd} .$$

2. 5. On obtient des résultats analogiques à ceux de M. Floyd (cf. [7] p. 336), si l'on considère une suite

$$\overset{n}{C}_* \xrightarrow{\overset{n}{g}} \overset{n-1}{C}_* \xrightarrow{\overset{n-1}{g}} \quad \cdots\cdots \quad \xrightarrow{\overset{0}{g}} \overset{-1}{C}_*$$

où la condition (2. 2.) est satisfaite pour tout $i = -1, 0, \ldots, n$ et pour tout $q > -1$. Si l'on pose dans (2. 3.) $p = i$, $q = n - i - 1$ et si l'on suppose $\mathrm{Im}(\overset{i}{g}{}^{C}_{n-i-1}) = 0$ pour tout $i = 0, \ldots, n$, on voit alors dans (2. 3.) que

$$\mathrm{Im}(\overset{i}{g}{}^{Z}_{n-i-1}) \subset \mathrm{Im}(\overset{i-1}{\partial}_{n-i}) \text{ et } \mathrm{Ker}(\overset{i}{\partial}_{n-i-1}) \subset \mathrm{Ker}(\overset{i}{g}{}^{B}_{n-i-1}) = \mathrm{Ker}(\overset{i}{g}{}^{Z}_{n-i-1})$$

pour tout $i = 0, \ldots, n$ de sorte que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Im}(\overset{0}{g}{}^{Z}_{-1}\overset{1}{g}{}^{Z}_{-1} \ldots \overset{n}{g}{}^{Z}_{-1}) \subset \mathrm{Im}(\overset{0}{g}{}^{Z}_{-1} \ldots \overset{n-1}{g}{}^{Z}_{-1}\,\overset{n-1}{\partial}_{0}) = \\
&\mathrm{Im}(\overset{-1}{\partial}_{0}\overset{0}{g}{}^{Z}_{0} \ldots \overset{n-1}{g}{}^{Z}_{0}) \subset \mathrm{Im}(\overset{-1}{\partial}_{0}\overset{0}{g}{}^{Z}_{0} \ldots \overset{n-2}{g}{}^{Z}_{0}\,\overset{n-2}{\partial}_{1}) = \\
&\mathrm{Im}(\overset{-1}{\partial}_{0}\,\overset{-1}{\partial}_{1}\,\overset{0}{g}{}^{Z}_{1} \ldots \overset{n-2}{g}{}^{Z}_{1}) \subset \ldots\ldots = \\
&\mathrm{Im}(\overset{-1}{\partial}_{0}\,\overset{-1}{\partial}_{1} \ldots \overset{-1}{\partial}_{n-1}\,\overset{0}{g}{}^{Z}_{n-1}) \subset \mathrm{Im}(\overset{-1}{\partial}_{0}\,\overset{-1}{\partial}_{1} \ldots \overset{-1}{\partial}_{n}) = \mathrm{Im}(\overset{-1}{D}_{n})
\end{aligned}$$

et

$$\mathrm{Ker}(\overset{n-1}{D}_{n-1}) = \mathrm{Ker}(\overset{n-1}{\partial_0}\,\overset{n-1}{\partial_1}\dots\overset{n-1}{\partial}_{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(\overset{n-1}{g^Z_0}\,\overset{n-1}{\partial_1}\dots\overset{n-1}{\partial}_{n-1}) =$$

$$\mathrm{Ker}(\overset{n-2}{\partial_1}\,\overset{n-2}{\partial_2}\dots\overset{n-2}{\partial}_{n-1}\,\overset{n-1}{g^Z_{n-1}}) \subset \dots\dots =$$

$$\mathrm{Ker}(\overset{0}{\partial}_{n-1}\overset{1}{g^Z_{n-1}}\dots\overset{n-1}{g^Z_{n-1}}) \subset \mathrm{Ker}(\overset{0}{g^Z_{n-1}}\overset{1}{g^Z_{n-1}}\dots\overset{n-1}{g^Z_{n-1}})\,.$$

Si l'on désigne $\overset{0}{g^Z_i}\,\overset{1}{g^Z_i}\dots\overset{k}{g^Z_i} = \overset{k}{g_i} : H_i(''Z_{k*}) \to \overset{-1}{H_i}(''Z_{k*})$ pour tout $i = -1, 0, \dots, n$, $k = 0, \dots, n$, on obtient le

Théorème 1. Si $\mathrm{Im}(\overset{i}{g^C_{n-i-1}}) = 0$ pour tout $i = 0, \dots, n$, il en découle que

$$\mathrm{Im}(g^n_{-1}) \subset \mathrm{Im}(\overset{-1}{D}_n) \text{ et } \mathrm{Ker}(g^{n-1}_{n-1}) \supset \mathrm{Ker}(\overset{n-1}{D}_{n-1})\,.$$

2. 6. Au cas dual nous avons une suite

$$\overset{n}{C^*} \xleftarrow{\;\overset{n}{h}\;} \overset{n-1}{C^*} \xleftarrow{\;\overset{n-1}{h}\;} \dots\dots \xleftarrow{\;\overset{0}{h}\;} \overset{-1}{C^*}$$

de homomorphismes de complexes doubles augmentés de cochaînes telle que la condition (2. 2. c.) est satisfaite pour tout $i = -1, 0, \dots, n$ et pour tout $q > -1$. Si l'on pose dans (2. 3. c) $p = i$, $q = n - i - 1$ et si l'on suppose $\mathrm{Im}(\overset{i}{h}{}^{n-i-1}_C) = 0$ pour tout $i = 0, \dots, n$, on voit alors dans (2. 3. c.) que

$$\mathrm{Ker}(\overset{i}{h}{}^{n-i-1}_Z) \supset \mathrm{Ker}(\overset{i-1}{\delta}{}^{n-i}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(\overset{i}{h}{}^{n-i-1}_Z) = \mathrm{Im}(\overset{i}{h}{}^{n-i-1}_B) \subset \mathrm{Im}(\overset{i}{\delta}{}^{n-i-1})$$

pour tout $i = 0, \dots, n$. On obtient donc les inclusions

$$\mathrm{Ker}(\overset{n}{h}{}^{-1}_Z \dots \overset{0}{h}{}^{-1}_Z) \supset \mathrm{Ker}(\overset{n-1}{\delta^0}\,\overset{n-1}{h}{}^{-1}_Z \dots \overset{0}{h}{}^{-1}_Z) =$$

$$\mathrm{Ker}(\overset{n-1}{h^0_Z}\dots\overset{0}{h^0_Z}\,\overset{-1}{\delta^0}) \supset \mathrm{Ker}(\overset{n-2}{\delta^1}\,\overset{n-2}{h^0_Z}\dots\overset{0}{h^0_Z}\,\overset{-1}{\delta^0}) =$$

$$\mathrm{Ker}(\overset{n-2}{h^1_Z}\dots\overset{0}{h^1_Z}\,\overset{-1}{\delta^1}\,\overset{-1}{\delta^0}) \supset \dots\dots =$$

$$\mathrm{Ker}(\overset{0}{h}{}^{n-1}_Z\,\overset{-1}{\delta}{}^{n-1}\dots\overset{-1}{\delta^0}) \supset \mathrm{Ker}(\overset{-1}{\delta^n}\dots\overset{-1}{\delta^0}) = \mathrm{Ker}(\overset{-1}{D^n})$$

et

$$\mathrm{Im}(\overset{n-1}{D}{}^{n-1}) = \mathrm{Im}(\overset{n-1}{\delta}{}^{n-1}\dots\overset{n-1}{\delta^0}) \supset \mathrm{Im}(\overset{n-1}{\delta}{}^{n-1}\dots\overset{n-1}{\delta^1}\,\overset{n-1}{h^0_Z}) =$$

$$\mathrm{Im}(\overset{n-1}{h}{}^{n-1}\,\overset{n-2}{\delta}{}^{n-1}\dots\overset{n-2}{\delta^1}) \supset \dots\dots =$$

$$\mathrm{Im}(\overset{n-1}{h}{}^{n-1}_Z\dots\overset{1}{h}{}^{n-1}_Z\,\overset{0}{\delta}{}^{n-1}) \supset \mathrm{Im}(\overset{n-1}{h}{}^{n-1}_Z\dots\overset{0}{h}{}^{n-1}_Z)\,.$$

Si l'on désigne
$\overset{k}{h}{}^i_Z \; \dots \; \overset{0}{h}{}^i_Z = h^i_k : H^i(''\overset{-1}{Z}{}^{k*}) \to H^i(''\overset{k}{Z}{}^{k*})$ pour tout $i = 1, 0, \dots, n$, $k = 0, \dots, n$, on obtient le

Théorème 1c. (Cf. Dyer p. 128) Si $\mathrm{Im}(\overset{i}{h}{}^{n-i-1}_C) = 0$ pour tout $i = 0, \dots, n$, il en découle que

$$\mathrm{Ker}(h^{-1}_n) \supset \mathrm{Ker}(\overset{-1}{D}{}^n) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(h^{n-1}_{n-1}) \subset \mathrm{Im}(\overset{n-1}{D}{}^{n-1}) .$$

2. 6. Puisque les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(''\overset{n}{Z}_{-1*}) \arrow[r, "\overset{n}{D}_{n-1}"] \arrow[d, "\overset{n}{g}{}^Z_{n-1}"'] & H_{-1}(''\overset{n}{Z}_{n-1*}) \arrow[d, "\overset{n}{g}{}^Z_{-1}"'] \\
H_{n-1}(''\overset{n-1}{Z}_{-1*}) \arrow[r, "\overset{n-1}{D}_{n-1}"] \arrow[d, "g^{n-1}_{n-1}"'] & H_{-1}(''\overset{n-1}{Z}_{n-1*}) \arrow[d, "g^{n-1}_{-1}"'] \\
H_{n-1}(''\overset{-1}{Z}_{-1*}) \arrow[r, "\overset{-1}{D}_{n-1}"] & H_{-1}(''\overset{-1}{Z}_{n-1*})
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
H^{n-1}(''\overset{n}{Z}{}^{-1*}) & H^{-1}(''\overset{n}{Z}{}^{n-1*}) \arrow[l, "\overset{n}{D}{}^{n-1}"'] \\
H^{n-1}(''\overset{n-1}{Z}{}^{-1*}) \arrow[u, "\overset{n}{h}{}^{n-1}_Z"] & H^{-1}(''\overset{n-1}{Z}{}^{n-1*}) \arrow[l, "\overset{n-1}{D}{}^{n-1}"'] \arrow[u, "\overset{n}{h}{}^{-1}_Z"] \\
H^{n-1}(''\overset{-1}{Z}{}^{-1*}) \arrow[u, "h^{n-1}_{n-1}"] & H^{-1}(''\overset{-1}{Z}{}^{n-1*}) \arrow[l, "\overset{-1}{D}{}^{n-1}"'] \arrow[u, "h^{-1}_{n-1}"]
\end{tikzcd}$$

sont commutatifs et $g^n_{n-1} = g^{n-1}_{n-1} \overset{n}{g}{}^Z_{n-1}$, $h^{n-1}_n = \overset{n}{h}{}^{n-1}_Z h^{n-1}_{n-1}$, on obtient immédiatement le

Corollaire 1. Sous les hypothèses du théorème 1

$$\mathrm{Ker}(\overset{n}{g}{}^Z_{-1} \overset{n}{D}_{n-1}) \subset \mathrm{Ker}(g^n_{n-1}) .$$

et le

Corollaire 1c. Sous les hypothèses du théorème 1 c

$$\mathrm{Im}(\overset{n}{D}{}^{n-1} \overset{n}{h}{}^{-1}_Z) \supset \mathrm{Im}(h^{n-1}_n) .$$

§ 3. Théorèmes fondamentaux

3. 1. Considérons ici des applications

$$\overset{n}{X} \xrightarrow{\overset{n}{f}} \overset{n-1}{X} \xrightarrow{\overset{n-1}{f}} \dots\dots \xrightarrow{\overset{0}{f}} \overset{-1}{X}$$

d'ensembles, des $\overset{i}{f}$-homomorphismes correspondants

$$M^n \xrightarrow{\overset{n}{\varphi}_*} M^{n-1} \xrightarrow{\overset{n-1}{\varphi}_*} \cdots\cdots \xrightarrow{\overset{0}{\varphi}_*} M^{-1},$$

$$N^n \xleftarrow{\overset{n}{\varphi}{}^*} N^{n-1} \xleftarrow{\overset{n-1}{\varphi}{}^*} \cdots\cdots \xleftarrow{\overset{0}{\varphi}{}^*} N^{-1} \quad \text{et}$$

$$\overset{n}{S} \xrightarrow{\overset{n}{\pi}} \overset{n-1}{S} \xrightarrow{\overset{n-1}{\pi}} \cdots\cdots \xrightarrow{\overset{-1}{\pi}} S^{-1}$$

de ∂- et δ-domaines de coefficients et de spectres et enfin des $\overset{i}{f}$-projections *injectives*

$$\overset{n}{\alpha} \xrightarrow{\overset{n}{\pi}{}'} \overset{n-1}{\alpha} \xrightarrow{\overset{n-1}{\pi}{}'} \cdots\cdots \xrightarrow{\overset{-1}{\pi}{}'} \overset{-1}{\alpha} \quad (\alpha \in \overset{i}{S}\,,\ \overset{i}{\pi}{}' \in \overset{i}{\pi})$$

des recouvrements finis $\overset{i}{\alpha}$ des ensembles $\overset{i}{X}$ $(i = -1, 0, \ldots, n$; $n > -1)$.

Les applications ci-dessus donnent naissance aux diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc} H_j(\overset{n}{S}, M^n) & \xrightarrow{\overset{n,-1}{\pi}_{(j)}} & H_j(\overset{-1}{S}, M^{-1}) \\ \Big\downarrow \pi^{\overset{n}{\alpha}}_{(j)} & & \Big\downarrow \pi^{\overset{-1}{\alpha}}_{(j)} \\ H_j(\overset{n}{\alpha}, M^n) & \xrightarrow{\pi^{\overset{n}{\alpha}\overset{-1}{\alpha}}_{(j)}} & H_j(\overset{-1}{\alpha}, M^{-1}) \end{array} \tag{3. 1.}$$

et

$$\begin{array}{ccc} H^j(\overset{n}{S}, N^n) & \xleftarrow{\overset{n,-1}{\pi}{}^{(j)}} & H^j(\overset{-1}{S}, N^{-1}) \\ \Big\uparrow \pi^{(j)}_{\overset{n}{\alpha}} & & \Big\uparrow \pi^{(j)}_{\overset{-1}{\alpha}} \\ H^j(\overset{n}{\alpha}, N^n) & \xleftarrow{\pi^{(j)}_{\overset{n}{\alpha}\overset{-1}{\alpha}}} & H^j(\overset{-1}{\alpha}, N^{-1})\,. \end{array} \tag{3. 1. c.}$$

3. 2. **Théorème 2.** Si

$$\mathrm{Im}(H_{n-k-1}(\overset{k}{S}, M^k \,|\, \widehat{s_1^k}) \to H_{n-k-1}(\overset{k-1}{S}, M^{k-1} \,|\, \widehat{\overset{k}{\pi}{}'(s_1^k)}\,)\,) = 0$$

pour tout k-simplexe $s_1^k \in {}^+\overset{k}{\alpha}{}^k$ $(k = 0, \ldots, n)$, il s'ensuit que

$$\mathrm{Im}(\pi^{\overset{-1}{\alpha}}_{(n)}) \supset \mathrm{Im}(\pi^{\overset{n}{\alpha}\overset{-1}{\alpha}}_{(n)}) \ \text{ et } \ \mathrm{Ker}(\pi^{\overset{n}{\alpha}}_{(n-1)}) \subset \mathrm{Ker}(\overset{n,-1}{\pi}_{(n-1)})\,.$$

Démonstration. 1° Formons les complexes doubles de chaînes $\overset{i}{C}_*$ où a) $\overset{i}{C}_{pq} = C_p(\overset{i}{\alpha}, C_q(\overset{i}{S}, \mathring{M}^i))$, b) ∂' est l'opérateur bord de $\overset{i}{C}_*(\alpha, C_q(\overset{i}{S}, \mathring{M}^i))$ et c) ∂'' est l'homomorphisme fonctoriel $(-1)^{p+1}C^p(\overset{i}{\alpha}, \overset{\circ}{\overline{\partial}}) : C_p(\overset{i}{\alpha}, C_q(\overset{i}{S}, \mathring{M}^i)) \to C_p(\overset{i}{\alpha}, C_{q-1}(\overset{i}{S}, \mathring{M}^i))$.

2° Montrons d'abord que $H_n('\overset{i}{C}_{*q}) = 0$ pour tout n et pour tout $q > -1$. Puisque $\overset{i}{\alpha}$ est *fini*, on peut identifier $\overset{i}{C}_*$ à $\varprojlim_{\beta \gg \overset{i}{\alpha}} C^\beta_*$ où C^β_* est le complexe double:

$$C^\beta_{pq} = C_p(\overset{i}{\alpha}, C_q(\beta, \mathring{M}^i)).$$

Le sous-groupe $Z_p(\overset{i}{\alpha}, C_q(\overset{i}{S}, \mathring{M}^i))$ de $\overset{i}{C}_{pq}$ s'identifie donc au sous-groupe $\varprojlim_{\beta \gg \overset{i}{\alpha}} Z_p(\overset{i}{\alpha}, C_q(\beta, \mathring{M}^i))$ (cf. [1] § 1). Tout cycle z de $Z_p(\overset{i}{\alpha}, C_q(\overset{i}{S}, \mathring{M}^i))$ est alors une famille $(z^\beta)_{\beta \gg \overset{i}{\alpha}}$ où $z^\beta \in Z_p(\overset{i}{\alpha}, C_q(\beta, \mathring{M}^i))$. z^β associe à tout simplexe

$$s^p_l = (A_{i_0}, \dots, A_{i_p}) \in \overset{i}{\alpha}{}^p$$

une chaîne $c^\beta_l \in C_q(\beta, M^i \mid \widehat{s^p_l})$ de telle sorte que

(3. 2.)
$$\sum_{s^{p-1}_r < s^p_l} \varphi(c^\beta_l) = 0$$

où s^{p-1}_r est fixe et $\varphi : C_q(\beta, M^i \mid \widehat{s^p_l}) \to C_q(\beta, M^i \mid \widehat{s^{p-1}_r})$.

Posons pour tout $s^{p+1}_m = (A_0, A_{i_0}, \dots, A_{i_p}) \in \overset{i}{\alpha}{}^{p+1}$ ($A_0 \notin s^p_l$) et $s' = (B_0, \dots, B_q) \in {}^+\beta^q$

(3. 3.)
$$\hat{c}^\beta_m(s') = c^\beta_l(\widehat{s'}) \in M^i(\widehat{s'} \cap \widehat{s^p_l}) = M^i(\widehat{s'} \cap \widehat{s^{p+1}_m}),$$

si $\pi^i_{\alpha\beta}(B_0) = A_0$ et zéro, si $\pi^i_{\beta\alpha}(B_0) \neq A_0$. On obtient ainsi une chaîne $\hat{c}^\beta_m$ de $C_q(\overset{i}{\alpha}, M^i \mid \widehat{s^{p+1}_m})$. Les chaînes $\hat{c}^\beta_m$ ($s^{p+1}_m \in \overset{i}{\alpha}{}^{p+1}$) définissent une chaîne $\hat{c}^\beta \in C_{p+1}(\overset{i}{\alpha}, C_q(\beta, \mathring{M}^i))$ pour tout $\beta \gg \overset{i}{\alpha}$. De la définition des spectres et de l'équation (3. 3.) découle alors que les chaînes $\hat{c}^\beta$ ($\beta \gg \overset{i}{\alpha}$) sont les coordonnées d'une chaîne $\hat{c} \in \varprojlim_{\beta \gg \overset{i}{\alpha}} \{C_{p+1}(\overset{i}{\alpha}, C_q(\beta, \mathring{M}^i))\} = C_{p+1}(\overset{i}{\alpha}, C_q(\overset{i}{S}, \mathring{M}^i))$.

Si $\pi^i_{\beta\alpha}(B_0) \notin s^p_l$, alors il existe un seul $p + 1$-simplexe $s^{p+1}_m > s^p_l$ qui le contient. De la définition (3. 3.) découle alors que

(3. 4.) $$\sum_{s_m^{p+1} > s_l^p} \hat{c}^{\beta}_m(B_0, \ldots, B_q) = c^{\beta}_l(B_0, \ldots, B_q) .$$

Si $\pi^{i}_{\beta\alpha}(B_0) \in s_l^p$, on a, tenant compte des équations (3. 2.) et (3. 3.) les équations

(3. 5.) $$\begin{aligned} \sum_{s_m^{p+1} > s_l^p} \hat{c}^{\beta}_m(B_0, \ldots, B_q) &= \sum_{\substack{s^p_{mk} > s^{p-1}_{lk} \\ \pi^{i}_{\beta\alpha}(B_0) \notin s^p_{mk}}} - \hat{c}^{\beta}_m(B_0, \ldots, B_q) = \\ \sum_{\substack{s^p_{mk} > s^{p-1}_{lk} \\ \pi^{i}_{\beta\alpha}(B_0) \notin s^p_{mk}}} - c^{\beta}_{mk}(B_0, \ldots, B_q) &= c^{\beta}_l(B_0, \ldots, B_q) . \end{aligned}$$

(Ici s^{p-1}_{lk} est la face de s^p_l qui ne contient pas $\pi^{i}_{\beta\alpha}(B_0)$) .

On a donc $\partial \hat{c} = z$, d'où l'assertion.[1]

3° Nous avons alors la condition (2. 2.) satisfaite pour tout i d'où les homomorphismes

$$\overset{i}{D}_p : H_p(''\overset{i}{Z}_{-1*}) \rightarrow H_{-1}(''\overset{i}{Z}_{p*})$$

pour tout p et pour tout i .

Le complexe $'\overset{i}{C}_{*-1}$ étant $\overset{i}{C}_*(\alpha, M^i)$ $((\widehat{\emptyset}) = X!)$ on voit que $''\overset{i}{Z}_{p,-1} = \overset{i}{Z}_p(\alpha, M^i)$. Il est, de plus, facile de voir dans le diagramme anti-commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 & \overset{i}{C}_{p+1}(\alpha, M^i) \arrow[l] \arrow[d, dotted] & C_{p+1}(\overset{i}{\alpha}, C_0(\overset{i}{S}, \mathring{M}^i)) \arrow[l, "\partial''"'] \arrow[d, dotted, "\partial'"] \\ 0 & \overset{i}{Z}_p(\alpha, M^i) \arrow[l] & Z_p(\overset{i}{\alpha}, C_0(\overset{i}{S}, \mathring{M}^i)) \arrow[l, "\partial''"'] \end{tikzcd} ,$$

où ∂' est maintenant surjectif, que $H_p(\alpha, \overset{i}{M}{}^i)$ s'identifie canoniquement au groupe quotient de $H_{-1}(''\overset{i}{Z}_{p*})$. On obtient donc, en composant $\overset{i}{D}_p$ à l'epimorphisme canonique $H_{-1}(''\overset{'i}{Z}_p) \rightarrow \overset{i}{H}_p(\alpha, M^i)$, l'homomorphisme $h : H_p(\overset{i}{S}, M^i) = H_p(''\overset{i}{C}_{-1*}) = H_p(''\overset{i}{Z}_{-1*}) \rightarrow \overset{i}{H}_p(\alpha, M^i)$.

4° Montrons maintenant que h est $\underset{i}{\pi}{}^{\alpha}_{(p)}$. Pour le voir il suffit de montrer qu'il est ainsi pour l'homomorphisme correspondant appartenant à la coordonnée β $\underset{i}{h}{}^{\beta} : H_p(\beta, M^i) = H_p(''\overset{i}{C}{}^{\beta}_{-1*}) = H_p(''\overset{i}{Z}{}^{\beta}_{-1*}) \rightarrow \overset{i}{H}_p(\alpha, M^i)$ pour tout $\beta \gg \alpha$.

[1] Si $H = \check{H}$, il suffit de montrer que $H_n('\overset{i}{C}{}^{\beta}_{*q}) = 0$. Sa démonstration est duale à la démonstration au page 37, et elle est un peu plus courte.

Si $z \in Z_p(\beta, M^i)$, $(B_0, \ldots, B_p) \in {}^+\beta^p$ et $s_l^k = (A_0, \ldots, A_k) \in {}^+\overset{i}{\alpha}{}^k (k \leq p)$, posons

$$c_l^k(B_k, \ldots, B_p) = \sum_{\pi_{\beta\alpha}^i(B_0, \ldots, B_k) = s_l^k} \varphi(z(B_0, \ldots, B_p)) \in \tag{3. 6.}$$
$$M^i(\widehat{s_l^k} \cap B_k \cap \ldots \cap B_p).$$

Cette équation définit évidemment les chaînes $c_l^k \in C_{p-k}(\beta, M^i \,|\, \widehat{s_l^k})$ de telle sorte que l'application $s_l^k \to c_l^k$ définit une chaîne c^k de $C_k(\overset{i}{\alpha}, C_{p-k}(\beta, \overset{\circ}{M}{}^i))$. On a, en particulier, $\partial' c^0 = z$ et $\partial''(c^p) = \overset{i}{\pi}{}^{\beta\alpha}_{(p)}(z)$. Il suffit donc de montrer que $\partial' c^{k+1} = \partial'' c^k$ i.e. que

$$\partial c_l^k(B_{k+1}, \ldots, B_p) = \sum_{s_m^{k+1} > s_l^k} (-1)^{k+1} c_m^{k+1}(B_{k+1}, \ldots, B_p) \tag{3. 7.}$$

pour tout $(B_{k+1}, \ldots, B_p) \in {}^+\beta^{p-k-1}$.

Supposons d'abord que $\pi_{\beta\alpha}^i(B_{k+1}) < A_k$. Alors la définition (3. 6.) implique que (3. 7.) se réduit à $0 = 0$, puisque le plus grand élément de $s_m^{k+1} > s_l^k$ est toujours plus grand que $\pi_{\beta\alpha}^i(B_{k+1})$.

Supposons que $\pi_{\beta\alpha}^i(B_{k+1}) = A_k$. Puisque $\partial z = 0$, on obtient les équations

$$\partial c_l^k(B_{k+1}, \ldots, B_p) = \sum_{\substack{\pi_{\beta\alpha}^i(B_0, \ldots, B_{k-1}, B_{k+1}) = s_l^k \\ \pi_{\beta\alpha}^i(B_k) \geq A_k}} \varphi(z(B_0, \ldots, B_p)) =$$
$$- \sum_{\substack{\pi_{\beta\alpha}^i(B_0, \ldots, B_{k-1}, B_{k+1}) = s_l^k \\ \pi_{\beta\alpha}^i(B_k) < A_k}} \varphi(z(B_0, \ldots, B_p)) =$$
$$\sum_{\pi_{\beta\alpha}^i(B_0, \ldots, B_{k+1}) = s_m^{k+1} > (-1)^{k+1} s_l^k} \varphi(z(B_0, \ldots, B_p)) =$$
$$\sum_{s_m^{k+1} > s_l^k} (-1)^{k+1} c_m^{k+1}(B_{k+1}, \ldots, B_p).$$

Si $\pi_{\beta\alpha}^i(B_{k+1}) > A_k$, alors

$$\partial c_l^k(B_{k+1}, \ldots, B_p) = \sum_{\pi_{\beta\alpha}^i(B_0, \ldots, B_k) = s_l^k} \varphi(z(B_0, \ldots, B_p)) =$$
$$\sum_{\pi_{\beta\alpha}^i(B_0, \ldots, B_{k+1}) = s_m^{k+1} > (-1)^{k+1} s_l^k} \varphi(z(B_0, \ldots, B_p)) =$$
$$(-1)^{k+1} \sum_{s_m^{k+1} > s_l^k} c_m^{k+1}(B_{k+1}, \ldots, B_p)$$

d'où l'assertion.

5° Les projections $\overset{i}{\pi}{}'$ étant croissantes et injectives (cf. 3. 1.), les applications $\overset{i}{f}$ et les homomorphismes $\overset{i}{\varphi}_*$ et $\overset{i}{\pi}$ donnent naissance à la suite de 2. 5. et donc au diagramme commutatif

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 & & \overset{n}{C}_{n,-1} \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \overset{n}{C}_{n,0} \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[dd] \\
0 & & \overset{n-1}{C}_{n,-1} \arrow[ll] \arrow[dd] & & \overset{n-1}{C}_{n,0} \arrow[ll] \arrow[dd] & \\
 & 0 & & {}''\overset{n}{Z}_{n-1,-1} \arrow[ll] \arrow[dl, "\overset{n}{g}_*"'] & & {}''\overset{n}{Z}_{n-1,0} \arrow[ll] \arrow[dl] \\
0 & & {}''\overset{n-1}{Z}_{n-1,-1} \arrow[ll] & & {}''\overset{n-1}{Z}_{n-1,0} \arrow[ll, "\overset{n-1}{\partial''}"] &
\end{tikzcd}
$$

En vertu de l'hypothèse pour $k = n$ et de la définition des groupes $\overset{i}{C}_{n,j}$ on voit ici, que

$$\overset{n}{g}_*(\overset{n}{B}_{n-1}(\alpha\, , M^n)) \subset \overset{n-1}{\partial''}({}''\overset{n-1}{Z}_{n-1,0})\, .$$

Puisque $\overset{i}{H}_p(S\, , M^i) = H_p({}''\overset{i}{Z}_{-1*}) = H_p({}''\overset{i}{B}_{-1*})$ pour tout i et $p > -1$, on obtient le résultat

$$
\text{(3. 8.)} \qquad
\begin{aligned}
&\mathrm{Ker}(H_{n-1}(S\, , \overset{n}{M^n}) \to H_{n-1}(\alpha\, , \overset{n}{M^n})) \subset \\
&\mathrm{Ker}(H_{n-1}(S\, , \overset{n}{M^n}) \to H_{-1}({}''\overset{n-1}{Z}_{n-1*}))
\end{aligned}
$$

6° Puisque le foncteur H commute aux sommes directes, on a

$$H_p({}''\overset{i}{C}_{k*}) = \bigoplus_{s_l^k \in \overset{i}{+}{}_\alpha^k} H_p(S\, , M^i \,\widehat{|\, s_l^k})$$

pour tout i, k et p. Il résulte donc de l'hypothèse que l'hypothèse du théorème 1 est valable pour tout $i = 0, \ldots, n$. Du théorème 1 découle alors que $\mathrm{Im}(H_{-1}(''\overset{n}{Z}_{n*}) \to H_{-1}(''\overset{-1}{Z}_{n*})) \subset \mathrm{Im}(H_n(\overset{-1}{S}, M^{-1}) \to H_{-1}(''\overset{-1}{Z}_{n*}))$, d'où on obtient par passage aux quotients la première assertion

$$\mathrm{Im}(H_n(\overset{n}{\alpha}, M^n) \to H_n(\overset{-1}{\alpha}, M^{-1})) \subset \mathrm{Im}(H_n(\overset{-1}{S}, M^{-1}) \to H_n(\overset{-1}{\alpha}, M^{-1})).$$

L'équation (3. 8.) et le corollaire 1 impliquent la deuxième assertion:

$$\begin{gathered}\mathrm{Ker}(H_{n-1}(\overset{n}{S}, M^n) \to H_{n-1}(\overset{-1}{S}, M^{-1})) \supset \\ \mathrm{Ker}(H_{n-1}(\overset{n}{S}, M^n) \to H_{-1}(''\overset{n-1}{Z}_{n-1*})) \supset \\ \mathrm{Ker}(H_{n-1}(\overset{n}{S}, M^n) \to H_{n-1}(\overset{n}{\alpha}, M^n))\end{gathered}$$

ce qui achève la démonstration.

3. 3. Si l'on suppose les applications dans 3. 1. identiques, on obtient le

Corollaire 2. Si α est un recouvrement fini de l'ensemble X appartenant à un spectre S de X tel que

$$H_{n-k-1}(S, M \mid \widehat{s^k}) = 0$$

pour tout $s^k \in {}^+\alpha^k$, $k = 0, \ldots, n$, il en découle que l'homomorphisme canonique $\pi^\alpha_{(p)} : H_p(S, M) \to H_p(\alpha, M)$ est injectif pour $p = n - 1$ et surjectif pour $p = n$.

3. 4. *Remarques.* 1° Si $H = \check{H}$ (cf. lemme 10), alors le lemme 6 implique que l'hypothèse se vérifie automatiquement pour $k = n$, si les coefficients sont constants et pour $k = n, n-1$, si les domaines de coefficients sont des cofaisceaux.

2° Si l'on suppose $M^i = G$, $\overset{i}{\varphi}_*$ identique et $\overset{i}{f}$ l'inclusion pour tout i, $\overset{n}{X} = \overset{n-1}{X}$, $\overset{n}{\alpha} = \overset{n-1}{\alpha}$, $\overset{n}{\pi}'$ identique et les spectres $F(A_i)'_{\alpha_i}$ comme dans l'exemple D. p. 15, on obtient une généralisation du théorème basique de M. Floyd (cf. [7] p. 320). La deuxième partie du théorème de M. Floyd contient une erreur dans les indices. Par exemple pour $n = 0$ $\pi_{\alpha_0} : H_1(A_0) \to H_1(\alpha_0)$ soit toujours surjectif puisque $\pi^1_{\alpha_0\alpha_0} : H_1(\alpha_0) \to H_1(\alpha_0)$ est identique, ce qui est évidemment impossible. Il faut, bien entendu, remplacer 0 par -1.

3° Le corollaire 2 et à fortiori le théorème 2 ne restent pas, en général, valables, si l'on remplace H par $\check{H}$, comme l'on voit dans les exemples suivants:

A. Soient X et S comme à la fin du § 1. Soit Y l'intervalle fermé $|0, 1|$ et Z l'intervalle fermé $|-1, 0|$ (cf. Fig. 3)

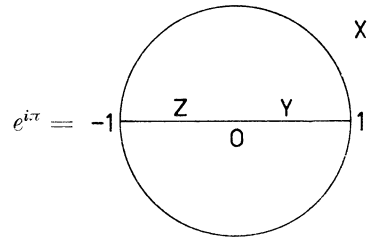

Fig.3.

On peut identifier $1 \in Y$ au point $\{e^{i0}\}$ de X et $-1 \in Z$ au point $\{e^{i\pi}\}$ de X (cf. Fig. 3.).

Soit $S' = \{\beta_{-1} \ll \beta_0 \ll \beta_1 \ll \ldots.\}$ le spectre de $Y \cup Z$ où β_{n-1} $(n > -1)$ est composé des intervalles fermés $|p/2^n, (p+1)/2^n|$, $p = -2^n, -2^n+1, \ldots, 2^n-1, 2^n$ (cf. Fig. 4.).

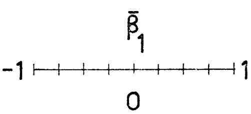

Fig.4.

Il existe alors une et seule projection $\overset{i}{\pi'} : \beta_i \to \beta_{i-1}$. Les spectres S (p. 20) et S' définissent un spectre $\bar{S} = \{\gamma_{-1} \ll \gamma_0 \ll \ldots.\}$ de $T = X \cup Y \cup Z$, $\gamma_i = \alpha_i \cup \beta_i$ pour tout i. On voit facilement que $F(T) > \bar{S} > U(T)$ de sorte que les groupes $\check{H}_j(\bar{S}, Z|X)$, $\check{H}_j(\bar{S}, Z|Y)$ et $\check{H}_j(\bar{S}, Z|Z)$ sont isomorphes aux groupes $H_j(X, Z)$, $H_j(Y, Z)$ et $H_j(Z, Z)$. Puisque Z satisfait à la condition (I_1) p. 9 et X, Y et Z sont connexes, ces groupes sont nuls pour $j = 0, -1$ de sorte que les hypothèses du corollaire 2 sont satisfaites pour $n = 0$, $\alpha = \gamma_{-1}$ et H remplacé par $\check{H}$.

Montrons maintenant que $\check{H}_1(\bar{S}, Z) = Z$. On a pour tout $j > -1$ $H_1(\gamma_j, Z) = Z_1(\gamma_j, Z) \cong Z \times Z$. L'homomorphisme

$$\pi^j_{(1)} = \pi^j_1 : Z_1(\gamma_j, Z) \to Z_1(\gamma_{j-1}, Z)$$

est donné par $\pi^j_1((n_1, n_2)) = ((2n_1 + n_2), (n_1 + 2n_2))$ où $(n_1, n_2) \in Z \times Z$ (cf. 1. 8. et Fig. 5 ci-dessous)

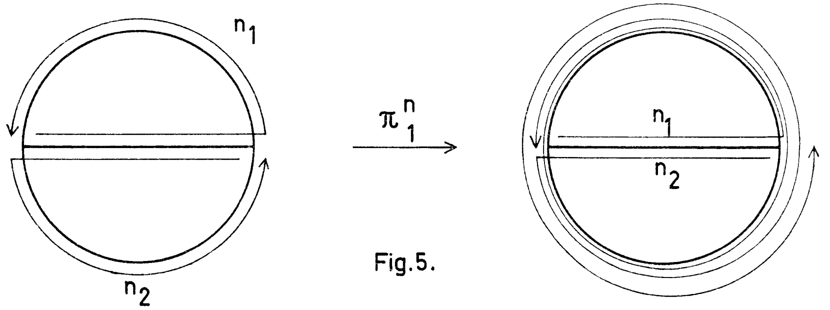

Fig.5.

Par itération du raisonnement on voit comme dans 1. 8. que $\pi_1^{j,j-i} : Z_1(\gamma_j , Z) \to Z_1(\gamma_{j-i} , Z)$ $(0 < i < j)$ est donné par

$$\pi_1^{j,j-i}((n_1 , n_2)) = ((m_i n_1 + (m_i - 1)n_2), ((m_i - 1)n_1 + m_i n_2)) =$$
$$((m_i(n_1 + n_2) - n_2) , (m_i(n_1 + n_2) - n_1)) .$$

Puisque $\lim\limits_{\substack{j \to \infty \\ i \to \infty}} m_i = \infty$, il en découle que

$$(n_1 , n_2) \in \mathrm{Im}(\pi_1^{\gamma_n} : \check{H}_1(\bar{S} , Z) \to H_1(\gamma_n , Z))$$

si et seulement si $n_2 = - n_1$ (cf. Fig. 6.).

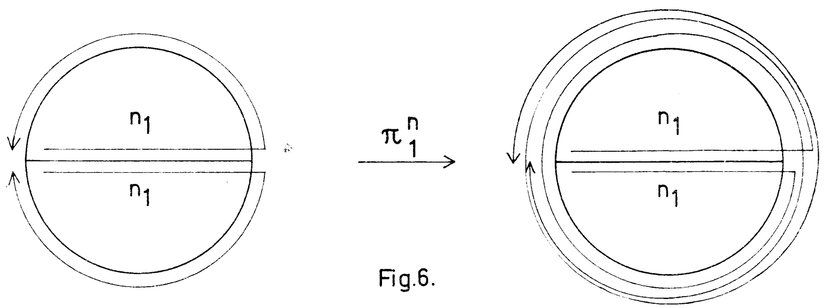

Fig.6.

On a alors $\pi_1^n((n_1 , n_2)) = (n_1 , n_2)$ pour tout n . On a donc l'assertion $H_1(\bar{S} , Z) = Z_1(\bar{S} , Z) \cong \{(n_1 , - n_1)\} \cong Z$.

L'homomorphisme canonique

$$\pi_{(1)}^{\gamma_{-1}} : \check{H}_1(\bar{S} , Z) \cong Z \to Z \cong H_1(\gamma_{-1} , Z)$$

est donné par l'application $n_1 \to 2n_1$ qui n'est pas surjective contrairement à l'assertion du corollaire 2 pour $n = 1$.

B. Soit $X' = \{|z| \leq 1\}$ le disque unité du plan complexe. Si l'on identifie tout $\{e^{i\varphi}\} \in X'$ au point opposé $e^{i(\varphi+\pi)}$, on obtient le plan projectif $\bar{X}$ (cf. Fig. 7.).

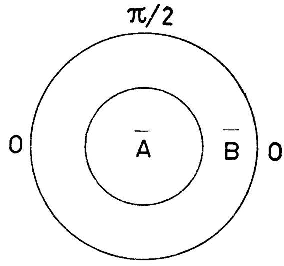

Fig.7.

Le cercle $|z| = 1/2$ divide $\bar{X}$ à deux parties $\bar{A}$ et $\bar{B}$. Les spectres S et S' pp. 20, 33 définissent un spectre

$$\hat{S} = \{\bar{\varepsilon}_{-1} \ll \bar{\varepsilon}_0 \ll \bar{\varepsilon}_1 \ll \ldots\ldots\}$$

de $\bar{X}$ tel que $F(\bar{X}) > \hat{S} > U(\bar{X})$ de façon suivante:

$$\bar{\varepsilon}_n = \{\bar{E}_{ij}\,;\, \bar{E}_{ij} = \{r \in B_i \in \beta_n\,,\; B_i \in Y\,;\; \varphi \in \bar{A}_j \in \bar{a}_n\}\} \quad \text{(cf. Fig. 8.).}$$

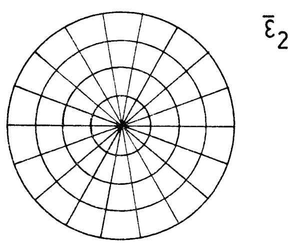

Fig.8.

On a, en particulier, $\bar{\varepsilon}_{-1} = \{\bar{A}\,,\bar{B}\}$. Il n'existe qu'une seule projection $\bar{\pi}^n$ de $\bar{\varepsilon}_n$ dans $\bar{\varepsilon}_{n-1}$. Les éléments de $\bar{\varepsilon}_n$ qui sont contenus dans $\bar{A}$ $(\bar{B})$ constituent un recouvrement $\bar{\varepsilon}_n^1$ $(\bar{\varepsilon}_n^2)$ de A (B). On a

$$H_1(\bar{\varepsilon}_n\,, Z) = \check{H}_1(\hat{S}\,, Z) = H_1(\bar{X}\,, Z) = Z/2Z = Z_2\,,$$

$$H_1(\bar{\varepsilon}_n^1\,, Z) = \check{H}_1(\hat{S}\,, Z|\bar{A}) = H_1(\bar{A}\,, Z) = 0 \quad \text{pour tout} \quad n\,,$$

$$H_1(\bar{\varepsilon}_n^2\,, Z) = \check{H}_1(\hat{S}\,, Z|\bar{B}) = H_1(\bar{B}\,, Z) = Z \quad \text{pour} \quad n > 0\,,$$

$$\check{H}_0(\hat{S}\,, Z|(\bar{A} \cap \bar{B})) = H_0(\bar{A} \cap \bar{B}\,, Z) = 0 \quad \text{et} \quad H_1(\varepsilon_{-1}\,, Z) = 0\,.$$

Définissons l'application continue $f^n : \bar{X} \to \bar{X}$ dans les coordonnées polaires r et φ comme suit:

$$f^n(r) = r \quad \text{et} \quad f^n(\varphi) = 3\varphi\,.$$

Il en découle que f^n applique les éléments de $\bar{\varepsilon}_n$ aux éléments de $\bar{\varepsilon}_{n-1}$ définissant donc, par un choix convenable de l'ordre, une f^n-projection naturelle $\bar{\pi}^n : \bar{\varepsilon}_n \to \bar{\varepsilon}_{n-1}$ et un f^n-homomorphisme $\hat{S} \to \hat{S}$. Il est alors un exercise de calcul trivial de montrer que l'homomorphisme $f^n_{(1)} : \check{H}_1(\hat{S}, Z) \simeq Z_2 \to \check{H}_1(\hat{S}, Z) \simeq Z_2$ est donné par $f^n_{(1)}(1) = 3 = 1$. Cet homomorphisme est donc l'application identique. Également on voit que l'homomorphisme

$$f^n_{(1)} : \check{H}_1(\hat{S}, Z|\bar{B}) \to \check{H}_1(\hat{S}, Z|\bar{B})$$

i.e.

$$f^n_{(1)} : Z \to Z$$

est donné par l'équation $f^n_{(1)}(m) = 3m$. Il en découle que

$$\varprojlim_n \{\check{H}_1(\hat{S}, Z); f^n_{(1)}\} = Z_2 \quad \text{et}$$

$$\varprojlim_n \{\check{H}_1(\hat{S}, Z|\bar{A}); f^n_{(1)}\} = \varprojlim_n \{\check{H}_1(\hat{S}, Z|\bar{B}); f^n_{(1)}\} =$$

$$\varprojlim_n \{\check{H}_0(\hat{S}, Z|(\bar{A} \cap \bar{B}); f^n_{(0)}\} = 0 .$$

Convenons de désigner par X, A et B les limites projectives des systèmes projectifs $\{\bar{X}; f^n\}$, $\{\bar{A}; f^n\}$ et $\{\bar{B}; f^n\}$. On a alors $X = A \cup B$ et $A \cap B = \varprojlim_n \{\bar{A} \cup \bar{B}; f^n\}$.

On a les applications canoniques $\overset{n}{f} : X \to \bar{X}$, $\overset{n}{f}|A : A \to \bar{A}$, $\overset{n}{f}|B : B \to \bar{B}$ et $\overset{n}{f}|(A \cap B) : A \cap B \to \bar{A} \cap \bar{B}$. Convenons de désigner par ε_n le recouvrement $\{E_i ; E_i = (\overset{n}{f})^{-1}(\bar{E}_i) ; \bar{E}_i \in \bar{\varepsilon}_n\}$ et par π^n la projection de ε_n dans ε_{n-1} défini par $\bar{\pi}^n$. On obtient alors un spectre S de X tel que $F(X) > S > U(X)$ de sorte que

$$\check{H}_1(S, Z) \simeq H_1(X, Z), \ \check{H}_1(S, Z|A) = H_1(A, Z), \ \check{H}_1(S, Z|B) = H_1(B, Z)$$

et $\check{H}_0(S, Z|(A \cap B)) = H_0(A \cap B, Z)$ (cf. lemme 8).

Il est bien connu, que l'homologie de Čech est continue dans les espaces compacts (cf. [6] p. 261) i.e. que les groupes

$$H_1(X, Z), H_1(A, Z), H_1(B, Z) \text{ et } H_0(A \cap B, Z)$$

sont isomorphes aux limites projectives des systèmes projectifs

$$\{H_1(\bar{X}, Z); f^n_{(1)}\}, \{H_1(\bar{A}, Z); f^n_{(1)}\}, \{H_1(\bar{B}, Z); f^n_{(1)}\} \text{ et } \{H_0(\bar{A} \cap \bar{B}; Z); f^n_{(0)}\}$$

c'est à dire aux groupes Z_2, 0, 0 et 0.

Les hypothèses du corollaire 2 sont donc satisfaites pour $\alpha = \varepsilon_{-1}$, $n = 2$ et H remplacé par $\check{H}$. Puisque $H_1(\varepsilon_{-1}, Z) = 0$ et $\check{H}_1(S, Z) = Z_2$, l'homomorphisme canonique

$$\check{H}_1(S, Z) = H_1(X, Z) \to H_1(\varepsilon_{-1}, Z)$$

n'est pas injectif, contrairement à l'assertion du corollaire 2 pour $n = 2$.

4° Dans l'exemple B ci-dessus nous avons un nouveau cas où $H \neq \check{H}$. En effet, $\check{H}_1(S, Z) = Z_2$ et $H_1(S, Z) = 0$.

3. 5. Le théorème dual du théorème 2 est le

Théorème 2 c. Supposons sous les hypothèses 3. 1. que

$$\mathrm{Im}(H^{n-k-1}(\overset{k-1}{S}, N^{k-1}|\overset{k}{\widehat{\pi'(s_l^k)}}) \to H^{n-k-1}(\overset{k}{S}, N^k|\widehat{s_l^k})) = 0$$

pour tout k-simplexe $s_l^k \in {}^{+}\alpha^k$ $(k = 0, \ldots, n)$. Il s'ensuit dans (3. 1. c) que

$$\mathrm{Ker}(\underset{\alpha}{\pi^{(n)}_{-1}}) \subset \mathrm{Ker}(\underset{\alpha\ \alpha}{\pi^{(n)}_{n-1}}) \text{ et } \mathrm{Im}(\underset{\alpha}{\pi^{(n-1)}_{n}}) \supset \mathrm{Im}(\overset{n,\,-1}{\pi^{(n-1)}}).$$

Démonstration. 1° Formons les complexes doubles de cochaînes $\overset{i}{C^*}$ où **a** $\overset{i}{C^{pq}} = C^p(\alpha, \overset{i}{C^q}(\overset{i}{S}, \mathring{N}^i))$, **b** δ' est l'opérateur cobord de $\overset{i}{C^*}(\alpha, \overset{i}{C^q}(S, \mathring{N}^i))$ et **c** δ'' est l'homomorphisme fonctoriel

$$(-1)^{p+1}\overset{i}{C^p}(\alpha, \mathring{\delta}) : C^p(\alpha, \overset{i}{C^{q-1}}(\overset{i}{S}, \mathring{N}^i)) \to C^p(\alpha, \overset{i}{C^q}(\overset{i}{S}, \mathring{N}^i)) \quad \text{(cf [8] p. 210).}$$

2° Montrons d'abord que $H^n(\overset{i}{C^{*q}}) = 0$ pour tout n et pour tout $q > -1$. Puisque α est fini, on peut identifier $\overset{i}{C^*}$ à $\varinjlim_{\beta \gg \overset{i}{\alpha}} \overset{i}{C^*_\beta}$ où $\overset{i}{C^{pq}_\beta} = C^p(\overset{i}{\alpha}, \overset{i}{C^q}(\alpha, C^q(\beta, \mathring{N}^i))$ (cf. [1] § 6). D'autre part le foncteur H commute aux limites inductives (cf. [8] p. 21) de sorte qu'il suffit de montrer que $H^n(\overset{i}{C^{*q}_\beta}) = 0$ pour tout i et pour tout $q > -1$. On a, par définition,

$$\begin{aligned} C^p(\overset{i}{\alpha}, C^q(\beta, \mathring{N}^i)) = {} & \prod_{s_l^p \in \overset{+ip}{\alpha}} C^q(\beta, N^i|s_l^p) = \\ & \prod_{s_l^p \in \overset{+ip}{\alpha}} \Big(\prod_{s' \in {}^{+}\beta^q} N^i(\widehat{s_l^p} \cap \widehat{s'}) \Big) = \\ & \prod_{\in {}^{+}\beta^q} \Big(\prod_{s_l^p \in \overset{+ip}{\alpha}} N^i(\widehat{s'} \cap \widehat{s_l^p}) \Big) = \\ & \prod_{s' \in {}^{+}\beta^q} (C^p(\overset{i}{\alpha}, N^i|\widehat{s'})). \end{aligned}$$

Il est alors facile de voir que

$$\delta'(C^p(\overset{i}{\alpha}, N^i|\widehat{s'})) \subset C^{p+1}(\overset{i}{\alpha}, N^i|\widehat{s'})\,.$$

Il suffit donc de montrer que $H^n(C^*(\overset{i}{\alpha}, N^i|\widehat{s'})) = 0$. Puisque $\beta \gg \alpha$, on a $\widehat{s'} \subset A \in \overset{i}{\alpha}$ de sorte que

$$C^*(\overset{i}{\alpha}, N^i|\widehat{s'})) = C^*(\overset{i}{\alpha} \cap A, N^i|\widehat{s'}) = C^*(\overset{i}{\alpha} \cap (A \cap \widehat{s'}), N^i)$$

où

$$\overset{i}{\alpha} \cap (A \cap \widehat{s'}) = (A_i \cap (A \cap \widehat{s'})\,;\, A_i \in \overset{i}{\alpha})\,.$$

En vertu du lemme 5 on peut donc supposer que $\overset{i}{\alpha}$ est composé du seul élément $A \cap \widehat{s'}$. La suite

$$0 \rightarrow C^{-1}(\overset{i}{\alpha}, N^i) \xrightarrow{\ \delta\ } C^0(\overset{i}{\alpha}, N^i) \xrightarrow{\ \delta\ } C^1(\overset{i}{\alpha}, N^i) \xrightarrow{\ \delta\ } \cdots\cdots$$

est alors isomorphe à la suite

$$0 \longrightarrow N^i(A \cap \widehat{s'}) \xrightarrow{\ I\ } N^i(A \cap \widehat{s'}) \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \ldots.$$

où I est l'application identique. La suite est exacte d'où l'assertion.

3° Nous avons alors la condition (2. 2 c) satisfaite pour tout i et p et pour tout $q > -1$. On obtient donc les homomorphismes $\overset{i}{D^n}$ de 2.3. pour tout i et n. Le complexe $'\overset{i}{C}{}^{*-1}$ étant $C^*(\overset{i}{\alpha}, N^i)$, on voit que $''\overset{i}{Z}{}^{p,-1} = Z^p(\overset{i}{\alpha}, N^i)$. Il est, de plus, facile de voir dans le diagramme anticommutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C^{p+1}(\overset{i}{\alpha}, N^i) \arrow[r, "\delta''"] & C^{p+1}(\overset{i}{\alpha}, C^0(\overset{i}{S}, \mathring{N}^i)) \\
0 \arrow[r] & \dfrac{C^p(\overset{i}{\alpha}, N^i)}{B^p(\overset{i}{\alpha}, N^i)} \arrow[u, "\delta"] \arrow[r, "\delta''"] & \dfrac{C^p(\overset{i}{\alpha}, C^0(\overset{i}{S}, \mathring{N}^i))}{B^p(\overset{i}{\alpha}, C^0(\overset{i}{S}, \mathring{N}^i))} \arrow[u, "\delta'"']
\end{tikzcd}$$

où δ' est injectif, que $H^p(\overset{i}{\alpha}, N^i)$ s'identifie à un sous-groupe de $H^{-1}(''\overset{i}{Z}{}^{p*})$. Puisque $''\overset{i}{Z}{}^{-1*} = ''\overset{i}{C}{}^{-1*}$, on a

$$H^p(''\overset{i}{Z}{}^{-1*}) = H^p(\overset{i}{S}, N^i)\,.$$

On obtient donc l'homomorphisme

$$k : H^p(\overset{i}{\alpha}, N^i) \longrightarrow H^{-1}(''\overset{i}{Z}{}^{p*}) \xrightarrow{D^p} H^p(''Z^{-1*}) = H^p(S, N^i).$$

4° Montrons que k est l'homomorphisme $\underset{\alpha}{\pi}{}_i^{(p)}$. Il suffit de montrer que l'homomorphisme correspondant

$$k_\beta : H^p(\overset{i}{\alpha}, N^i) \longrightarrow H^{-1}(''\overset{i}{Z}{}_\beta^{p*}) \xrightarrow{\overset{i}{D}{}_\beta^p} H^p(''\overset{i}{Z}{}_\beta^{-1*}) = H^p(\beta, N^i),$$

où $\overset{i}{C}{}_\beta^*$ est le complexe double: $\overset{i}{C}{}_\beta^{pq} = C^p(\overset{i}{\alpha}, C^q(\beta, N^i))$, est l'homomorphisme $\underset{\beta\alpha}{\pi}{}_i^{(p)}$. Soit $s_l^p = (A_0, \ldots, A_p)$ un p-simplexe de $^+\alpha^p$, $\overset{i}{s}{}_i^k$ le k-simplexe $(A_0, \ldots, A_k)$ et $s' = (B_{k+1}, \ldots, B_p)$ un tel $p-k-1$-simplexe de $^+\beta$ que $\underset{i\ \beta\alpha}{\pi}{}_i(B_{k+1}, \ldots, B_p) = (A_{k+1}, \ldots, A_p)$. Étant donné un cocycle z de $Z^p(\overset{i}{\alpha}, N^i)$, on pose $c_i^k(B_{k+1}, \ldots, B_p) = \varphi(z(A_0, \ldots, A_p)) \in N^i(B_{k+1} \cap \ldots\ldots \cap B_p \cap A_0 \cap \ldots\ldots \cap A_k) =$
$N^i(B_{+1+k} \cap \ldots\ldots \cap B_p \cap A_0 \cap \ldots\ldots \cap A_p)$ pour tout s_l^p, s' et k. On obtient évidemment ainsi une cochaîne c_i^k de $C^{p-k-1}(\beta, N^i|\widehat{s_i^k})$, et les cochaînes c_i^k définissent une cochaîne c^k de $C^k(\overset{i}{\alpha}, C^{p-k-1}(\beta, \overset{\circ}{N}{}^i))$. Puisque $\delta z = 0$, on a

$$\delta c_i^k(B_{k+1}, \ldots, B_{p+1}) =$$
$$\sum_{j=k+1}^{p+1} (-1)^{j-k-1} \varphi(z(A_0, \ldots, A_k, \underset{\beta\alpha}{\pi}{}_i(B_{k+1}), \ldots\ldots, \underset{\beta\alpha}{\pi}{}_i(\widehat{B}_j), \ldots\ldots, \underset{\beta\alpha}{\pi}{}_i(B_{p+1}))$$
$$= (-1)^{k+1} \sum_{s_h^{k-1} < s_i^k} c_h^{k-1}(B_{k+1}, \ldots, B_{p+1})$$

pour tout $(B_{k+1}, \ldots, B_{p+1}) \in {}^+\beta^{p-k}$ de sorte que

$$\delta' c^k = \delta'' c^{k+1}.$$

Puisque $c_\emptyset^{-1} = \underset{\beta\alpha}{\pi}{}_i^{(p)}(z)$ et $c_l^p(\emptyset) = z(s_l^p)$, on obtient l'assertion.

5° Comme les projections $\overset{i}{\pi}{}'$ sont injectives et croissantes, les applications $\overset{i}{f}$ et les $\overset{i}{f}$-homomorphismes $\overset{i}{\varphi}{}^*$ et $\overset{i}{\pi}$ donnent naissance à la suite de 2. 6. et donc au diagramme

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& 0 \arrow[rr] & & \overset{n,\,n,\,-1}{C} \arrow[rr] & & \overset{n,\,n,\,0}{C} \\
0 \arrow[rr] & & \overset{n-1,\,n,\,-1}{C} \arrow[ur] \arrow[rr] & & \overset{n-1,\,n,\,0}{C} \arrow[ur] & \\
& 0 \arrow[rr] & & ''\overset{n,\,n-1,\,-1}{Z} \arrow[uu] \arrow[rr] & & ''\overset{n,\,n-1,\,0}{Z} \arrow[uu] \\
0 \arrow[rr] & & ''\overset{n-1,\,n-1,\,-1}{Z} \arrow[uu] \arrow[ur, "\overset{n}{h}{}^*"] \arrow[rr, "\overset{n-1}{\delta}{}''"'] & & ''\overset{n-1,\,n-1,\,0}{Z} \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

D'après l'hypothèse pour $k = n$, on voit ici, δ' étant injectif, que

$$\overset{n}{h}{}^*(H^{-1}(''\overset{n-1}{Z}{}^{n-1*})) = \overset{n}{h}{}^*(\mathrm{Ker}(\overset{n-1}{\delta}{}'')) \subset H^{n-1}(\overset{n}{\alpha}, N^n)\,.$$

Mais cela entraîne, tenant compte des équations

$$\overset{i}{H}{}^p(S\,, N^i) = H^p(''\overset{i}{Z}{}^{-1*}) \qquad (p > -1)$$

que

$$\text{(3.8c)}\qquad \begin{aligned} &\mathrm{Im}(H^{-1}(''\overset{n-1}{Z}{}^{n-1*}) \to H^{n-1}(\overset{n}{S}\,, N^n)) \subset \\ &\mathrm{Im}(H^{n-1}(\overset{n}{\alpha}\,, N^n) \quad \to H^{n-1}(\overset{n}{S}\,, N^n))\,. \end{aligned}$$

6° Puisque le foncteur H commute aux produits directs, on a

$$H^p(''\overset{i}{C}{}^{k*}) = \prod_{s_j^k \in \overset{i}{+}{}_\alpha^k} H^p(\overset{i}{S}\,, N^i|\widehat{s_j^k}))$$

pour tout $i\,, j\,, k$. L'hypothèse implique alors que $\mathrm{Im}(\overset{i}{h}{}_C^{n-i-1}) = 0$ pour tout $i = 0\,, \ldots\,, n$. Du théorème 1 c découle alors que

$\mathrm{Ker}(h_n^{-1}) \subset \mathrm{Ker}(\overset{-1}{\delta}{}^n)$. $H^n(\overset{i}{\alpha}, N^i)$ étant un sous-groupe de $H^{-1}(''\overset{i}{Z}{}^{n*})$ pour tout n et i, on obtient la première assertion:

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ker}(H^n(\overset{-1}{\alpha}, N^{-1}) \to H^n(''\overset{-1}{Z}{}^{-1*}) = H^n(\overset{-1}{S}, N^{-1})) \subset \\ &\mathrm{Ker}(H^n(\overset{-1}{\alpha}, N^{-1}) \to H^n(\overset{n}{\alpha}, N^n)) .\end{aligned}$$

La deuxième assertion découle de l'inclusion

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}(H^{-1}(''\overset{n-1}{Z}{}^{n-1*}) \to H^{n-1}(''\overset{n}{Z}{}^{-1*})) \supset \\ &\mathrm{Im}(H^{n-1}(''\overset{-1}{Z}{}^{-1*}) \to H^{n-1}(''\overset{n}{Z}{}^{-1*})) ,\end{aligned}$$

du corollaire 1 c et de l'équation (3. 8. c.):

$$\begin{aligned}&\mathrm{Im}(H^{n-1}(\overset{n}{\alpha}, N^n) \to H^{n-1}(\overset{n}{S}, N^n)) \supset \\ &\mathrm{Im}(H^{-1}(''\overset{n-1}{Z}{}^{n-1*}) \to H^{n-1}(''\overset{n}{Z}{}^{-1*})) \supset \\ &\mathrm{Im}(H^{n-1}(''\overset{-1}{Z}{}^{-1*}) \to H^{n-1}(''\overset{n}{Z}{}^{-1*})) = \\ &\mathrm{Im}(H^{n-1}(\overset{-1}{S}{}^{-1}, N^{-1}) \to H^{n-1}(\overset{n}{S}, N^n))\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

3. 6. Si l'on suppose les applications de 3. 1. identiques, on obtient le
Corollaire 2 c. Si α est un élément fini d'un spectre S de l'ensemble X tel que

$$H^{n-k-1}(S, N|\widehat{s_l^k}) = 0$$

pour tout $s_l^k \in {}^+\alpha^k$, $k = 0, \ldots, n$, il s'ensuit que l'homomorphisme canonique $\pi_\alpha^{(p)}$ est surjectif pour $p = n - 1$ et injectif pour $p = n$.

3. 7. *Remarques.* 1° Le corollaire 2 c contient la généralisation de M. Wu d'un théorème de M. Leray dans la cohomologie de Čech (cf. [16] p. 796).

Le théorème de M. Wu contient une erreur d'induction. Les hypothèses de M. Wu sont satisfaites dans le Fig. 9.

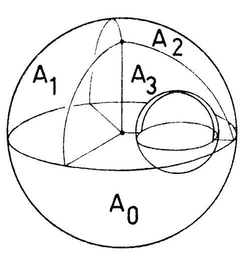

Fig.9.

$$(\text{Ici } H^0(A_0 \cap A_2 \cap A_3 , Z) \neq 0)$$

Cependant, contrairement à l'assertion l'homomorphisme canonique $\pi_\alpha^{(2)}$ n'est pas surjectif.

2° Les hypothèses du théorème 2 c et du corollaire 2 c se vérifient automatiquement pour $k = n$, si les coefficients sont constants et pour $k = n$, $n - 1$, si les domaines de coefficients sont des faisceaux (cf. lemme 6).

§ 4. Théorèmes de Helly

4. 1. Examinons la cohomologie classique de Čech dans un espace topologique X à coefficients dans un groupe $G \neq 0$.

Théorème 3. Soit α un agrégat fermé de X tel que

a) Les éléments A_i de α sont compacts,

b) $A_{i_0} \cap \ldots\ldots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$ pour tout $A_{i_j} \in \alpha , j = 0 , \ldots , n$,

c) $H^i(\widehat{s_j^p}) = 0$ pour tout $s_j^p \in {}^+\alpha^p , p = 0 , \ldots , n - 1, i = 0 , \ldots , n - p - 1$,

d) $H^n(|\alpha''|) = 0$ pour tout sous-agrégat α'' de α qui a moins que $n + 3$ éléments.

Si la dimension cohomologique de X est inférieure à $n + 1$, alors l'intersection $I = \bigcap\limits_{A_i \in \alpha} A_i$ n'est pas vide.

Démonstration. 1° Tenant compte de la condition a) on peut supposer $\alpha = \{A_1 , \ldots , A_m\}$ où $m > n + 1$. Supposons d'abord $m = n + 2$.

2° Pour que $A_1 \cap \ldots\ldots \cap A_m \neq \emptyset$ il faut et il suffit par l'hypothèse b) que $H^n(\alpha) = 0$. En vertu de b) $H^j(\alpha'') = 0$ pour tout $j = 0 , \ldots , n - 1$ et pour tout sous-agrégat α'' de α . On obtient donc en vertu des hypothèses et du corollaire 2 c l'équation

$$H^j(|\alpha''|) = 0 \text{ pour tout } j . \tag{4. 1.}$$

3° Pour démontrer que $H^n(\alpha) = 0$ il suffit donc, d'après le corollaire 2 c, de montrer que

$$H^j(A_{i_0} \cap \ldots\ldots \cap A_{i_p}) = 0 \tag{4. 2.}$$

pour tout $A_{i_j} \in \alpha$, pour tout j et pour tout $p = 0 , \ldots , m - 1$.

4° Si A et B sont deux sous-ensembles compacts de X , on a la suite exacte

$$\begin{aligned} &\xleftarrow{\Delta} H^q(A \cap B) \xleftarrow{\Psi} H^q(A) \dotplus H^q(B) \xleftarrow{\Phi} H^q(A \cup B) \xleftarrow{\Delta} \\ &\qquad H^{q-1}(A \cap B) \xleftarrow{\Psi} \end{aligned} \tag{4. 3.}$$

(cf. [6] pp. 43, 257.).

5° Soit $s = (A_0, \dots, A_p)$ un simplexe quelconque de ${}^+\alpha$. Posons $A = A_0$, $B = A_2 \cup \dots \cup A^p$. En vertu de l'équation (4. 1) et de la suite (4. 3) on a

$$H^i((A_0 \cap A_2) \cup (A_0 \cap A_3) \cup \dots \cup (A_0 \cap A_p)) = H^i(A_0 \cap (A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_p)) = 0 \tag{4. 4.}$$

pour tout i et pour tout p. Également on a

$$H^i(A_0 \cap A_1) = 0 \tag{4. 5}$$

pour tout i. En posant dans (4. 3) $A = A_0 \cap A_1$ et $B = (A_0 \cap A_2) \cup (A_0 \cap A_3) \cup \dots \cup (A_0 \cap A_p)$ on obtient en vertu des équations (4. 4) et (4. 5)

$$H^i((A_0 \cap A_1 \cap A_2) \cup (A_0 \cap A_1 \cap A_3) \cup \dots \cup (A_0 \cap A_1 \cap A_p)) =$$
$$H^i((A_0 \cap A_1) \cap ((A_0 \cap A_2) \cup (A_0 \cap A_3) \cup \dots \cup (A_0 \cap A_p)))) = 0$$

pour tout i. Également, on a

$$\begin{aligned} &H^i(A_0 \cap A_1 \cap A_2) = 0 \text{ et} \\ &H^i(A_0 \cap A_1 \cap A_3) \cup (A_0 \cap A_1 \cap A_4) \cup \dots \cup (A_0 \cap A_1 \cap A_p)) = 0 \end{aligned} \tag{4. 6}$$

pour tout i. On peut continuer comme ci-dessus partant des équations (4. 6) et de la suite (4. 3). Après un nombre fini des pas on achève l'assertion.

6° Le cas général $m > n + 2$ se fait par induction par rapport à m. Supposons le théorème démontré pour α contenant $m - 1$ éléments. Soit A_0 un élément quelconque de α. Convenons de désigner par $\bar{\alpha}$ l'agrégat $\{A_0 \cap A_i \,;\, A_i \in \alpha \,;\, A_i \neq A_0\}$ à $m - 1$ éléments de X. D'après l'induction $\bar{\alpha}$ satisfait l'hypothèse b), d'après l'équation (4. 2) il satisfait l'hypothèse c) et l'hypothèse a) se vérifie trivialement.

On a pour tout sous-agrégat $\bar{\alpha}''$ de $\bar{\alpha}$ l'inclusion $|\bar{\alpha}''| \subset A_0$. Puisque $H^n(A_0) = 0$ et la dimension de X est inférieure à n, on voit dans la suite exacte de cohomologie

$$\dots \to H^n(A_0) \to H^n(|\bar{\alpha}''|) \to H^{n+1}(A_0, |\bar{\alpha}''|) \to \dots\dots$$

que $H^n(|\bar{\alpha}''|) = 0$ d'où l'hypothèse d).

On a donc $\emptyset \neq \bigcap_{(A \cap A_i) \in \bar{\alpha}} (A_0 \cap A_i) = \bigcap_{A_i \in \alpha} A_i = I$ C.Q.F.D.

4. 2. Une conséquence immédiate est le

Corollaire 3. 1. (Helly: [9]) Soit $E = \{A_i\}_{i \in I}$ un tel ensemble de sous-ensembles convexes et fermés de l'espace euclidien R^n de dimension n, que toute intersection à $n + 1$ éléments de E est non-vide. Alors l'intersection des éléments de E est non-vide, s'il existe une intersection finie, non-vide et bornée d'éléments de E.

On peut déduire de Corollaire 3. 1 le

Corollaire 3. 2. (Helly: [10]) Si $E = \{A_i\}_{i \in I}$ est un ensemble fini d'ensembles convexes de R^n tel que toute intersection à $n + 1$ éléments de E est non-vide, alors l'intersection des éléments de E est non-vide.

Il découle encore du théorème 3 le

Corollaire 3. 3. (Molnar [14]) Si $E = \{A_i\}_{i \in I}$ est un ensemble d'ensembles compacts du plan euclidien tel que

a) tout $A_i \in E$ est simplement connexe,

b) tout $A_i \cap A_j$ est connexe,

c) tout $A_i \cap A_j \cap A_k$ est non-vide,

alors l'intersection $I = \bigcap_{i \in I} A_i$ est non-vide.

Bibliographie

[1] BOURBAKI, N.: Théorie des ensembles. Chap. 3. Actualités Sci· Ind. 1141, - Paris 1958.
[2] —»— Algèbre, Chap. 1. —»— 1144, - Paris 1958.
[3] —»— —»— Chap. 2. —»— 1032—1236, - Paris 1955.
[4] —»— —»— Chap. 8. —»— 1261, - Paris 1958.
[5] —»— Topologie générale. Chap. 1. —»— 1142, - Paris 1961.
[6] EILENBERG. S. — STEENROD. N.: Foundations of algebraic topology. - Princeton University Press. Princeton. N. J. 1952.
[7] FLOYD, E. E.: Closed coverings in Čech homology theory - Trans. Amer. Math. Soc. 84, 1957 pp. 319—337.
[8] GODEMENT, R.: Théorie des faisceaux. - Actualités Sci. Ind. 1251, Paris 1958.
[9] HELLY, E.: Über Mengen convexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. - Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, vol 132 (1923) pp. 175—176.
[10] —»— Über Systeme abgeschlossener Mengen mit gemeinschaftlichen Punkten. - Monatshefte Math. Phys., 37.
[11] KELLEY, J. — PITCHER, E.: Exact homomorphism sequences in homology theory. - Ann. of Math. 48 (1947).
[12] KAWADA, Y.: Theory of cosheaves. - Journal of the faculty of science, University of Tokio, vol. VIII part 3, 1960.
[13] LEFSCHETZ, S.: Algebraic topology. - Am. Math. Soc. New York 1942.
[14] MOLNAR, J.: Über den zweidimensionalen topologischen Satz von Helly. - Math. Lapok. 8 (1957), pp. 108—114.
[15] —»— Über eine Übertragung des Hellyschen Satzes in sphärische Räume. - Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 8. (1957), pp. 315—318.
[16] WU, WEN-TSÜN.: On a theorem of Leray. - Scientia Sinica. vol X no 7, 1961 pp. 793—805.

Imprimée janvier 1963.