ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

319

ÜBER EINE FASSUNG DES PHRAGMÉN-LINDELÖFSCHEN PRINZIPS

VON

ALEXANDER DINGHAS

HELSINKI 1962
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1963.319

Am 9. April 1962 vorgelegt von R. und F. Nevanlinna

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1962

Über eine Fassung des Phragmén-Lindelöfschen Prinzips

1. Einleitung. Es sei $w(z)$ $(z = x + iy)$ in

$$H : \operatorname{Re} z > 0$$

holomorph und genüge dort der (Lindelöfschen) Bedingung

$$\overline{\lim_{z \to i\eta}} |w(z)| \leq 1 \qquad (-\infty < \eta < +\infty)\,. \tag{1.1}$$

Man bilde die (endliche) Grösse

$$L(r) = \sup \left\{ \frac{\log |w(re^{i\vartheta})|}{r \cos \vartheta} \;\middle|\; |\vartheta| < \frac{\pi}{2} \right\} \tag{1.2}$$

Dann gilt der

Satz. 1. *Die Funktion* $L(r)$ *ist im Intervall*

$$0 < r < +\infty \tag{1.3}$$

nicht abnehmend und $r^2 L(r)$ *konvex in* r^2.

Allgemeiner gilt der Satz:

Satz 2. *Ist* $u(z)$ *subharmonisch in* H *und genügt sie dort der (Lindelöfschen) Bedingung*

$$\overline{\lim_{z \to i\eta}}\, u(z) \leq 0\,, \tag{1.4}$$

so ist die Grösse

$$L(r) = \sup \left\{ \frac{u(re^{i\vartheta})}{r \cos \vartheta} \;\middle|\; |\vartheta| < \frac{\pi}{2} \right\} \tag{1.5}$$

in (1.3) nicht abnehmend und $r^2 L(r)$ *konvex in* r^2.

Beide Sätze verallgemeinern einen klassischen Satz von Phragmén und Lindelöf[1], wonach unter den Voraussetzungen (1.1) bzw. (1.4) die Funktion

[1] Einen komplizierteren, auf ganz anderen Grundlagen beruhenden Beweis dieser Sätze habe ich in einer Note skizziert, die am 26. Februar 1962 der *Kongel. Videnskabers Selskabs in Trondheim* vorgelegt wurde. Vorliegende Note gibt den Inhalt eines Vortrags wieder, den ich am 6. 3. 1962 am Mathematischen Seminar der Universität Stockholm gehalten habe.

$\log|w(z)|$ (bzw. $u(z)$) entweder stets ≤ 0 in H ist oder es Punkte z in H von beliebig grossem Betrag derart gibt, dass $\log|w(z)| \geq \alpha_0|z|$ (bzw. $u(z) \geq \alpha_0|z|$) mit einem festen, positiven α_0 gilt. Aus dem Satz 2 erhält man ohne Schwierigkeit, wenn man dort $u(z)$ durch $-v(z)$ ersetzt, den

Satz 3. *Es sei $v(z)$ in H harmonisch bzw. superharmonisch und genüge dort der Bedingung*

$$\lim_{z \to i\eta} v(z) \geq 0 \,. \tag{1.6}$$

Man setze

$$J(r) = \inf \left\{ \frac{v(re^{i\vartheta})}{r\cos\vartheta} \;\middle|\; |\vartheta| < \frac{\pi}{2} \right\} . \tag{1.7}$$

Dann ist $J(r)$ in (1.3) nicht zunehmend und $r^2 J(r)$ konkav in r^2.
Gilt für die Funktion $v(z)$ die schärfere (Juliasche) Bedingung

$$v(z) \geq 0 \,, \tag{1.8}$$

so liefert die Aussage des Satzes 2. eine Vertiefung des klassischen Juliaschen Lemmas[2]. Dieses Lemma sichert bekanntlich die Existenz einer endlichen nicht negativen Zahl

$$\gamma = \inf \left\{ \frac{v(z)}{x} \;\middle|\; z \in H \right\} \tag{1.9}$$

mit der Eigenschaft, dass für jedes $z \in H$ die Ungleichung

$$v(z) \geq \gamma x \tag{1.10}$$

gilt. Nach dem Satz 3. muss nun $\gamma = \lim\limits_{r \to +\infty} J(r)$ sein.

Die Einfachheit der hier gegebenen Beweise für die Sätze 1. bis 3. beruht hauptsächlich auf einem Kunstgriff, wodurch die durch die Gleichungen (2.3) und (2.4) definierten Koeffizienten α_1, α_2 fast ohne Rechnung (durch Verwendung der beiden Hauptextremalfunktionen der zu beweisenden Ungleichung) ermittelt werden.

2. Vorbereitende Hilfsbetrachtungen. Es bedeute G den Halbring

$$0 < r_1 \leq |z| \leq r_2 \,, \operatorname{Re} z \geq 0 \qquad (r_1 < r_2 < +\infty) \,, \tag{2.1}$$

$\Gamma_{r_1}, \Gamma_{r_2}$ die Begrenzungen $\{z | z \in G,\ |z| = r_1\}, \{z | z \in G,\ |z| = r_2\}$, und $g(\zeta, z)$ (kurz g) die Greensche Funktion des offenen Kerns G_* von G. Man setze $z = re^{i\vartheta}$, $\zeta = |\zeta| e^{i\varphi} (\zeta \in \Gamma = G \setminus G_*)$ und bezeichne die innere

[2] Man vgl. etwa den (längeren) Beweis von LANDAU und VALIRON im *Journ. London Math. Soc.* (A Deduction from Schwarz's Lemma) *4*, S. 162—163, 1929.

Normale (bzw. die Bogenlänge) von Γ in dem Punkt ζ mit n bzw. mit ds. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \operatorname{Re} \zeta \frac{\partial g}{\partial n}\, ds = r \cos \vartheta$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma} \operatorname{Re} \frac{1}{\zeta} \frac{\partial g}{\partial n}\, ds = \frac{\cos \vartheta}{r} .$$

Daraus folgen leicht die Gleichungen

$$\tag{2.2} \begin{aligned} r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 &= r \cos \vartheta \\ \frac{\alpha_1}{r_1} + \frac{\alpha_2}{r_2} &= \frac{\cos \vartheta}{r} \end{aligned}$$

mit

$$\tag{2.3} \alpha_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{r_1}} \frac{\partial g}{\partial n} \cos \varphi\, ds$$

und

$$\tag{2.4} \alpha_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{r_2}} \frac{\partial g}{\partial n} \cos \varphi\, ds .$$

Löst man das System (2.2) nach α_1, α_2 auf, so findet man

$$\tag{2.5} \alpha_1 = \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{r_1}{r} \cos \vartheta$$

und

$$\tag{2.6} \alpha_2 = \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{r_2}{r} \cos \vartheta .$$

Ist $r_1 = 0$ (also liegt der Fall eines Halbkreises vor), so liefert das Verfahren die (bekannte) Gleichung

$$\tag{2.7} \frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_{r_2}} \frac{\partial g}{\partial n} \cos \varphi\, ds = \frac{r}{r_2} \cos \vartheta .$$

Wie in der Einleitung bereits hervorgehoben wurde, sind die Gleichungen (2.5) und (2.6) von prinzipieller Bedeutung und liefern fast ohne Rechnung den Beweis der Sätze 2. (also auch 1.) und 3.

3. Beweis des Konvexitätssatzes. Die Monotonie von $L(r)$. Man setze $u(z) = \log |w(z)|$. Dann gilt zunächst für $r_1 = 0, 0 < r_0 < \infty$.

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{r_0}} u(\zeta) \frac{\partial g_0}{\partial n} ds \qquad (|z| < r_0) . \tag{3.1}$$

Hierbei bedeutet $g_0 = g_0(\zeta, z)$ die Greensche Funktion des Halbkreises $|z| \leq r_0$, $\operatorname{Re} z \geq 0$. Nun zeigt eine leichte Rechnung, dass

$$\frac{\partial g}{\partial n} ds = \operatorname{Re} \left\{ \frac{\zeta + z}{\zeta - z} - \frac{\bar{\zeta} - z}{\bar{\zeta} + z} \right\} d\varphi \qquad (\zeta = r_0 e^{i\varphi} \in \Gamma_{r_0}) \tag{3.2}$$

ist und somit für grosse r_0

$$u(z) \leq \frac{4x}{\pi r_0} \int_{\Gamma_{r_0}} \overset{+}{u}(\zeta) \cos \varphi d\varphi \tag{3.3}$$

mit $\overset{+}{u} = \operatorname{Max}(0, u)$. Daraus folgt zunächst, dass $L(r)$ in $0 < r < \infty$ endlich ist.

Zum Beweis der Konvexität von $r^2 L(r)$ (als Funktion von r^2) und der Monotonie von $L(r)$ verfährt man am einfachsten so: Zunächst ist bei gegebenen $r_1, r_2 (0 < r_1 < r_2 < +\infty)$

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{r_1}} u(\zeta) \frac{\partial g}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{r_2}} u(\zeta) \frac{\partial g}{\partial n} ds . \tag{3.4}$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{r_1}} u(\zeta) \frac{\partial g}{\partial n} ds \leq r_1 L(r_1) \alpha_1$$

und

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{r_2}} u(\zeta) \frac{\partial g}{\partial n} ds \leq r_2 L(r_2) \alpha_2 .$$

Das liefert wegen (2.5) und (2.6) die Abschätzung

$$r u(re^{i\vartheta}) \leq \left\{ r_1^2 L(r_1) \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} + r_2^2 L(r_2) \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \right\} \cos \vartheta$$

und somit (nach Division durch $\cos \vartheta$ und Übergang zum Supremum $L(r)$) die Ungleichung

$$r^2 L(r) \leq r_1^2 L(r_1) \frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} + r_2^2 L(r_2) \frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} . \tag{3.5}$$

Lässt man hier $r_1 \to 0$ konvergieren, so folgt wegen

$$\lim_{r \to 0} L(r) = \lim_{r \to 0} \sup \left\{ \frac{u(re^{i\vartheta})}{r \cos \vartheta} \;\middle|\; |\vartheta| < \frac{\pi}{2} \right\} \leq 0$$

die Ungleichung $r^2 L(r) \leq r^2 L(r_2)$, d.h. $L(r) \leq L(r_2)$. Somit sind die Sätze 1. und 2. bewiesen worden.

Mit Hilfe der konformen Abbildung kann man den Sätzen 1. und 2. eine invariante Formulierung geben. Es sei in der Tat D ein einfach-zusammenhängendes Gebiet das nicht die volle komplexe Ebene ausmacht und ζ_1 ein erreichbarer Punkt des Randes Γ von D. Ferner sei $g(z)$ eine in D schlichte Funktion $g(z)$, welche D auf die Halbebene H : Re $g > 0$ derart abbildet, dass ζ_1 in den nicht endlichen Randpunkt von H übergeht. Ist jeder der Randpunkte von D erreichbar, so kann $g(z)$ so normiert werden, dass bei vorgegebenem $\zeta_0 \in \Gamma$ die Gleichung $\lim_{z \to \zeta_0} g(z) = 0$ gilt. Man setze nun

$$g(z) = \sigma(z) + it(z) \tag{3.6}$$

mit reellen $\sigma(z)$ und $t(z)$ und bezeichne mit $\Gamma_\lambda (0 < \lambda < +\infty)$ die Kurve in D auf der $|g(z)| = \lambda$ ist. Dann lässt sich der Satz 1 folgendermassen formulieren:

Satz 4. *Es sei $w(z)$ in D holomorph und genüge dort der Bedingung*

$$\overline{\lim_{z \to \zeta}} |w(z)| \leq 1 \qquad (\zeta \in \Gamma, \zeta \neq \zeta_1) . \tag{3.7}$$

Man setze

$$L(\lambda) = \sup \left\{ \frac{\log |w(z)|}{\sigma(z)} \;\middle|\; z \in \Gamma_\lambda \right\} . \tag{3.8}$$

Dann ist $L(\lambda)$ in $0 < \lambda < +\infty$ nicht abnehmend und $\lambda^2 L(\lambda)$ konvex in λ^2.

Ein entsprechender Satz gilt, wenn man $\log |w(z)|$ durch eine subharmonische Funktion $u(z)$ ersetzt, welche der Bedingung (1.4) genügt.

4. Die Konkavität von $r^2 J(r)$. Die Frage nach den Extremalfunktionen.

Ist $v(z)$ harmonisch (bzw. superharmonisch) in H, so gilt anstelle (3.5) die Ungleichung

$$v(z) \geq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{r_1}} v(\zeta) \frac{\partial g}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_{r_2}} v(\zeta) \frac{\partial g}{\partial n} ds . \tag{4.1}$$

Hierbei bedeutet wieder $g = g(\zeta, z)$ die Greensche Funktion des Halbringes $r_1 \leq |z| \leq r_2 (r_1 < r_2)$, Re $z \geq 0$ und ζ einen Punkt von Γ_{r_1} bzw. Γ_{r_2}. Aus (4.1) folgt nun, wenn man $J(r)$ durch (1.7) definiert und den Kunstgriff von 3. verwendet,

$$r\,\frac{v(re^{i\vartheta})}{\cos\vartheta} \geq r_1^2 J(r_1)\,\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} + r_2^2 J(r_2)\,\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\,. \tag{4.2}$$

Geht man nun links (bei festem r) zum Infimum über, so erhält man die Ungleichung

$$r^2 J(r) \geq r_1^2 J(r_1)\,\frac{r_2^2 - r^2}{r_2^2 - r_1^2} + r_2^2 J(r_2)\,\frac{r^2 - r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\,, \tag{4.3}$$

welche die Konvexität von $r^2 J(r)$ als Funktion von r^2 zum Ausdruck bringt. Die Ungleichung (4.3) gilt offenbar auch dann, wenn $u(z)$ in H superharmonisch ist und der Bedingung (1.6) genügt.

Lässt man in (4.3) $r_1 \to 0$ konvergieren, so erhält man (da $\lim\limits_{r\to 0} r^2 J(r) \geq 0$ ausfällt) $r^2 J(r) \geq r^2 J(r_2)$, d.h. $J(r) \geq J(r_2)$. Somit ist $J(r)$ in $0 < r < +\infty$ nicht zunehmend.

Ist $v(z) \geq 0$ in H, so ist $J(r) \geq 0$ $(0 \leq r < +\infty)$ und somit gilt

$$v(z) \geq \gamma r \cos\vartheta \qquad (z = re^{i\vartheta} \in H) \tag{4.4}$$

mit

$$\gamma = \lim_{r\to +\infty} J(r)\,. \tag{4.5}$$

Sowohl der Satz 3 als auch sein Spezialfall, das Juliasche Lemma, lassen sich konform-invariant formulieren:

Satz 5. *Die Funktion $u(z)$ sei in D harmonisch (bzw. superharmonisch) und genüge dort der Bedingung*

$$\lim_{z\to\zeta} u(z) \geq 0 \qquad (\zeta \in \Gamma\,,\ \zeta \neq \zeta_1)\,. \tag{4.6}$$

Man setze

$$J(\lambda) = \inf\left\{\frac{u(z)}{\sigma(z)}\ \middle|\ z \in \Gamma_\lambda\right\}. \tag{4.7}$$

Dann ist $J(\lambda)$ in $0 < \lambda < +\infty$ nicht zunehmend und $\lambda^2 J(\lambda)$ konkav in λ^2.

Ist $z \to w(z)$ eine in-Abbildung (also $w(z) \in D$), so kann man aus dem vorherigen Satz noch folgenden Satz ableiten:

Satz 5′. *Ist $z \to w(z)$ eine in-Abbildung und wird*

$$C(\lambda) = \inf\left\{\frac{\sigma(w(z))}{\sigma(z)}\ \middle|\ z \in \Gamma_\lambda\right\} \tag{4.8}$$

gesetzt, so ist $C(\lambda)$ in $0 < \lambda < \infty$ positiv, nicht zunehmend und $\lambda^2 C(\lambda)$ konkav in λ^2. Mithin existiert der Grenzwert $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} C(\lambda) = \gamma_0$ und es gilt

$$\sigma(w(z)) \geq \gamma_0 \sigma(z) \qquad (z \in D)^3 . \tag{4.9}$$

Die Frage nach dem Gleichheitszeichen in den Ungleichungen (3.5) bzw. (4.3) lässt sich relativ leicht beantworten, sofern man sich zunächst auf harmonische Funktionen $u(z)$ beschränkt. Eine erste Bedingung dafür ist vorerst die, dass nämlich $u(z)$ bzw. $v(z) = C(r) \cos \vartheta$ $(r_1 < r < r_2)$ ist und somit auch $rC(r) = A + Br^2$ mit konstanten (nur von r_1, r_2 abhängigen) A, B. Daraus folgt (wenn man noch die zusätzlichen Randbedingungen berücksichtigt)

$$u(z) = \left(\frac{A}{r} + Br\right) \cos \vartheta \qquad (A, B \text{ reell, } A \leq 0) \tag{4.10}$$

und

$$v(z) = \left(\frac{A}{r} + Br\right) \cos \vartheta \qquad (A, B \text{ reell, } A \geq 0) . \tag{4.11}$$

Liegt der Fall einer in H holomorphen Funktion vor, die der Bedingung (1.1) genügt, so kann in (3.5) das Gleichheitszeichen nur dann eintreten, wenn 1) $w(z)$ in: $0 < |z| < r_2$, $\operatorname{Re} z > 0$ keine Nullstellen besitzt und 2) wenn $\log |w(z)| = \left(\frac{A}{r} + Br\right) \cos \vartheta$ ist. Das liefert die Extremalfunktionen $w(z) = \exp\left(\frac{A}{z} + Bz\right)$. Hat man den Fall einer in H holomorphen Funktion $w(z)$, deren Realteil $u(z)$ der Bedingung (1.6) genügt, so liefert der Realteil jeder Funktion $\frac{A}{z} + Bz$ eine Extremale für den Satz 3. Verlangt man hier noch (Juliasches Lemma) $u(z) \geq 0$ $(z \in H)$, so muss noch $A \geq 0$ und $B \geq 0$ gelten.

5. Der räumliche Fall. Der Kunstgriff von 2. führt zu einer einfachen Behandlung der Dimension $n > 2$. Es bedeute $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ einen Punkt des n-dimensionalen euklidischen Raumes E^n und

$$S_r = \{P \,|\, x_1^2 + \ldots + x_n^2 = r^2 , x_1 > 0\}$$

die Halbkugel um den Nullpunkt mit dem Radius r.

Man bezeichne nun mit H den Halbraum $x_1 > 0$ (wir schreiben im folgenden x für x_1!) und betrachte die in H subharmonische Funktion $u(P)$, die noch der Bedingung

---

[3] Ist D der Kreis $|z| < 1$ und $\zeta_0 = -1, \zeta_1 = 1$, so ist $g(z) = (1 + z)/(1 - z)$ und $\sigma(z) = (1 - |z|^2)/|1 - z|^2$. Der Satz 5′ liefert dann neben der klassischen Abschätzung von JULIA und CARATHÉODORY noch die Eigenschaften von $J(r)$.

$$\overline{\lim_{P \to Q}}\, u(P) \leq 0 \qquad (P \in H)\,, \tag{5.1}$$

wobei Q ein endlicher (sonst beliebiger) Randpunkt von H ist, genügen möge. Dann gilt der Satz:

Satz 6. *Genügt $u(P)$ der (Lindelöfschen) Bedingung (5.1), so ist $L(r)$ in $0 < r < +\infty$ nicht abnehmend und $r^n L(r)$ eine dort konvexe Funktion von r^n.*

Dabei wird hier $L(r)$ durch die Gleichung

$$L(r) = \sup \left\{ \frac{u(P)}{x} \,\middle|\, P \in S_r \right\} \tag{5.2}$$

definiert.

Ist $v(z)$ superharmonisch in H und genügt sie dort der (Juliaschen) Bedingung

$$\underline{\lim_{P \to Q}}\, v(P) \geq 0\,, \tag{5.3}$$

so ist

$$J(r) = \inf \left\{ \frac{v(P)}{x} \,\middle|\, P \in S_r \right\} \tag{5.4}$$

in $0 < r < +\infty$ nicht zunehmend und $r^n J(r)$ konkav in r^n. Der Beweis des Satzes 6. erfolgt wieder durch den Kunstgriff von 2. Es bedeute in der Tat $g(P, Q)$ die Greensche Funktion von

$$R = \bigcup_r S_r \qquad (r_1 \leq r \leq r_2)\,. \tag{5.5}$$

Dann gilt (sofern wieder n die innere Normale von R bedeutet) zunächst

$$u(P) \leq \frac{1}{\omega_n} \int_{S_{r_1}} u(Q_1) \frac{\partial g}{\partial n}\, dO_1 + \frac{1}{\omega_n} \int_{S_{r_2}} u(Q_2) \frac{\partial g}{\partial n}\, dO_2\,, \tag{5.6}$$

wobei allgemein $Q_j \in S_{r_i}$ ist und dO_i das Volumenelement von S_{r_i} ist. Ferner ist $r^{n-1}\omega_n = 2 \int_{S_r} dO$. Es seien ξ_{r_1} bzw. ξ_{r_2} die ersten Koordinaten von Q_1 bzw. Q_2. Man setze $\xi_{r_1} = r_1 \cos\varphi$, $\xi_{r_2} = r_2 \cos\varphi$ und $x = r \cos\vartheta$ $(r_1 < r < r_2)$. Werden dann α_1, α_2 durch die Gleichungen

$$\alpha_1 = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_{r_1}} \cos\varphi \frac{\partial g}{\partial n}\, dO_1 \tag{5.7}$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{\omega_n} \int_{S_{r_2}} \cos\varphi \frac{\partial g}{\partial n}\, dO_2 \tag{5.8}$$

definiert, so gilt (da x und x/r^n in R harmonisch sind)

$$(5.9)\qquad \begin{aligned} r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 &= r\cos\vartheta \\ \frac{\alpha_1}{r_1^{n-1}} + \frac{\alpha_2}{r_2^{n-1}} &= \frac{1}{r^{n-1}}\cos\vartheta\,. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem liefert dann die Werte:

$$(5.10)\qquad \alpha_1 = \frac{r_2^n - r^n}{r_2^n - r_1^n}\left(\frac{r_1}{r}\right)^{n-1}\cos\vartheta$$

und

$$(5.11)\qquad \alpha_2 = \frac{r^n - r_1^n}{r_2^n - r_1^n}\left(\frac{r_2}{r}\right)^{n-1}\cos\vartheta$$

und somit die Abschätzung

$$r^{n-1}\frac{u(P)}{\cos\vartheta} \le r_1^n L(r_1)\frac{r_2^n - r^n}{r_2^n - r_1^n} + r_2^n L(r_2)\frac{r^n - r_1^n}{r_2^n - r_1^n}\,,$$

aus der ohne weiteres die Aussage des Satzes 6 folgt. Der Fall einer in H superharmonischen Funktion $v(P)$, die noch der Bedingung (5.3) genügt, erledigt sich durch Betrachtung von $-v(P)$, die dann zu der Ungleichung

$$r^{n-1}\frac{v(P)}{\cos\vartheta} \ge r_1^n J(r_1)\frac{r_2^n - r^n}{r_2^n - r_1^n} + r_2^n J(r_2)\frac{r^n - r_1^n}{r_2^n - r_1^n}$$

führt. Auch hier erledigt sich der Fall der Monotonie von $L(r)$ bzw. von $J(r)$ durch den Grenzübergang $r_1 \to 0$[4]. Der Kunstgriff von 2. liefert auch einen einfachen Beweis des Dreikugelsatzes von Hadamard für subharmonische Funktionen in E^n.

Es bedeute allgemein K_r die Kugel

$$(5.12)\qquad x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2\,,$$

und g die Greensche Funktion des Bereiches

$$R = \bigcup_r K_r \qquad (r_1 \le r \le r_2)\,.$$

Man setze

$$\alpha_1 = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{K_{r_1}} \frac{\partial g}{\partial n}\, dO_1$$

[4] Sowohl hier als auch in der vorherigen Ungleichung spielen die Funktionen $\left(\frac{A}{r^{n-1}} + Br\right)\cos\vartheta$ eine Extremalrolle. Dabei sind die Konstanten A, B den jeweiligen Randbedingungen anzupassen.

und

$$\alpha_2 = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{K_{r_2}} \frac{\partial g}{\partial n} \, dO_2 \, .$$

Dann gilt

$$\frac{1}{r_1^{n-2}} \alpha_1 + \frac{1}{r_2^{n-2}} \alpha_2 = \frac{1}{r^{n-2}} \qquad (n > 2) \tag{5.13}$$

und

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \, . \tag{5.14}$$

Daraus folgt

$$\alpha_1 = \frac{r_2^{n-2} - r^{n-2}}{r_2^{n-2} - r_1^{n-2}} \left(\frac{r_1}{r}\right)^{n-2} , \ \alpha_2 = \frac{r^{n-2} - r_1^{n-2}}{r_2^{2-n} - r_1^{n-2}} \left(\frac{r_2}{r}\right)^{n-2}$$

und somit für jede in R subharmonische Funktion $u(P)$ die Ungleichung

$$r^{n-2} u(P) \leq r_1^{n-2} M(r_1) \frac{r_2^{n-2} - r^{n-2}}{r_2^{2-n} - r_1^{n-2}} + r_2^{n-2} M(r_2) \frac{r^{n-2} - r_1^{n-2}}{r_2^{n-2} - r_1^{n-2}} \, .$$

Dabei ist noch

$$M(r) = \operatorname{Max} \{ u(P) \mid P \in K_r \} \, .$$

Ist $n = 2$, so ist die Gleichung (5.13) durch die Gleichung

$$\alpha_1 \log r_1 + \alpha_2 \log r_2 = \log r \qquad (r_1 < r < r_2)$$

zu ersetzen.

Gedruckt September 1962.