ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

312

ÜBER MEROMORPHE FUNKTIONEN AUF NULLBERANDETEN RIEMANNSCHEN FLÄCHEN

VON

LAURI MYRBERG

HELSINKI 1962
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1962.312

Am 9. März 1962 vorgelegt von F. NEVANLINNA und K. VÄISÄLÄ

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1962

1. Einleitung

1. Auf einer nullberandeten Riemannschen Fläche von endlichem Geschlecht sind die einfachsten meromorphen Funktionen rationale Funktionen, die alle komplexen Werte höchstens n-mal annehmen (n endlich). Auch auf Flächen von unendlichem Geschlecht existieren in gewissen Fällen nichtkonstante meromorphe Funktionen, die ebenfalls alle Werte höchstens n-mal annehmen; derartige Funktionen, die, wie die rationalen Funktionen, einen Körper f_0 bilden, sind in [3, 4, 5] untersucht worden.

Zweck der vorliegenden Arbeit ist es, auf einer beliebigen nullberandeten Riemannschen Fläche F eine Klasse $\mathfrak{F}$ von »quasirationalen» Funktionen zu definieren, die immer dann, wenn auf F nichtkonstante Funktionen der Klasse f_0 existieren, mit f_0 identisch ist.

2. Die lokale charakteristische Funktion

2. Es sei G eine (kompakte oder nichtkompakte) Teilfläche von F, deren relativer Rand Γ_0 aus einer endlichen Anzahl geschlossener analytischer Kurven besteht. Um die Wertverteilung einer in $G \cup \Gamma_0$ meromorphen Funktion $f(z)$ zu untersuchen, bilden wir die l o k a l e c h a r a k t e r i s t i s c h e F u n k t i o n von f, die im folgenden definiert wird. Zuerst führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

K: Eine kompakte Teilfläche von G, deren Rand aus Γ_0 und aus einer endlichen Menge Γ_K geschlossener analytischer Kurven besteht;

$\omega(z, \Gamma_K, K)$: Diejenige in K harmonische Funktion, die auf Γ_0 verschwindet und auf Γ_K einen solchen konstanten Wert λ_K besitzt, dass $\int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial n} \omega(z, \Gamma_K, K)\, ds = 2\pi$;

$\bar{\omega}(z, \Gamma_K, K)$: Die konjugierte Funktion von $\omega(z, \Gamma_K, K)$;

Γ_λ: Die Niveaukurve $\omega(z, \Gamma_K, K) = \lambda$;

K_λ: Die Teilfläche $\{z ; \omega(z, \Gamma_K, K) < \lambda\}$;

$[w_1, w_2]$: Der chordale Abstand der auf der Riemannschen Kugel liegenden Bildpunkte der Punkte w_1 und w_2 der komplexen Ebene:

$$[w_1\,,\,w_2] = \frac{|w_1 - w_2|}{\sqrt{1+|w_1|^2}\;\sqrt{1+|w_2|^2}}\,;$$

$$m\,(f\,,\,w\,,\,\Gamma_\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\lambda} \log \frac{1}{[f(z)\,,\,w]}\, d\overline{\omega}\,(z\,,\,\Gamma_K\,,\,K)\,;$$

$n\,(f\,,\,w\,,\,K_\lambda)$: Die Anzahl der Nullstellen von $f(z) - w$ in K_λ;

$$N\,(f\,,\,w\,,\,K) = \int\limits_0^{\lambda_K} n\,(f\,,\,w\,,\,K_\lambda)\,d\lambda\,;$$

$$T\,(f\,,\,w\,,\,K) = N\,(f\,,\,w\,,\,K) + m\,(f\,,\,w\,,\,\Gamma_K) - m\,(f\,,\,w,\,\Gamma_0) + \frac{\lambda_K}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_0} d\arg\,(f\,(z) - w)\,;$$

$$A\,(f\,,\,K_\lambda) = \iint\limits_{K_\lambda} \frac{|f'(z)|^2}{(1+|f(z)|^2)^2}\,dxdy:$$ Der sphärische Inhalt derjenigen Riemannschen Fläche, auf welche die Funktion $f(z)$ die Teilfläche K_λ abbildet;

$$T\,(f\,,\,K) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\lambda_K} A\,(f\,,\,K_\lambda)\,d\lambda:$$ Die lokale charakteristische Funktion.

3. Für die Funktionen $T\,(f\,,\,w\,,\,K)$ und $T\,(f\,,\,K)$ beweisen wir den folgenden

Satz 2.1. Die Grösse $T\,(f\,,\,w\,,\,K)$ ist von w unabhängig, und es gilt

$$T\,(f\,,\,w\,,\,K) = T\,(f\,,\,K) + c\cdot\lambda_K\,,$$

wo c eine nur von f und Γ_0 abhängige (also von K und w unabhängige) Konstante ist.

Beweis. Es seien w_1 und w_2 zwei komplexe Zahlen; dann gilt

$$\frac{d}{d\lambda}\,(m\,(f\,,\,w_1\,,\,\Gamma_\lambda) - m\,(f\,,\,w_2\,,\,\Gamma_\lambda))$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\lambda} \frac{d}{d\lambda}\log\left|\frac{f-w_2}{f-w_1}\right| d\overline{\omega} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_\lambda} d\,\arg\frac{f-w_2}{f-w_1}\,.$$

Ist $w_1 = \infty$, so fehlt der Nenner im letzten Integral. Nach dem Argumentenprinzip folgt hieraus

$$\frac{d}{d\lambda}\,(m(f\,,w_1\,,\Gamma_\lambda) - m(f\,,w_2\,,\Gamma_\lambda))$$

$$= n(f\,,w_2\,,K_\lambda) - n(f\,,w_1\,,K_\lambda) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_0} d\,\arg\frac{f-w_2}{f-w_1}$$

und ferner durch Integration zwischen den Grenzen $\lambda = 0$ und $\lambda = \lambda_K$

$$m(f\,,w_1\,,\Gamma_K) - m(f\,,w_2\,,\Gamma_K) - (m(f\,,w_1\,,\Gamma_0) - m(f\,,w_2\,,\Gamma_0))$$

$$= N(f\,,w_2\,,K) - N(f\,,w_1\,,K) + \frac{\lambda_K}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_0} d\,\arg\frac{f-w_2}{f-w_1}$$

oder

$$T(f\,,w_1\,,K) = T(f\,,w_2\,,K)\,,$$

woraus folgt, dass die Grösse $T(f\,,w\,,K)$ von w unabhängig ist. Multipliziert man die Gleichung

$$T(f\,,w\,,K) = N(f\,,w\,,K) + m(f\,,w\,,\Gamma_K) - m(f\,,w\,,\Gamma_0)$$

$$+\frac{\lambda_K}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_0} d\,\arg\,(f(z)-w)$$

mit dem sphärischen Flächenelement

$$d\tau\,(w) = \frac{d\sigma\,(w)}{(1+|w|^2)^2}$$

und integriert über die Riemannsche Kugel R, so ergibt sich (weil das über die ganze Kugel genommene Integral

$$\iint\limits_R \log\frac{1}{[w\,,w_0]}\,d\tau\,(w)$$

von w_0 unabhängig ist)

$$\pi\cdot T(f\,,w\,,K) = \iint\limits_R N(f\,,w\,,K)\,d\tau\,(w)$$

$$+\frac{\lambda_K}{2\pi}\iint\limits_R\left[\int\limits_{\Gamma_0} d\,\arg\,(f(z)-w)\right]d\tau\,(w)\,,$$

$$T(f\,,w\,,K) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\lambda_K} A\,(f\,,K_\lambda)\,d\lambda + c\cdot\lambda_K = T\,(f\,,K) + c\cdot\lambda_K\,,$$

wenn

$$c = \frac{1}{2\pi^2} \iint\limits_{R} \left[\int\limits_{\Gamma_0} d \arg (f(z) - w) \right] d\tau (w)$$

gesetzt wird, wo c die Bedingungen des Satzes erfüllt. Der Satz 2.1 ist damit bewiesen.

3. Die Klasse $\mathfrak{F}$ meromorpher Funktionen

4. Wir können nun mit Hilfe der lokalen charakteristischen Funktion $T(f, K)$ eine Klasse $\mathfrak{F}$ auf F meromorpher Funktionen definieren.

Definition 3.1. Eine auf der (nullberandeten) Riemannschen Fläche F meromorphe Funktion $f(z)$ gehört zur Klasse $\mathfrak{F}$, wenn sie die folgende Bedingung erfüllt: Ist G eine beliebige nichtkompakte Teilfläche, deren relativer Rand Γ_0 aus einer endlichen Anzahl geschlossener analytischer Kurven besteht, und $g(z)$ eine beliebige nichtkonstante in $G \cup \Gamma_0$ meromorphe Funktion, so gibt es drei (nur von f, g und G abhängige) Konstanten A, B und C, so dass

$$T(f, K) \leqq A \cdot T(g, K) + B \cdot \lambda_K + C$$

für jede kompakte Teilfläche $K \subset G$ mit dem Rande $\Gamma_0 + \Gamma_K$.

Aus der Definition folgt unmittelbar, wegen

$$T(f_1 + f_2) \leqq T(f_1) + T(f_2) + a \cdot \lambda_K + b ,$$

$$T(f_1 \cdot f_2) \leqq T(f_1) + T(f_2) + a' \cdot \lambda_K \qquad (a, b, a' \text{ Konstanten}),$$

$$T\left(\frac{1}{f}\right) = T(f),$$

der

Satz 3.1. Die Menge $\mathfrak{F}$ ist ein Körper.

5. *Spezielle Fälle.* Wir untersuchen nun die Klasse $\mathfrak{F}$ in einigen speziellen Fällen. Ist F eine Fläche, auf welcher nichtkonstante meromorphe Funktionen der Klasse f_0 existieren (d.h. Funktionen, die alle komplexen Werte höchstens n-mal annehmen; vgl. [3]), so ist $\mathfrak{F} = f_0$. Wir zeigen zuerst, dass aus $f \in \mathfrak{F}$ die Relation $f \in f_0$ folgt; zu diesem Zweck wählen wir als G das Komplement einer kompakten Teilfläche und als $g(z)$ eine beliebige Funktion der Klasse f_0. Weil

$$T(g, K) \leqq n \cdot \lambda_K$$

für alle $K \subset G$ gilt, folgt aus der Definition 3.1

$$T(f, K) \leqq (n A + B) \lambda_K + C ;$$

dann muss aber der sphärische Inhalt $A(f, G)$ der Bildfläche von G endlich sein, woraus $f \in f_0$ folgt ([3]). Umgekehrt gehört jede Funktion von f_0 zu $\mathfrak{F}$. Aus $T(f, K) \leqq n \cdot \lambda_K$ folgt nämlich, dass die Bedingung in der Definition 3.1 von der Funktion f mit $A = C = 0$ und $B = n$ für jede Funktion g erfüllt ist. Es ist also $\mathfrak{F} = f_0$.

Es gibt auch solche nullberandeten Riemannschen Flächen, auf welchen die Klasse $\mathfrak{F}$ nur Konstanten enthält. Nach einem Beispiel von M. Heins [2] existiert nämlich eine nullberandete Riemannsche Fläche F und eine Teilfläche G von F, so dass auf G nichtkonstante beschränkte analytische Funktionen existieren, aber keine auf der ganzen Fläche F meromorphe Funktion f in dem einzigen Randelement von G einen Grenzwert besitzt. Auf dieser Fläche ist jede Funktion f von $\mathfrak{F}$ eine Konstante; denn aus $T(f, K) \leqq A \cdot \lambda_K + B$ folgt ([3]), dass f im Randelement von G einen Grenzwert besitzt und somit sich auf eine Konstante reduziert.

Wir machen noch eine allgemeine Bemerkung über die Funktionen der Klasse $\mathfrak{F}$. Ist I ein Randelement, das eine Umgebung G vom Geschlecht Null besitzt, so kann I keine wesentliche Singularität für eine Funktion f der Klasse $\mathfrak{F}$ sein. Weil nämlich im vorliegenden Falle in G beschränkte analytische Funktionen existieren, so gilt $T(f, K) \leqq A \cdot \lambda_K$ für alle $K \subset G$, woraus folgt, dass f keinen Wert unendlich oft annehmen kann. I ist dann keine wesentliche Singularität für f.

4. Die Klasse Φ meromorpher Kovarianten

6. Im vorliegenden Paragraphen betrachten wir eine Klasse meromorpher Kovarianten, die in engem Zusammenhang mit den Funktionen der Klasse $\mathfrak{F}$ stehen. Es sei $\varphi(z)$ eine auf einer nullberandeten Riemannschen Fläche meromorphe Kovariante, deren Residuen in allen Polen verschwinden. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

$$m(\varphi, K) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_K} \log^+ \left| \int_{z_0}^{z} \varphi \, dz \right| d\bar{\omega}(z, \Gamma_K, K), \quad \text{wo } z_0 \in \Gamma_0, \; z \in \Gamma_K$$

und das Integral $\int_{z_0}^{z} \varphi \, dz$ längs der Niveaukurve $\bar{\omega}(z, \Gamma_K, K) =$ Konstante genommen ist;

$\bar{n}(\varphi, \infty, K_\lambda)$: Die Summe $\sum_{z_i \in K_\lambda} (\mu(z_i) - 1)$, wo $\mu(z_i)$ die

Ordnung des Poles z_i von φ bedeutet;

$$\bar{N}(\varphi, \infty, K) = \int_0^{\lambda_K} \bar{n}(\varphi, \infty, K_\lambda)\, d\lambda\,;$$

$$T(\varphi, \infty, K) = \bar{N}(\varphi, \infty, K) + m(\varphi, K)\,.$$

Mit Hilfe der obigen Bezeichnungen definieren wir nun die Klasse Φ meromorpher Kovarianten auf folgende Weise:

Definition 4.1. Eine auf der (nullberandeten) Riemannschen Fläche F meromorphe Kovariante $\varphi(z)$ gehört zur Klasse Φ, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

1° Die Perioden $\int_d \varphi\, dz$ längs den zerlegenden Zyklen d sind gleich Null (woraus folgt, dass alle Residuen von φ verschwinden);

2° Ist G eine beliebige nichtkompakte Teilfläche, deren relativer Rand Γ_0 aus einer endlichen Anzahl geschlossener analytischer Kurven besteht, und $g(z)$ eine beliebige nichtkonstante in $G \cup \Gamma_0$ meromorphe Funktion, so gibt es drei (nur von φ, g und G abhängige) Konstanten A, B und C, so dass

$$T(\varphi, \infty, K) \leqq A \cdot T(g, K) + B \cdot \lambda_K + C$$

für jede kompakte Teilfläche $K \subset G$ mit dem Rande $\Gamma_0 \cup \Gamma_K$ (wo auch Γ_K aus einer endlichen Anzahl geschlossener analytischer Kurven besteht).

Aus der Definition folgt wegen

$$T(\varphi_1 + \varphi_2) \leqq T(\varphi_1) + T(\varphi_2) + a\,,$$
$$T(k\,\varphi) \leqq T(\varphi) + b \qquad (a\,,\, b \text{ Konstanten})$$

der

Satz 4.1. Die Menge Φ ist ein linearer Raum.

7. Speziell enthält der Raum Φ alle Kovarianten φ, deren absoluter Betrag über die Fläche F quadratisch integierbar ist: $\iint_F |\varphi|^2\, dxdy = D < \infty$. Aus den Ungleichungen $\left(\text{wo } \varphi = \dfrac{dw}{dz}\right)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma_K} \log^+ \left|\int_{z_0}^{z_0} \varphi\, dz\right| d\bar{\omega} \leqq \log^+ \left\{\frac{1}{\pi}\int_{\Gamma_K} \left(\int_0^{\lambda_K} \left|\frac{dw}{d\lambda}\right| d\lambda\right)^2 d\bar{\omega}\right\},$$

$$\left(\int_0^{\lambda_K} \left|\frac{dw}{d\lambda}\right| d\lambda\right)^2 \leqq \lambda_K \cdot \int_0^{\lambda_K} \left|\frac{dw}{d\lambda}\right|^2 d\lambda$$

folgt nämlich

$$T(\varphi\,,\,\infty\,,\,K) = m(\varphi\,,\,K) \leqq \log^+ \lambda_K + \log^+ \int\limits_{\Gamma_K} \left(\int\limits_0^{\lambda_K} \left| \frac{dw}{d\lambda} \right|^2 d\lambda \right) d\bar{\omega}$$

$$\leqq \log^+ \lambda_K + \log^+ D\,,$$

woraus sich leicht ergibt, dass die Bedingung in der Definition 4.1 mit $A = 0$ erfüllt ist.

8. Zwischen dem Körper $\mathfrak{F}$ und dem linearen Raum Φ besteht ein enger Zusammenhang, wie aus dem folgenden Satz hervorgeht:

Satz 4.2. Die Menge

$$\left\{ f\,;\, \frac{df}{dz} = \varphi\,,\, f \text{ eindeutig,} \quad \varphi \in \Phi \right\}$$

ist identisch mit dem Körper $\mathfrak{F}$.

Beweis. 1° Es sei $\varphi \in \Phi$ und $f = \int \varphi\, dz$ eindeutig; dann gilt

$$N(f\,,\,\infty\,,\,K) = \bar{N}(\varphi\,,\,\infty\,,\,K)\,,$$

$$m(f\,,\,\infty\,,\,\Gamma_K) \leqq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_K} \log^+ |f(z)|\, d\bar{\omega}\,(z\,,\,\Gamma_K,\,K) + \frac{1}{2} \log 2$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_K} \log^+ |f(z) - f(z_0)|\, d\bar{\omega}\,(z\,,\,\Gamma_K\,,\,K)$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_K} \log^+ |f(z_0)|\, d\bar{\omega}\,(z\,,\,\Gamma_K\,,\,K) + \frac{3}{2} \log 2$$

($z \in \Gamma_K$ und $z_0 \in \Gamma_0$ liegen auf derselben Niveaukurve $\bar{\omega} =$ Konst.)

$$= m(\varphi\,,\,K) + m(f\,,\,\infty\,,\,\Gamma_0) + \frac{3}{2} \log 2$$

und ferner

$$T(f\,,\infty\,,K) \leqq \bar{N}(\varphi\,,\infty\,,K) + m(\varphi\,,K) + \frac{3}{2} \log 2 = T(\varphi\,,\infty\,,K) + \frac{3}{2} \log 2\,,$$

woraus folgt, dass $\varphi \in \Phi$ die Relation $f \in \mathfrak{F}$ impliziert.

2° Es sei umgekehrt $f \in \mathfrak{F}$ und $\varphi = \dfrac{df}{dz}$; wie oben erhält man

$$T(\varphi\,,\,\infty,\,K) \leqq T(f\,,\,\infty\,,\,K) + 2\,m(f\,,\,\infty\,,\,\Gamma_0) + \log 2\,.$$

Weil die Grösse $m(f\,,\,\infty\,,\,\Gamma_0)$ eine endliche von K unabhängige obere Grenze besitzt, gilt ferner

$$T(\varphi\,,\,\infty\,,K) \leqq T(f\,,\,\infty\,,\,K) + a \quad (a \text{ Konstante}),$$

woraus hervorgeht, dass aus $f \in F$ die Relation $\varphi \in \Phi$ folgt.

9. Sind φ_1 und φ_2 zwei Kovarianten des Raumes Φ mit denselben Perioden, so ist die Differenz $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ eine Kovariante von Φ mit einer eindeutigen Integralfunktion $f \in \mathfrak{F}$, woraus

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \frac{df}{dz} \qquad\qquad (f \in \mathfrak{F})$$

folgt, d.h. alle Kovarianten von Φ mit denselben Perioden können aus einer von ihnen durch Addieren der Ableitung einer beliebigen Funktion $f \in \mathfrak{F}$ erhalten werden.

Enthält der Körper $\mathfrak{F}$ nur Konstanten, sind die Kovarianten von Φ durch ihre Perioden eindeutig bestimmt.

10. Wir erwähnen noch eine Eigenschaft der Kovarianten des Raumes Φ. Ist I ein Randelement, das eine Umgebung G vom Geschlecht Null besitzt, so ist die Integralfunktion $f = \int \varphi\, dz$ einer beliebigen Kovariante $\varphi \in \Phi$ eindeutig in G, wie sich leicht aus der Bedingung 1° in der Definition 4.1 ergibt. Nach den Nummern 8 und 5 ist I keine wesentliche Singularität für f.

Literatur

[1] AF HÄLLSTRÖM, G.: Über meromorphe Funktionen mit mehrfach zusammenhängenden Existenzgebieten. - Acta Acad. Aboensis, Math. et Phys. 12:8 (1940).

[2] HEINS, M.: Riemann surfaces of infinite genus. - Annals of Math. 55:2 (1952).

[3—5] MYRBERG, L.: Über meromorphe Funktionen auf endlich vielblättrigen Riemannschen Flächen. - Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I 286 (1960); II Ibid. 301 (1961); III Ibid. 311 (1962).

[6] TSUJI, M.: Potential theory in modern function theory. - Maruzen Co., Tokyo (1959).

Gedruckt März 1962