ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

311

ÜBER MEROMORPHE FUNKTIONEN AUF ENDLICH VIELBLÄTTRIGEN RIEMANNSCHEN FLÄCHEN III

VON

LAURI MYRBERG

HELSINKI 1962
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1962.311

Am 12. Januar 1962 vorgelegt von F. NEVANLINNA und K. VÄISÄLÄ

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1962

Über meromorphe Funktionen auf endlich vielblättrigen Riemannschen Flächen III

1. In den zwei ersten Teilen unserer Arbeit [2], [3] sind zwei Klassen von meromorphen Funktionen (bzw. Kovarianten) betrachtet worden:

Der Körper f_0 derjenigen auf einer nullberandeten Riemannschen Fläche F meromorphen Funktionen, die alle komplexen Werte höchstens n-mal annehmen;

Der lineare Raum Φ_0 der Kovarianten $\varphi = f\alpha$ mit $f \in f_0$ und

$$\iint\limits_{F-G} |\alpha(z)|^2 \, d\sigma < \infty \quad (G \text{ kompakt}) .$$

Im vorliegenden dritten Teil werden einige Unterklassen von f_0 und Φ_0 untersucht.

2. Es sei $f(z)$ eine auf einer nullberandeten Riemannschen Fläche F meromorphe Funktion, die ausserhalb einer kompakten Teilfläche G_0 den Ungleichungen

$$0 < m \leqq |f(z)| \leqq M < \infty \tag{1}$$

genügt. Dann ist die Funktion $u = \log |f|$ auf F eindeutig und bis auf endlich viele Singularitäten harmonisch; ferner gilt in $F - G_0$

$$\log m \leqq u \leqq \log M ,$$

woraus folgt (s. [4], S. 325), dass

$$\iint\limits_{F-G_0} |\text{grad } u|^2 \, d\sigma = \iint\limits_{F-G_0} \left|\frac{d \log f}{dz}\right|^2 d\sigma < \infty .$$

3. Die Kovariante $\alpha = \dfrac{d \log f}{dz}$ erfüllt somit die Bedingung

$$1^\circ \qquad \iint\limits_{F-G_0} |\alpha|^2 \, d\sigma < \infty \quad (G_0 \text{ kompakt}) .$$

Ferner besitzt α die folgenden Eigenschaften:

2° Die Perioden $\int_\gamma \alpha\, dz$ sind für alle Zyklen γ rein imaginär und von der Form $2\pi i n$ (n eine ganze Zahl).

3° Wenn der Zyklus d die Fläche F in zwei Teile zerlegt: $F = F_1 \cup F_2$, so dass $G_0 \subset F_1$, so ist

$$\int_d \alpha\, dz = 0 \, .$$

Die Richtigkeit der Behauptung 3° folgt daraus, dass $\iint_{F_2} |\alpha|^2\, d\sigma < \infty$ und das harmonische Mass des idealen Randteiles von F_2 gleich Null ist ([4], S. 328).

4° Ist $z = z_0$ ein k-facher Pol (bzw. eine k-fache Nullstelle) von f, so besitzt α in $z = z_0$ einen einfachen Pol mit dem Residuum k (bzw. $-k$).

5° Die Funktion f nimmt die Werte 0 und ∞ gleich oft an; denn es gilt

$$n(f, 0, F) - n(f, \infty, F) = n(f, 0, G_0) - n(f, \infty, G_0) =$$
$$\int_{\partial G_0} \frac{d \log f}{dz}\, dz = \int_{\partial G_0} \alpha\, dz = 0 \, .$$

Die Anzahl der Nullstellen, $n(f, 0, F)$, ist $= n$, d.h. gleich der normalen Anzahl der a-Stellen.

6° Es gilt

$$\int_\gamma \alpha\, dz = 0$$

für jeden Zyklus γ, der ausserhalb einer gewissen kompakten Teilfläche G liegt.

Beweis von 6°. Es sei F_w diejenige n-blättrige Überlagerungsfläche der w-Ebene, auf welche die Funktion $w = f(z)$ die Fläche F konform abbildet, und E die Menge der komplexen Werte, die f auf F weniger als n-mal annimmt. Die Kapazität von E ist gleich Null (2, Satz 3.5). Weil die Punkte $w = 0$ und $w = \infty$ nach 5° nicht zu E gehören, können wir ein Gebiet G_w der w-Ebene finden, das die Punkte 0 und ∞ enthält und die Menge E auslässt. Die Teilfläche G von F_w, deren Spurpunktmenge in der w-Ebene die Menge G_w ist, ist auf F_w kompakt und erfüllt die Bedingung 6°. Es sei nämlich γ ein Zyklus, der in $F_w - G$ liegt, und γ seine Spur, wobei diejenigen Punkte, auf welchen k Punkte von γ liegen, k-fach mitgenommen werden. Dann gilt

$$\int_\gamma \alpha\, dz = \int_{\gamma_w} d \log w = 0 \, ,$$

weil die Kurve γ_w ausserhalb des Gebietes G_w liegt.

4. Umgekehrt, wenn eine meromorphe Kovariante α die Bedingungen 1° und 2° erfüllt, so ist

$$f(z) = e^{\int \alpha\, dz}$$

eine eindeutige meromorphe Funktion, die der Bedingung (1) genügt. Hieraus folgt aber ferner, dass α auch die Eigenschaften 3° — 6° besitzt.

Alle Kovarianten, die die Bedingungen 1° — 6° erfüllen, bilden einen linearen Raum L, dessen Multiplikatoren ganze rationale Zahlen sind. Der Raum L ist ein Unterraum von Φ_0.

Die Funktionen $f = e^{\int \alpha\, dz}$ mit $\alpha \in L$ bilden eine multiplikative Gruppe Γ, die eine Untergruppe von f_0 ist.

5. Es wird noch eine Produktdarstellung für die Funktionen der Gruppe Γ mit Hilfe von gewissen Kovarianten des Raumes Φ_0 gegeben. Es sei $\alpha(z, a, b)$ eine meromorphe Kovariante mit folgenden Eigenschaften:

a) Die einzigen Singularitäten von $\alpha(z, a, b)$ sind einfache Pole mit den Residuen 1 und -1 in den Punkten a und b.

b) $$\iint_{F-G} |\alpha(z, a, b)|^2\, d\sigma < \infty \quad (G \text{ kompakt}) .$$

c) Die Perioden $\int_\gamma \alpha(z, a, b)\, dz$ auf den Zyklen γ sind rein imaginär.

Es sei dann $f(z)$ eine meromorphe Funktion der Gruppe Γ mit den Nullstellen $b_1, \ldots, b_n$ (k-fache Stellen k-mal mitgenommen) und Polen $a_1, \ldots, a_n$. Dann ist die Differenz

$$\varphi(z) = \frac{d \log f}{dz} - \sum_{i=1}^{n} \alpha(z, a_i, b_i)$$

eine auf F analytische Kovariante, für welche

$$\iint_F |\varphi(z)|^2\, d\sigma < \infty$$

gilt und für welche alle Perioden $\int_\gamma \varphi\, dz$ rein imaginär sind. Weil die Fläche F nullberandet ist, folgt hieraus $\varphi \equiv 0$ oder

$$\frac{d \log f}{dz} = \sum_{i=1}^{n} \alpha(z, a_i, b_i) ,$$

(2) $$f(z) = C \prod_{i=1}^{n} e^{\int \alpha(z, a_i, b_i)\, dz} \quad (C \text{ Konstante}) .$$

Dies ist die gesuchte Produktdarstellung. Die Faktoren des Produktes sind i.A. nicht eindeutig, sondern sie sind multiplikative Funktionen, die beim

Umlaufen eines Zyklus mit einem Faktor $e^{i\omega}$ (ω reell) multipliziert werden.

6. Es sei $f(z)$ eine beliebige meromorphe Funktion des Körpers f_0, die somit alle komplexen Werte n-mal annimmt, höchstens von einer Menge E von Kapazität Null abgesehen. Ferner seien a und b zwei komplexe Zahlen, die nicht zu E gehören. Dann gibt es zwei positive reelle Konstanten, m und M, und eine kompakte Teilfläche G_0 von F derart, dass in $F - G_0$

$$m \leqq \left| \frac{f(z) - a}{f(z) - b} \right| \leqq M$$

gilt. Dann ist aber $f_1(z) = \dfrac{f(z) - a}{f(z) - b}$ eine Funktion der Gruppe Γ, woraus folgt, dass jede Funktion des Körpers f_0 in der Form

$$f(z) = \frac{Af_1(z) + B}{Cf_1(z) + D} \qquad (A, B, C, D \text{ Konstanten}) \tag{3}$$

dargestellt werden kann, wo $f_1(z) \in \Gamma$. Umgekehrt, jede Funktion von der Form (3) mit $f_1 \in \Gamma$ gehört zu f_0.

Zusammenfassend haben wir den folgenden

Satz: Die meromorphen Funktionen, die auf einer nullberandeten Riemannschen Fläche F ausserhalb einer kompakten Teilfläche G_0 den Ungleichungen (1) genügen, bilden eine multiplikative Untergruppe Γ des Körpers f_0.

Die auf F meromorphen Kovarianten mit den Eigenschaften 1° und 2° bilden einen linearen Raum L, dessen Multiplikatoren ganze rationale Zahlen sind. L ist ein Unterraum des Raumes Φ_0.

Aus $f \in \Gamma$ folgt $\alpha = \dfrac{d \log f}{dz} \in L$, und umgekehrt: Aus $\alpha \in L$ folgt $f = e^{\int \alpha\, dz} \in \Gamma$.

Jede Funktion f von Γ und die zugehörige Kovariante α haben die Eigenschaften 1° — 6°. Für f gilt die Produktdarstellung (2).

Die Menge der Funktionen von der Form $\dfrac{Af + B}{Cf + D}$ ($f \in \Gamma$; A, B, C, D komplexe Zahlen) ist identisch mit dem Körper f_0.

Literatur

[1] AHLFORS, L. V. — SARIO, L.: Riemann Surfaces. - Princeton Univ. Press (1960).

[2] MYRBERG, L.: Über meromorphe Funktionen auf endlich vielblättrigen Riemannschen Flächen. - Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I 286 (1960).

[3] —»— Über meromorphe Funktionen auf endlich vielblättrigen Riemannschen Flächen II. - Ibid. A I 301 (1961).

[4] NEVANLINNA, R.: Uniformisierung. - Springer (1953).

Gedruckt Februar 1962.