ANNALES ACADEMIAE SCIENTIARUM FENNICAE

Series A

I. MATHEMATICA

309

EINE VERALLGEMEINERUNG DER BETRAGSFUNKTION IM ZUSAMMENHANG MIT EINER KLASSE VON DIFFERENTIALOPERATOREN AUF RIEMANNSCHEN FLÄCHEN

VON

WOLFGANG TUTSCHKE

HELSINKI 1962
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

https://doi.org/10.5186/aasfm.1962.309

Am. 8. September 1961 vorgelegt von R. und F. NEVANLINNA

KESKUSKIRJAPAINO
HELSINKI 1962

Eine Verallgemeinerung der Betragsfunktion im Zusammenhang mit einer Klasse von Differentialoperatoren auf Riemannschen Flächen

Im folgenden werden auf einer Riemannschen Fläche R solche Differentialoperatoren zweiter Ordnung

$$a_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+2\,a_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial}{\partial x}+b_2\frac{\partial}{\partial y}$$

betrachtet, für die sich in der Nachbarschaft eines Punktes $P\in R$ ein lokaler Parameter $\hat{z}$ derart angeben lässt, dass in diesen umgerechnet der Hauptteil konstante Koeffizienten besitzt. Es wird gezeigt werden, dass sich die Hauptteile solcher Differentialoperatoren auf verallgemeinerte Kovarianten

$$G(z)=e^{\Phi_1(z)}\cdot\varphi_2(z)$$

zurückführen lassen, wobei $\varphi_2(z)$ ein Abelsches Differential und $\Phi_1(z)$ ein Abelsches Integral ist, für das die Perioden von $\operatorname{Im}[\Phi_1]$ ganzzahlige Vielfache von π sind.

Weiter wird gezeigt, dass $g=\operatorname{Re}[\Phi_1]+\log|\varphi_2|$ in einer analogen Beziehung zu

$$Q(x\,,y)=\frac{a_{11}(x\,,y)}{a_{22}(x\,,y)}\quad\text{für}\quad a_{12}(x\,,y)\neq 0$$

und zu

$$\hat{Q}(x\,,y)=\frac{a_{12}(x\,,y)}{a_{11}(x\,,y)+a_{22}(x\,,y)}\quad\text{für}\quad a_{11}(x\,,y)-a_{22}(x\,,y)\neq 0$$

(bzw. zu $\tilde{Q}=\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$ in einem ausgearteten Fall) steht, wie die Argumentfunktion einer holomorphen Funktion zu der zugehörigen Betragsfunktion.

Auf einer kompakten Riemannschen Fläche vom Geschlecht p lassen sich (falls man für den Differentialoperator isolierte Singularitäten zulässt, in denen sich g bestimmt verhält) alle möglichen $g^*=\operatorname{Im}[\Phi_1]+\arg\varphi_2$ durch Angabe eines Divisors vom Grad $4(p-1)$ und Wahl eines Gitterpunktes im $2p$-dimensionalen euklidischen Raum eindeutig charakterisieren.

1. Die Kovariante $G(z)$

Im Parameter z (Gültigkeitsgebiet U) sei $(z = x + i \cdot y)$

$$C_0 \cdot \left(a_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2 a_{12} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \tag{1.1}$$

der Hauptteil eines Differentialoperators, wobei C_0 ein beliebiger konstanter Faktor ist[1]). Ist $\hat{z}$ derjenige Parameter, in dem der Hauptteil konstante Koeffizienten besitzt, so ist $\frac{d\hat{z}}{dz}$ holomorph, von null verschieden[2]) und bis auf einen komplexen Faktor eindeutig bestimmt. $\hat{z}$ ist also eindeutig festgelegt bis auf eine Drehstreckung der Parameterebene (von einer Translation ganz abgesehen). Über diese kann man so verfügen, dass

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$$

im Parameter $\hat{z}$ die Form

$$\begin{vmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & c_2 \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

annimmt, wobei

$$|c_1| > |c_2|\,, \quad c_1 \cdot c_2 = 1 \quad \text{für } \det A > 0$$
$$|c_1| = 1\,, \quad c_2 = 0 \quad \text{für } \det A = 0$$
$$c_1 > c_2\,, \quad c_1 \cdot c_2 = -1 \quad \text{für } \det A < 0$$

gefordert wird. $\hat{z}$ ist dann bis auf eine Translation und eine Drehung der Parameterebene um π eindeutig festgelegt. ($c_1 = c_2 = 1$ entspricht dem Fall des Laplace-Operators, der von den nachfolgenden Betrachtungen ausgeschlossen wird.)

Setzt man

$$\frac{d\hat{z}}{dz} = G(z)$$

und ist z' in U' gültiger Parameter $(U \cap U' \neq \Lambda)$, so hat man

---

[1]) Der Fall, dass anstelle von C_0 ein beliebiger ortsabhängiger Faktor $\lambda(x, y) \neq 0$ steht, wird in Abschnitt 3 betrachtet.

[2]) Nullstellen von $\frac{d\hat{z}}{dz}$ bedeuten Singularitäten des Differentialoperators. Diese werden in 4 zugelassen.

$$\frac{d\hat{z}}{dz'} = G(z') = G(z) \cdot \frac{dz}{dz'} .$$

Kehrt man jedoch längs eines Rückkehrschnittes γ zu dem ursprünglich betrachteten Parameter z zurück, so wird (entsprechend der Willkür von C_0 in (1.1)) der der Normierung (1.2) entsprechend nunmehr zu wählende Parameter $\hat{z}_\gamma$ mit dem ursprünglich gewählten $\hat{z}$ durch eine Relation der Form

$$\hat{z}_\gamma = d_0 + d_1 \cdot z , \qquad d_1 \text{ reell},$$

zusammenhängen. Hieraus folgt, dass $G(z)$ längs Rückkehrschnitten reelle multiplikative Perioden besitzen darf. Macht man den Ansatz

$$G(z) = e^{g + i \cdot g^*} ,$$

so ergeben sich für $g^*(x, y)$ die drei folgenden Bedingungen:

1°. $\Delta g^* = 0$

2°. Bei Parameterwechsel $z' = z'(z)$ ist

$$g^{*\prime} = g^* - \arg \frac{dz'}{dz} .$$

3°. Für die Perioden $\pi_\gamma[g^*]$ von g^* längs eines Rückkehrschnittes γ gilt: $\pi_\gamma[g^*] \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Da bei Parameterwechsel $\arg \dfrac{dz'}{dz}$ nur $\bmod 2\pi$ bestimmt ist, kann man dabei (falls man nicht über die zulässigen Parameter einschränkende Voraussetzungen macht) wegen 2° die Periode $\pi_\gamma[g^*]$ überhaupt nur $\bmod 2\pi$ definieren. Für g nimmt die Bedingung 2° die Form

$$g' = g - \log \left| \frac{dz'}{dz} \right|$$

an. Da sich der Hauptteil A bei Parameterwechsel $z' = z'(z)$, $\operatorname{Re}[z'(z)] = V(x, y)$, nach

$$A' = C^T \cdot A \cdot C$$

transformiert, wo

$$C = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial x} & -\dfrac{\partial V}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y} & \dfrac{\partial V}{\partial x} \end{Vmatrix}$$

ist, ergibt sich aus (1.2), in den Parameter z umgerechnet:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= e^{-2g} \cdot (c_1 \cdot \cos^2 g^* + c_2 \cdot \sin^2 g^*) \\
a_{12} &= e^{-2g} \cdot (c_2 - c_1) \cos g^* \cdot \sin g^* \\
a_{22} &= e^{-2g} \cdot (c_1 \cdot \sin^2 g^* + c_2 \cdot \cos^2 g^*) \, .
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

Hat g längs eines Rückkehrschnittes γ die Periode $\pi_\gamma[g] = p$, so multiplizieren sich beim Umlauf längs γ alle a_{ij} mit e^{-2p}. Ist $g^* = g^*(x, y)$ eine Grösse auf R, die die Eigenschaften 1°, 2° und 3° besitzt, so liefert (1.3) den Hauptteil eines Differentialoperators, der bei geeigneter Wahl des lokalen Parameters konstante Koeffizienten besitzt. Dieser ist elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch, je nachdem $c_1 \cdot c_2$ positiv, null oder negativ ist. Aus (1.3) folgt weiter, dass

$$Q(x\,,\,y) = \frac{a_{11}(x\,,\,y)}{a_{22}(x\,,\,y)} = \frac{c_1 \cdot \cos^2 g^* + c_2 \cdot \sin^2 g^*}{c_1 \cdot \sin^2 g^* + c_2 \cdot \cos^2 g^*} \tag{1.4}$$

und

$$\hat{Q}(x\,,\,y) = \frac{a_{12}(x\,,\,y)}{a_{11}(x\,,\,y) + a_{22}(x\,,\,y)} = \frac{c_2 - c_1}{2\,(c_1 + c_2)} \cdot \sin 2\,g^* \tag{1.5}$$

explizit nur von g^* abhängen.

2. Holomorphie in Abhängigkeit von einem Multiplikator

Um die in der Einleitung aufgestellte Behauptung zu beweisen, dass sich die Funktionen $Q(x, y)$ (1.4) und $\hat{Q}(x, y)$ (1.5) ähnlich wie die Betragsfunktion einer holomorphen Funktion verhalten, soll zunächst als Hilfsbetrachtung die folgende Aufgabe behandelt werden: $f_1, \ldots, f_n$ seien gegebene Funktionen von x und y, und H_1, H_2 seien Funktionen der f_i, die überdies in den f_i homogen von der Ordnung α seien:

$$H_k[\lambda \cdot f_1\,, \ldots, \lambda \cdot f_n] = \lambda^\alpha \cdot H_k[f_1\,, \ldots, f_n]\,.$$

Die Funktionen f_i, H_k seien dabei nach allen Argumenten zweimal stetig differenzierbar. Es soll nun λ als Funktion von x, y so bestimmt werden, dass

$$
\begin{aligned}
&H_1[\lambda(x\,,\,y) \cdot f_1(x\,,\,y)\,, \ldots, \lambda(x\,,\,y) \cdot f_n(x\,,\,y)] \\
&+ i \cdot H_2[\lambda(x\,,\,y) \cdot f_1(x\,,\,y)\,, \ldots, \lambda(x\,,\,y) \cdot f_n(x\,,\,y)]
\end{aligned}
$$

holomorphe Funktion von $z = x + i \cdot y$ ist. Die Funktion $\lambda(x\,,\,y)$ muss daher so bestimmt werden, dass die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x}(\lambda^\alpha H_1) = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda^\alpha H_2)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda^\alpha H_1) = -\frac{\partial}{\partial x}(\lambda^\alpha H_2)$$

erfüllt sind. Löst man nach $\frac{\partial\lambda}{\partial x}$ und $\frac{\partial\lambda}{\partial y}$ auf, so ergibt sich $(H_2 \neq 0)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial x} &= -\frac{1}{2\,\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\log(H_1^2+H_2^2)) - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{H_2^2}{H_1^2+H_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H_1}{H_2}\right)\\ \frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial\lambda}{\partial y} &= +\frac{1}{2\,\alpha}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\log(H_1^2+H_2^2)) - \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{H_2^2}{H_1^2+H_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H_1}{H_2}\right).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Dies System (2.1) zur Bestimmung von $\lambda(x, y)$ ist genau dann integrabel, wenn

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H_2^2}{H_1^2+H_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H_1}{H_2}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H_2^2}{H_1^2+H_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H_1}{H_2}\right)\right) = 0\tag{2.2}$$

ist.

Macht man den Ansatz

$$\begin{aligned}\frac{H_2^2}{H_1^2+H_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{H_1}{H_2} &= +\frac{\partial g}{\partial y}\\ \frac{H_2^2}{H_1^2+H_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{H_1}{H_2} &= -\frac{\partial g}{\partial x},\end{aligned}\tag{2.3}$$

so wird damit, falls (2.2) erfüllt ist, den Funktionen H_k (bei gegebenen f_i) eine Funktion $g(x, y)$ zugeordnet. Um sie aus (2.3) zu berechnen, sei $\lambda(x, y)$ die wegen (2.2) existierende Lösung von (2.1). Setzt man

$$\lambda(x\,,\,y)\cdot f_i(x\,,\,y) = \tilde{f}_i(x\,,\,y)$$

$$H_k[\tilde{f}_1\,,\ldots,\tilde{f}_n] = \tilde{H}_k\,,$$

so ist $\tilde{H}_1 + i\cdot\tilde{H}_2$ holomorph. Nach (2.1) ist somit $(\lambda = \text{const.})$

$$\begin{aligned}\frac{\tilde{H}_2^2}{\tilde{H}_1^2+\tilde{H}_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\frac{\tilde{H}_1}{\tilde{H}_2} &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(\log(\tilde{H}_1^2+\tilde{H}_2^2))\\ \frac{\tilde{H}_2^2}{\tilde{H}_1^2+\tilde{H}_2^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\frac{\tilde{H}_1}{\tilde{H}_2} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(\log(\tilde{H}_1^2+\tilde{H}_2^2)).\end{aligned}\tag{2.4}$$

Da andererseits die H_k in den f_i homogen sind, ist

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\tilde{H}_1}{\tilde{H}_2}, \qquad \frac{H_2^2}{H_1^2 + H_2^2} = \frac{\tilde{H}_2^2}{\tilde{H}_1^2 + \tilde{H}_2^2}$$

und somit nach (2.3) und (2.4)

$$g(x\,,\,y) = \text{const.} + \log \sqrt{\tilde{H}_1^2 + \tilde{H}_2^2}\,. \tag{2.5}$$

3. Differentialgleichung der verallgemeinerten Betragsfunktion

Damit man einen lokalen Parameter $\hat{z}$ so wählen kann, dass in diesem der Hauptteil A eines Differentialoperators die Form (1.2) hat, müssen die a_{ij} gewissen Relationen genügen. Diese lauten[3]):

a) Ist der Differentialoperator elliptisch oder nicht-ausgeartet hyperbolisch (d.h. ist $a_{11} + a_{22} \neq 0$), so müssen die a_{ij} zwei (und damit auch allen drei) der nachfolgenden Kriterien genügen:

Kriterium I:

$$(a_{11} + a_{22})^2 = c \cdot (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)\,, \qquad c = \text{const.},$$

und zwar $c > 4$ (elliptischer Fall) oder $c < 0$ (nicht-ausgeartet hyperbolischer Fall).

Kriterium II:

$$a_{12}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x}\right) = a_{11}\,\frac{\partial a_{22}}{\partial y} - a_{22}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial y}$$

$$a_{12}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial y} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y}\right) = a_{22}\,\frac{\partial a_{11}}{\partial x} - a_{11}\,\frac{\partial a_{22}}{\partial x}$$

Kriterium III:

$$\frac{1}{2}\,(a_{22} - a_{11})\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x}\right) + (a_{11} + a_{22})\,\frac{\partial a_{12}}{\partial y} - a_{12}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial y} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\,(a_{22} - a_{11})\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial y} + \frac{\partial a_{22}}{\partial y}\right) - (a_{11} + a_{22})\,\frac{\partial a_{12}}{\partial x} + a_{12}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x} + \frac{\partial a_{22}}{\partial x}\right) = 0\,.$$

b) Im Fall von parabolischen Differentialoperatoren müssen die beiden Kriterien II, III erfüllt sein. In diesem Fall tritt also die Bedingung

[3]) Diese Bedingungen sind für den Fall von elliptischen Differentialoperatoren in [4] hergeleitet. Für den Fall von parabolischen und hyperbolischen Differentialoperatoren erfolgt die Ableitung ganz analog.

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \equiv 0$ für parabolische Differentialoperatoren allein an die Stelle von Kriterium I.

c) Im Fall von ausgearteten hyperbolischen Differentialoperatoren [4]) ist ist $a_{11} + a_{22} \equiv 0$ (d.h. Kriterium I von a) ist mit $c = 0$ erfüllt). An Stelle der Kriterien II, III tritt hier

Kriterium II:*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(a_{11}^2 + a_{12}^2) = a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial x} - a_{11}\frac{\partial a_{12}}{\partial x}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial x}(a_{11}^2 + a_{12}^2) = a_{11}\frac{\partial a_{12}}{\partial y} - a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial y}.$$

Es sei noch bemerkt, dass der Grenzfall $c = 4$ in a) dem Laplaceoperator entspricht: $a_{11} \equiv a_{22}, a_{12} \equiv 0$.

Die in a), b) und c) formulierten Bedingungen drücken im wesentlichen aus, dass die folgende Funktion $H_1 + i \cdot H_2$ holomorph ist: Im Fall a) ist dabei

$$\begin{aligned} H_1^2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{|c|}}{|a_{11} + a_{22}|}\left[1 + \operatorname{sign.}(a_{11} + a_{22}) \cdot \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2}}\right] \\ H_2^2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{|c|}}{|a_{11} + a_{22}|}\left[1 - \operatorname{sign.}(a_{11} + a_{22}) \cdot \frac{a_{11} - a_{22}}{\sqrt{4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2}}\right], \end{aligned} \tag{3.1}$$

im Fall b)

$$H_1^2 = \frac{|a_{11}|}{(a_{11} + a_{22})^2} \qquad H_2^2 = \frac{|a_{22}|}{(a_{11} + a_{22})^2} \tag{3.2}$$

und im Fall c) schliesslich

$$H_1^2 = \frac{a_{11} + \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}{2(a_{11}^2 + a_{12}^2)} \qquad H_2^2 = \frac{-a_{11} + \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2}}{2(a_{11}^2 + a_{12}^2)} \tag{3.3}$$

[4]) Es ist stets $a_{11} + a_{22} \neq 0$ oder $a_{11} + a_{22} \equiv 0$. $a_{11} + a_{22}$ kann nur dann eine isolierte Nullstelle besitzen, falls die Parametertransformation $\hat{z} = \hat{z}(z)$ in dem betreffenden Punkt singulär ist (vergl. 4).

zu setzen. Vom Standpunkt der Betrachtungen 2 aus sind H_1 und H_2 Funktionen von a_{11}, a_{12}, a_{22}. Das Kriterium II (bzw. III, II*) entspricht somit den Gleichungen (2.4). Kriterium I stellt eine Kopplungsbedingung zwischen den a_{ij} dar. Die Funktionen $H_1 = H_1[a_{11}, a_{12}, a_{22}]$ und $H_2 = H_2[a_{11}, a_{12}, a_{22}]$ sind in den a_{ij} homogen von der Ordnung $\alpha = -\frac{1}{2}$.

Die Frage, wann der Hauptteil A eines Differentialoperators zweiter Ordnung durch konforme Abbildung auf die Form

$$\lambda \cdot c_{11}\,,\ \lambda \cdot c_{12}\,,\ \lambda \cdot c_{22}$$

($c_{ij} = \text{const.}$) gebracht werden kann, läuft dann auf die Frage hinaus, unter welchen Bedingungen ein $\lambda(x, y)$ existiert, so dass

$$H_1[\lambda a_{11}\,, \lambda a_{12}\,, \lambda a_{22}] + i \cdot H_2[\lambda a_{11}\,, \lambda a_{12}\,, \lambda a_{22}]$$

holomorph ist.

Als Integrabilitätsbedingung ergibt sich nach den Betrachtungen 2 die Gleichung (2.2). Diese hat (entsprechend den Kriterien II, III) die Form

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{(1+Q)\sqrt{F(Q)}}\cdot\frac{\partial Q}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{(1+Q)\sqrt{F(Q)}}\cdot\frac{\partial Q}{\partial y}\right) = 0 \quad (F(Q) > 0) \tag{3.4}$$

bzw.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{F}(\hat{Q})}}\cdot\frac{\partial \hat{Q}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{F}(\hat{Q})}}\cdot\frac{\partial \hat{Q}}{\partial y}\right) = 0 \qquad (\hat{F}(\hat{Q}) > 0)\,. \tag{3.5}$$

Dabei ist[5])

$$Q(x\,, y) = \frac{a_{11}(x\,, y)}{a_{22}(x\,, y)}, \quad \sqrt{F(Q)} = \frac{a_{12}(x\,, y)}{a_{22}(x\,, y)},$$

$$\hat{Q}(x\,, y) = \frac{a_{12}(x\,, y)}{a_{11}(x\,, y) + a_{22}(x\,, y)}, \quad \sqrt{\hat{F}(\hat{Q})} = -\frac{a_{11}(x\,, y) - a_{22}(x\,, y)}{a_{11}(x\,, y) + a_{22}(x\,, y)}$$

und (Kriterium I)

$$\begin{aligned} F(Q) &= Q - \frac{1}{c}\cdot(1+Q)^2\,, \quad F(Q) \geq 0 \\ \hat{F}(\hat{Q}) &= \frac{c-4}{c} - 4\cdot\hat{Q}^2\,, \qquad \hat{F}(\hat{Q}) \geq 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

---

[5]) Im elliptischen Fall ist stets $a_{22} \neq 0$. Sollte im parabolischen oder nicht-ausgeartet hyperbolischen Fall $a_{22} = 0$ sein in gewissen Punkten, so ist dort $a_{11} \neq 0$. Man erhält dann für $Q = \frac{a_{22}}{a_{11}}$, $\sqrt{F(Q)} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$ wieder die Gleichung (3.4). $a_{11} + a_{22}$ ist in den genannten Fällen stets $\neq 0$.

mit $c > 4$ im elliptischen und $c < 0$ im nicht-ausgeartet hyperbolischen Fall; im Falle parabolischer Differentialoperatoren lautet (3.6) einfach $(c = \infty)$

$$F(Q) = Q$$
$$\hat{F}(\hat{Q}) = 1 - 4\hat{Q}^2 .$$

Da sich die Gleichungen $a_{12} = 0$ und $a_{11} - a_{22} = 0$ gegenseitig ausschliessen, ist entweder $F(Q) > 0$ oder $\hat{F}(\hat{Q}) > 0$.

Im ausgearteten hyperbolischen Fall $(a_{11} + a_{22} \equiv 0)$ setze man

$$\tilde{Q}(x, y) = \frac{a_{11}(x, y)}{a_{12}(x, y)} \text{ bzw.}^{6)} = \frac{a_{12}(x, y)}{a_{11}(x, y)} .$$

Man erhält dann (entsprechend Kriterium II*) die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{1+\tilde{Q}^2} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{1+\tilde{Q}^2} \cdot \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial y}\right) = 0 . \tag{3.7}$$

Die Gleichungen (3.4), (3.5) und (3.7) haben die Form

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(k) \cdot \frac{\partial k}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\psi(k) \cdot \frac{\partial k}{\partial y}\right) = 0 , \tag{3.8}$$

sie sind also Verallgemeinerungen der Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial k}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{k} \cdot \frac{\partial k}{\partial y}\right) = 0 ,$$

denen die Betragsfunktion $k = |f(z)|$ einer holomorphen Funktion $f(z)$ genügt.

Anstelle von (2.3) erhält man spezieller

$$\psi(k) \cdot \frac{\partial k}{\partial x} = + \frac{\partial g}{\partial y}$$
$$\psi(k) \cdot \frac{\partial k}{\partial y} = - \frac{\partial g}{\partial x}$$

und ersieht hieraus, dass die Funktion $g(x, y)$ sogar harmonisch ist [7].

---

[6] Man vergleiche Fussnote [5]; es ist stets $a_{11}^2 + a_{12}^2 > 0$, da nur bei Vorliegen einer Singularität (vergl. 4) alle Koeffizienten gleichzeitig verschwinden können.

[7] Im Falle $\psi(k) = \frac{1}{k}$ ist $k(x, y) \cdot e^{ig(x,y)}$ holomorph. Für (3.4), (3.5) bzw. (3.7) ist zu setzen:

$$\psi(k) = \frac{1}{(1+k)\sqrt{F(k)}} , \quad \psi(k) = \frac{2}{\sqrt{\hat{F}(k)}} \quad \text{bzw.} \quad \psi(k) = -\frac{1}{1+k^2} .$$

Bestimmt man $\lambda(x, y)$ so, dass $\tilde{a}_{ij} = \lambda \cdot a_{ij}$ den Kriterien II, III bzw. II* genügen, so folgt aus (2.5) unter Berücksichtigung von (3.1), (3.2), (3.3)

$$g(x\,,\,y) = \text{const.} - \log \sqrt{|\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22}|} \tag{3.9}$$

im Fall a) und b), bzw.

$$g(x\,,\,y) = \text{const.} - \log \sqrt[4]{\tilde{a}_{11}^2 + \tilde{a}_{12}^2} \tag{3.10}$$

im Fall c).

Diese harmonische Funktion $g(x, y)$ wird also im Sinne von (2.3) den Funktionen $Q = \dfrac{a_{11}}{a_{22}}$ und $\hat{Q} = \dfrac{a_{12}}{a_{11} + a_{22}}$ $\left(\text{bzw. } \tilde{Q} = \dfrac{a_{11}}{a_{12}}\right)$, die Lösungen von Gleichungen vom Typ (3.8) sind, zugeordnet. Aus (1.3) kann man nachrechnen, dass die Funktion $g(x, y)$ (3.9) bzw. (3.10) mit der in Abschnitt 1 eingeführten Funktion identisch ist. Insbesondere genügt also die Funktion $Q(x, y)$ (1.4) der Gleichung (3.4) und die Funktion $\tilde{Q}(x, y)$ (1.5) der Gleichung (3.5), $c = \dfrac{(c_1 + c_2)^2}{c_1 c_2}$ im elliptischen und hyperbolischen Fall.

Und die Funktion

$$\tilde{Q} = \frac{\cos^2 g^* - \sin^2 g^*}{2 \cdot \cos g^* \cdot \sin g^*} = \operatorname{ctg}(2\, g^*)$$

im ausgearteten hyperbolischen Fall genügt der Gleichung (3.7). Aus der Bedingung 2° von 1 ersieht man übrigens, wie sich $Q(x, y)$ und $\hat{Q}(x, y)$ bzw. $\tilde{Q}(x, y)$ bei Parameterwechsel transformieren.

4. Differentialoperatoren mit isolierten Singularitäten

U sei Umgebung von P (Parameter $z = 0$), $U^* = U - \{P\}$. Ist $g(x, y)$ die Funktion (3.9) bzw. (3.10), so sei $g(x, y)$ nur in U^* als überall reguläre Funktion vorausgesetzt. Soll sich $g(x, y)$ jedoch in ganz U bestimmt verhalten, so muss $g(x, y)$ in P einen logarithmischen Pol besitzen. Ist γ_0 die geschlossene Kurve $|z| = r_0$ (r_0 hinreichend klein), so muss nach Bedingung 2° von 1 für die konjugierte Funktion g^* gelten:

$$\pi_{\gamma_0}[g^*] \equiv 0 \pmod{\pi}\,.$$

Danach folgt für $g(x, y)$:

$$g(x\,,\,y) = \frac{n}{2} \cdot \log|z| + \bar{g}(x\,,\,y)\,, \tag{4.1}$$

n ganz, $\overline{g}(x, y)$ regulär in ganz U, und für $G(z)$:

$$G(z) = (\sqrt{z})^n \cdot \bar{G}(z) ,$$

$\bar{G}(z)$ holomorph in ganz U, $\bar{G}(0) \neq 0$.

R sei zunächst eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht p. Ist $\varphi_1(z)$ ein Abelsches Differential, so ist

$$N_0 - N_\infty = 2(p-1) ,$$

wobei N_0 bzw. N_∞ die Anzahl der Nullstellen bzw. der Polstellen des Differentials sind. Setzt man

$$\log \varphi_1(z) = g_1 + i \cdot g_1^* ,$$

so genügt g_1^* den Bedingungen 1°, 2°, 3° aus 1. Ist g^* irgend eine Grösse, die den Bedingungen 1°, 2°, 3° genügt und für die $g(x, y)$ in isolierten Punkten P_k $(k = 1, \ldots, n)$ Singularitäten der Form (4.1) besitzen darf, so ist

$$(g - g_1) + i \cdot (g^* - g_1^*)$$

ein Abelsches Integral. Nach dem Residuensatz ist

$$\frac{1}{2} \cdot \sum_1^n n_k - (N_0 - N_\infty) = 0 ,$$

also

$$\sum_1^n n_k = 4(p-1) .$$

Ist $\vartheta = \prod_{k=1}^{n} P_k^{n_k}$ ein vorgegebener Divisor, so gibt es, falls dessen Grad $4(p-1)$ ist, ein Abelsches Integral $g_2 + i \cdot g_2^*$, so dass

$$(g_1 + g_2) + i \cdot (g_1^* + g_2^*)$$

genau in P_k einen logarithmischen Pol mit dem Residuum $\frac{1}{2} \cdot n_k$ (vergl. (4.1)) besitzt. Bilden die $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2p}$ eine Homologiebasis von R, so gibt es eine bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte, überall reguläre, additive harmonische Funktion g_3^*, so dass $g_1^* + g_2^* + g_3^*$ längs allen γ_j vorgeschriebene Perioden $\mu_j \cdot \pi$ besitzt, μ_j ganz $(j = 1, \ldots, 2p)$. $g_1^* + g_2^* + g_3^*$ genügt somit den Bedingungen 1°, 2°, 3°.

Insgesamt ergibt sich:

Abgesehen von einer additiven Konstanten wird jedes g^*, das den Bedingungen 1°, 2° und 3° genügt und in isolierten Punkten Singularitäten der oben beschriebenen Art besitzen darf, durch folgende Angaben eindeutig charakterisiert:

a) durch einen Divisor vom Grad $4(p-1)$

b) durch einen $2p$-dimensionalen Vektor $\{\mu_1, \ldots, \mu_{2p}\}$, μ_i ganz. Dadurch (man vergl. Formel (1.3)) erhält man auch eine Übersicht über alle Differentialoperatoren zweiter Ordnung [8]), deren Hauptteile sich durch geeignete Wahl der lokalen Parameter in konstante Form überführen lassen:

$|\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{22}|$ bzw. $\sqrt{\tilde{a}_{11} + \tilde{a}_{12}}$ hat in der Umgebung von P_k $(z_k = 0)$ die Form

$$\frac{1}{|z|^{n_k}} \cdot h(|z_k|)\,,$$

wobei $h(0) \neq 0$ ist und $h(|z_k|)$ für $|z_k| \to 0$ beschränkt bleibt. Durch verschiedene Wahl von $\{\mu_1, \ldots, \mu_{2p}\}$ kann man die multiplikativen Perioden der $\tilde{a}_{11}, \tilde{a}_{12}, \tilde{a}_{22}$ längs der $\gamma_j\,(j = 1, \ldots, 2p)$ abändern.

Da der Grad des Divisors ϑ gleich $4(p-1)$ sein muss, gibt es bei kompakten Riemannschen Flächen nur im Fall $p = 1$ (Torus) ein singularitätenfreies $g^*(x, y)$. Ist dagegen R offen, so gibt es auf R (vergl. [1]) eine nicht konstante holomorphe Funktion, also auch ein nicht identisch verschwindendes Differential erster Gattung. Da es nach dem Weierstrassschen Produktsatz eine holomorphe Funktion gibt, die in vorgegebenen Punkten Nullstellen vorgegebener Ordnung besitzt, gibt es auf R auch ein überall von null verschiedenes Differential φ_0 erster Gattung. Setzt man

$$\log \varphi_0 = g_0 + i \cdot g_0^*\,,$$

so ist g_0^* eine Grösse, die den Bedingungen 1°, 2°, 3° aus 1 genügt und die singularitätenfrei ist. Ist dann $g_1 + i \cdot g_1^*$ ein Abelsches Integral, das nur logarithmische Pole mit Residuen der Form $\frac{n}{2}$, n ganz, besitzen darf und für das $\pi_\gamma[g_1^*] \equiv 0 \pmod{\pi}$ gilt (für alle Rückkehrschnitte γ), so erhält man durch

$$g_0^* + g_1^*$$

eine weitere zulässige Grösse, die die Bedingungen 1°, 2°, 3° erfüllt, und die genau dann singularitätenfrei ist, falls $g_1 + i \cdot g_1^*$ von erster Gattung ist.

Eine besondere Klasse $(\mathfrak{K}^*)$ von Differentialoperatoren erhält man, wenn g^* ausser 1°, 2°, 3° den folgenden Bedingungen genügt:

4°. $g^*(x, y)$ ist regulär ausser in den Punkten einer abzählbaren Menge M, die auf R keine Häufungspunkte besitzt. In den Punkten P $(z = 0)$ von M hat $g + i \cdot g^*$ die Form

---

8) Ändert man g^* um eine additiv hinzutretende Konstante c_0 ab, so erhält man dabei andere a_{ij}, falls nicht $c_0 \equiv 0 \pmod{\pi}$ ist.

$$g + i \cdot g^* = n \cdot \log z + \bar{f}(z)\,,$$

n ganz, $\bar{f}(z)$ holomorph.

5°. In den Punkten von M ist

$$\operatorname*{Res}_{P}\,(z^n \cdot e^{\bar{f}(z)}) = 0\,.$$

Die Bedingungen 4° und 5° garantieren, dass eine Umgebung von P durch $G(z)$ auf ein volles Windungsflächenelement abgebildet wird (man vergl. dazu [4] 9). Bedingung 5° ist für positives n trivial. Für elliptische Operatoren der Klasse ($\mathfrak{K}^*$) wurden, speziell für gewisse berandete Riemannsche Flächen, in [5] additive Lösungsfunktionen (mit stetig differenzierbaren periodischen Randwerten auf den Randkurven) betrachtet.

Literatur

[1] BEHNKE, H., u. SOMMER, F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen. - Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.

[2] NEVANLINNA, R.: Uniformisierung. - Berlin-Göttingen-Heidelberg 1953.

[3] WEYL, H.: Die Idee der Riemannschen Fläche. - Stuttgart 1955.

[4] TUTSCHKE, W.: Bemerkungen über das Verhalten von elliptischen Differentialoperatoren zweiter Ordnung bei konformer Abbildung. - Math. Nachr. Bd. 22, 204—224 (1960).

[5] —»— Potentialfunktionen und verwandte Funktionen auf berandeten Riemannschen Flächen. - Math. Nachr. Bd. 22, 323—364 (1960).

Gedruckt Februar 1962