

Series A

I. MATHEMATICA

308

ÜBER DIE ANALYTISCHEN  
LÖSUNGEN DER GLEICHUNG  
 $f(R(z)) = f(z)$  BEI RATIONALEM  $R(z)$

VON

P. J. MYRBERG

---

HELSINKI 1962  
SUOMALAINEN TIEDEAKATEMIA

Vorgelegt am 9. April 1962.

KESKUSKIRJAPAINO  
HELSINKI 1962

## 1. Einleitung.

Die analytischen Lösungen der Funktionalgleichung

$$(1,1) \quad f(R(z)) = f(z)$$

können als automorphe Funktionen angesehen werden, deren Gruppe durch die rationale Funktion  $R(z)$  erzeugt wird.

Die einfachsten Beispiele von solchen Funktionen bekommt man, wenn als  $R(z)$  eine lineare Funktion

$$(1,2) \quad z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

gewählt wird. Wir denken uns die Substitution (1,2) in bekannter Weise auf die einfache Form

$$z' = z + \omega$$

oder

$$z' = kz$$

transformiert, je nachdem ob die beiden Fixpunkte der Abbildung (1,2) zusammenfallen oder voneinander verschieden sind. Die zugehörigen automorphen reduzieren sich im ersten Falle auf die periodischen Funktionen von  $z$  mit der Periode  $\omega$ , im zweiten Falle auf die doppelperiodischen Funktionen von  $\log z$  mit den Perioden  $2\pi i$  und  $\log k$ , wenn  $|k| \neq 1$ . In den genannten speziellen Fällen sind die automorphen Funktionen eindeutig, und sie haben die Fixpunkte der Abbildung als wesentlich singuläre Stellen. Im allgemeinen, nichtlinearen Falle, wo die Abbildung

$$(1,3) \quad z' = R(z)$$

nicht mehr umkehrbar eindeutig ist, hat man auch die vieldeutigen analytischen Lösungen der Gleichung (1,1) zu berücksichtigen, wobei diese Gleichung nur unter geeigneter Wahl der Zweige der Funktion  $f(z)$  bestehen kann. Die Untersuchung von solchen Funktionen gründet sich auf die Theorie der Iteration der rationalen Funktionen, die in ihren allgemeinen Zügen von JULIA und FATOU entwickelt worden ist.

Eine wichtige Rolle spielen hier die Fixpunkte der Abbildung, also die Wurzeln der Gleichung

$$(1,4) \quad R(z) = z.$$

Es sei  $q$  ein solcher Fixpunkt und  $k = R'(q)$  der zugehörige Multiplikator. Man nennt den Punkt  $q$  attraktiv, wenn  $|k| < 1$ , repulsiv, wenn  $|k| > 1$  und indifferent, wenn  $|k| = 1$ , wegen der geometrischen Eigenschaften der Abbildung in der Umgebung des Fixpunktes, wenn dieselbe unbegrenzt iteriert wird.

Indem wir im folgenden den dritten, speziellen Fall beiseite lassen, soll die Existenz von Lösungen der Gleichung (1,1) gezeigt werden, welche in einem gegebenen Fixpunkt ein bestimmtes Verhalten aufweisen.

## 2. Die attraktiven Fixpunkte mit einem nichtverschwindenden Multiplikator.

Nach der allgemeinen Theorie gibt es für jeden attraktiven Fixpunkt  $q$  ein den Punkt enthaltendes offenes Gebiet  $D_q$ , dessen Punkte bei der Iteration von  $R(z)$  gegen  $q$  konvergieren.

Das Gebiet  $D_q$ , das entweder einfach oder unendlich vielfach zusammenhängend ist, bildet das unmittelbare Konvergenzgebiet von  $q$ . Die Menge aller Punkte der komplexen  $z$ -Ebene, deren durch die Iteration von  $R(z)$  erhaltene Bildpunkte gegen  $q$  konvergieren, besteht entweder aus  $D_q$  oder aus einer unendlichen Menge  $M(D_q)$  von getrennt voneinander liegenden Gebieten, nämlich aus denjenigen, welche aus  $D_q$  durch Wiederholung der zu  $R(z)$  inversen irrationalen Operation  $R_{-1}(z)$  erhalten werden.

Nach diesen Vorbemerkungen gehen wir von der Schröderschen Funktionalgleichung

$$(2,1) \quad \psi(R(z)) = k\psi(z)$$

aus, wo  $k = R'(q) \neq 0$ , und wir bilden mit KOENIGS den Ausdruck

$$(2,2) \quad \psi(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_n(z) - q}{k^n},$$

wo  $R_n(z)$  die  $n$ -te Iterierte von  $R(z)$  bezeichnet. Man kann zeigen, dass der Ausdruck (2,2) in jedem zu  $D_q$  gehörigen abgeschlossenen Bereich gleichmäßig konvergent ist und somit eine dort reguläre analytische Funktion definiert, die offenbar der Gleichung (2,1) genügt [1, s. 222].

Wir betrachten zuerst den einfachen Fall, wo  $M(D_q)$  aus  $D_q$  allein besteht. Die dort definierte analytische Funktion hat dann eine Nullstelle im Punkte  $q$  und in den aus  $q$  vermittels der Iteration von  $R_{-1}(z)$  er-

haltenen Bildpunkten. Weil diese Punkte nach Fatou die Gesamtheit der Punkte des Randes  $C$  von  $D_q$  als Häufungsstellen haben, kann die Funktion (2,2) über den Rand hinaus nicht analytisch fortgesetzt werden. Ihr Existenzbereich besteht somit aus  $D_q$ .

Wir bilden jetzt die elliptische Funktion

$$(2,3) \quad E(t; 2\pi i, \log k)$$

von  $t$  mit den Perioden  $2\pi i$  und  $\log k$ . Die zusammengesetzte Funktion

$$(2,4) \quad f(z) = E(\log \psi(z); 2\pi i, \log k)$$

ist dann eine in  $D_q$  eindeutige, der Gleichung (1,1) genügende analytische Funktion, die in den aus dem Punkt  $q$  durch Iteration von  $R_{-1}(z)$  erhaltenen Bildpunkten wesentlich singular ist. Sie kann über den Rand  $C$  von  $D_q$  hinaus nicht analytisch fortgesetzt werden. In der Tat sind alle Punkte von  $C$  Häufungspunkte für die genannten wesentlich singulären Punkte.

In dem allgemeinen Falle, wo  $M(D_q)$  aus unendlich vielen, voneinander getrennt liegenden Gebieten besteht, definiert der Ausdruck (2,4), der bezüglich der Transformation (1,3) formal invariant bleibt, gleichzeitig unendlich viele verschiedene analytische Funktionen, welche das zugehörige Gebiet als Existenzgebiet haben, über dessen Rand hinaus sie nicht analytisch fortsetzbar sind.

Die obigen Lösungen von (1,1) sind von Fatou eingeführt worden. Sie haben, wie schon gesagt, die ausgezeichnete Eigenschaft, in ihrem Existenzgebiet eindeutig zu sein.

### 3. Die attraktiven Fixpunkte mit einem verschwindenden Multiplikator.

Es sei jetzt  $q_0$  ein Fixpunkt von (1,3), dessen Multiplikator verschwindet, also  $R'(q_0) = 0$ . In diesem Falle, wo der Fixpunkt  $q_0$  stark attraktiv ist, können keine eindeutigen Lösungen obiger Art existieren.

Um dies einzusehen, betrachten wir zuerst das spezielle Beispiel

$$(3,1) \quad R(z) = z^p.$$

Hier ist der Nullpunkt  $z = 0$  ein stark attraktiver Fixpunkt, wenn  $p$  eine ganze Zahl  $> 1$  ist.

Aus der Gleichung

$$(3,2) \quad f(z^p) = f(z)$$

erhält man durch die Substitution  $z = e^t$  für die Funktion  $F(t) = f(e^t)$  die Gleichungen

$$(3,3) \quad F(t + 2\pi i) = F(t), F(pt) = F(t).$$

Aus ihnen geht hervor, dass  $F(t)$  und somit auch  $f(z)$  nicht eindeutig sein kann. Denn mit  $2\pi i$  hätte  $F(t)$  auch die Perioden  $\frac{2\pi i}{p^n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), welche für  $n \rightarrow \infty$  gegen Null konvergieren. Eine analytische Funktion mit infinitesimalen Perioden reduziert sich aber auf eine Konstante.

Aus der zweiten Gleichung (3,3) allein folgt für die Funktion  $F(t)$  der Ausdruck

$$F(t) = E(\log t; 2\pi i, \log p),$$

wo  $E$  wieder eine elliptische Funktion bezeichnet. Hieraus folgt für die Funktion  $f(z)$  der Ausdruck

$$(3,4) \quad f(z) = E(\log \log z; 2\pi i, \log p)$$

als eine elliptische Funktion von  $\log \log z$ .

Die Funktion (3,4) ist eine unendlich vieldeutige Funktion, deren verschiedene Zweige in der Form

$$(3,5) \quad f(z) = E(\overline{\log z} + n \cdot 2\pi i)$$

darstellbar sind, wo  $\overline{\log z}$  den Hauptzweig des Logarithmus bezeichnet. Die zu (3,4) gehörige unendlich vielblättrige Riemannsche Fläche hat logarithmische Verzweigungspunkte in den über  $z = 0$  und  $z = \infty$  liegenden Punkten, und ihre Zweige werden beim Umkreis um einen Verzweigungspunkt gemäss der Formel

$$f_n(z) \rightarrow f_{n+1}(z)$$

miteinander permutiert.

Wir bemerken ferner, dass im Punkte  $z = 1$  der Hauptzweig  $f_0(z)$  eine wesentlich singuläre Stelle hat, in deren Umgebung die Funktion eindeutig ist. Zur Bestimmung der Pole von  $f(z)$  gehen wir von einem im fundamentalen Parallelogramm liegenden Pol  $t_0$  von  $E(t)$  aus. Aus

$$\log \log z = t_0 + m \cdot \log p + n \cdot 2\pi i$$

erhält man für die zugehörigen Werte von  $z$  den Ausdruck

$$z_m = z_0^{p^m},$$

wo  $z_0 = e^{e^p}$  den zu  $m = 0$  entsprechenden Wert bezeichnet. Hieraus folgt

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} z_m = 0, \quad \lim_{m \rightarrow -\infty} z_m = 1 \quad \text{für } |z_0| < 1;$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} z_m = \infty, \quad \lim_{m \rightarrow -\infty} z_m = 1 \quad \text{für } |z_0| > 1.$$

In diesen Fällen sind somit die Punkte  $z = 0, 1, \infty$  die einzigen Häufungspunkte der Pole von  $f(z)$ . Im Falle  $|z_0| = 1$  ist  $|z_n| = 1$  für jedes  $m$ , und die Spurpunkte der Pole in der  $z$ -Ebene sind im allgemeinen auf der Kreislinie  $|z| = 1$  überall dicht gelegen.

Wie aus dem Obigen hervorgeht, besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den Fällen  $k \neq 0$  und  $k = 0$ . Im letzteren Falle gibt es keine eindeutigen Lösungen der Gleichung (1,1), demgegenüber lässt sich die Funktion  $f(z)$  auf ihrer über die ganze  $z$ -Ebene verbreiteten Riemannschen Fläche analytisch fortsetzen.

Wir behaupten jetzt, dass der allgemeine Fall auf den obigen speziellen Fall zurückgeführt werden kann.

Es sei nämlich

$$R(z) = z^p + \dots$$

die Entwicklung von  $R(z)$  im betreffenden Fixpunkt, wo wir  $g_0 = 0$  gewählt haben, was stets zulässig ist. Wir bilden nun die Funktionalgleichung

$$(3,6) \quad \psi(R(z)) = \psi^p(z).$$

Sie besitzt nach BÖTTCHER stets eine in der Umgebung des Nullpunktes reguläre Lösung [1, s. 28]. Ist nun  $F(t)$  eine Lösung der Gleichung (3,2), so gibt die zusammengesetzte Funktion

$$(3,7) \quad f(z) = F(\psi(z))$$

eine Lösung von (1,1). Denn es gilt

$$f(R(z)) = F(\psi(R(z))) = F(\psi^p(z)) = F(\psi(z)) = f(z).$$

Als Beispiel wählen wir  $R(z) = z^2 - 2$ . Jetzt ist der Punkt  $z = \infty$  ein stark attraktiver Fixpunkt.

Die Böttchersche Gleichung lautet hier

$$\psi(z^2 - 2) = \psi^2(z).$$

Wir setzen zu ihrer Auflösung

$$z = 2 \cos t, \quad \psi(z) = g(t)$$

und bekommen zur Bestimmung der Funktion  $g(t)$  die Gleichung

$$g(2t) = g^2(t),$$

woraus

$$g(t) = e^t = e^{\operatorname{arc} \cos \frac{z}{2}} = \psi(z)$$

erhalten wird. Die gesuchte Lösung von (1,1) ist also

$$(3,8) \quad f(z) = E \left( \log \operatorname{arc} \cos \frac{z}{2}; 2\pi i, \log 2 \right).$$

Für  $z \rightarrow \infty$  gilt hier asymptotisch

$$f(z) = E(\log \log z).$$

#### 4. Die repulsiven Fixpunkte.

Es sei jetzt  $q$  ein repulsiver Fixpunkt von (1,3) und also

$$|k| = |R'(q)| > 1.$$

Wir gehen im vorliegenden Falle von der Funktionalgleichung

$$(4,1) \quad \varphi(kt) = R(\varphi(t))$$

aus, welche nach POINCARÉ eine bis auf die Transformation  $ct$  bestimmte, in der ganzen Ebene meromorphe Funktion als Lösung besitzt. Es sei  $t = h(z)$  die im allgemeinen unendlich vieldeutige inverse Funktion von  $z = \varphi(t)$ . Weil dies der Funktionalgleichung

$$(4,2) \quad h(R(z)) = kh(z)$$

genügt, so ist die vermittels der elliptischen Funktion (2,3) gebildete zusammengesetzte Funktion

$$(4,3) \quad f(z) = E(\log h(z); 2\pi i, \log k)$$

eine im allgemeinen unendlich vieldeutige Funktion von  $z$ .

Zur genaueren Untersuchung der singulären Punkte von  $h(z)$  nehmen wir der Einfachheit halber an, dass die rationale Funktion  $R(z)$  sich auf ein Polynom  $P(z)$  reduziert, in welchem Falle  $z = \varphi(t)$  eine ganze Funktion von  $t$  ist. Aus

$$\varphi(kt) = P(\varphi(t))$$

ergibt sich durch Differentiation

$$k\varphi'(kt) = P'(z)\varphi'(t),$$

woraus hervorgeht, dass mit  $t_0$  zugleich alle Punkte

$$k^n t_0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Nullstellen der Ableitung  $\varphi'(t)$  sind. Wir können hier annehmen, dass  $\varphi'\left(\frac{t_0}{k}\right) \neq 0$ , woraus folgt, dass

$$P'(z) = 0 \quad \text{für } z = \varphi(t_0).$$

Nun sind die Punkte

$$z_n = \varphi(k^n z_0) = P_n(z_0)$$

diejenigen Punkte der  $z$ -Ebene, über welche die inverse Funktion  $t = h(z)$  algebraische Verzweigungspunkte besitzt. Aus dem Obigen geht hervor, dass die Gesamtheit solcher Punkte aus  $P_n(z_0)$  erhalten werden kann, wo



$z_v$ , sämtliche Nullstellen des Polynoms  $P'(z)$  zu durchlaufen hat und wo  $P_n(z_v)$  die Gesamtheit der aus den Punkten  $z_v$  durch die Iteration des Polynoms  $P(z)$  erhaltenen Bildpunkte bezeichnet.

Wann gibt es keine solchen Verzweigungspunkte? Offenbar dann, wenn  $P'(z)$  eine einzige Nullstelle hat und diese Nullstelle zugleich ein Picard-scher Ausnahmewert von  $\varphi(t)$  ist. Man findet leicht, dass dies nur dann stattfindet, wenn nach einer einfachen Transformation  $\psi(z) = \log z$  ist.

Als erstes Beispiel wählen wir wieder  $R(z) = z^p$ . In diesem Falle sind die Punkte

$$q_m = e^{\frac{2\pi im}{p-1}}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots, p-2)$$

repulsive Fixpunkte der Abbildung.

Im Punkte  $q_0 = 1$  ist  $k = p$ , und die Poincarésche Gleichung (4,1) lautet

$$\varphi(pt) = \varphi^p(t).$$

Aus ihrer Lösung  $\varphi(t) = e^t$  ergibt sich der Ausdruck

$$f(z) = E(\log \log z; 2\pi i, \log p)$$

für die entsprechende Lösung von (1,1), die also mit (3,4) identisch ist.

Allgemein für den Fixpunkt  $q_m$  ist  $\varphi(t) = q_m e^{pt}$ , also

$$f(z) = E\left(\log\left(\log\frac{z}{q_m}\right); 2\pi i, \log k\right).$$

Es sei zweitens  $R(z) = z^2 - 2$ . Die zugeordnete Abbildung hat jetzt die repulsiven Fixpunkte  $q_1 = 2, q_2 = -1$  mit den Multiplikatoren  $k_1 = 4$  und  $k_2 = -2$ .

Die zugehörigen Poincaréschen Gleichungen lauten jetzt

$$\varphi(4t) = \varphi^2(t) - 2; \quad \varphi(-2t) = \varphi^2(t) - 2,$$

und sie haben als Lösungen

$$\varphi(t) = 2 \cos \sqrt{t}, \quad \varphi(t) = 2 \cos\left(t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

Hieraus folgt für  $q = 2$

$$f(z) = E\left(2 \log \arccos \frac{z}{2}; 2\pi i, \log 4\right)$$

und für  $q = -1$

$$f(z) = E \left( \log \left( \arccos \frac{z}{2} - \frac{2\pi}{3} \right); 2\pi i, \log(-2) \right)$$

Die beiden Funktionen gehören zur Kategorie (3,8).

Um ein allgemeineres Beispiel zu geben, betrachten wir den Fall

$$P(z) = z^2 + p,$$

wo  $p$  ein reeller Parameter ist. Weil  $z = 0$  die einzige Nullstelle von  $P'(z) = 2z$  ist, sind nach dem Obigen, für  $p \neq 0$ , sämtliche algebraischen Verzweigungspunkte von  $h(z)$  und  $f(z)$  über den Punkten

$$(4,5) \quad z = p, \quad p_1 = p^2 + p, \quad p_2 = p_1^2 + p, \dots$$

gelegen. Hier hat man nun zwischen den folgenden Fällen zu unterscheiden [3 — 7].

1. Fall  $p > \frac{1}{4}$ . Jetzt bilden die Punkte (4,5) eine monoton wachsende Folge mit dem Grenzpunkt

$$(4,6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \infty.$$

2. Fall  $p \leq -2$ . Auch jetzt gilt (4,6) ausser für  $p = -2$ , wo  $p_v = 2$ .

3. Fall  $-2 < p < \frac{1}{4}$ . Jetzt sind alle Punkte (4,5) im Intervall

$$(4,7) \quad -q_1 < z < q_1, \quad ; \quad q_1 = \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - p}$$

gelegen. Man hat hier zwischen folgenden zwei Unterfällen zu unterscheiden.

a)  $p$  ist ein regulärer Wert des Parameters  $p$ , d.h. es gibt bei der zugehörigen Abbildung  $z_1 = z^2 + p$  einen attraktiven Zyklus  $\Sigma$  von Punkten des Intervalles (4,7). Dann haben die Spurpunkte der algebraischen Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche von  $f(z)$  in der  $z$ -Ebene endlich viele Häufungspunkte, nämlich die Punkte von  $\Sigma$ .

b)  $p$  ist ein singulärer Wert von  $p$ . Dann ist die Anzahl der im Intervall (4,7) liegenden Häufungspunkte unendlich.

Wir bemerken noch, dass für alle Zweige von  $f(z)$  sämtliche über einen Nullpunkt von  $h(z)$  liegenden Punkte der zu  $f(z)$  gehörigen Riemannschen Fläche isolierte wesentliche Singularitäten von  $f(z)$  sind, in deren Umgebung diese Funktion eindeutig ist.

### 5. Über vieldeutige Funktionen, deren Zweige voneinander rational abhängen.

Jede der Gleichung (1,1) genügende Funktion  $u = f(z)$  hat als inverse Funktion eine im allgemeinen unendlich vieldeutige Funktion  $z = g(u)$ , zwischen deren geeignet gewählten Zweigen  $g(u)$  und  $g^*(u)$  die rationale Relation

$$(5,1) \quad g^*(u) = R(g(u))$$

besteht. Unsere Funktionen geben also Beispiele von vieldeutigen transzendenten Funktionen, deren Zweige voneinander rational abhängen.

Insbesondere ergibt sich aus (4,3) für die entsprechende inverse Funktion der Ausdruck

$$(5,2) \quad g(u) = \varphi(e^{I(u)}),$$

wo  $\varphi(t)$  eine meromorphe, der Gleichung (4,1) genügende Funktion bezeichnet und wo  $I(u)$  ein elliptisches Integral mit den Perioden  $2\pi i$  und  $\log k$  ist.

Zum Beispiel bekommt man für  $R(z) = z^p$  die Funktion

$$g(u) = e^{e^{I(u)}}$$

mit der entsprechenden Gleichung

$$g^*(u) = g^p(u)$$

und für  $R(z) = z^2 - 2$ ,  $q = 2$  die Funktion

$$g(u) = 2 \cos e^{I(u)}$$

mit der Gleichung

$$g^*(u) = g^2(u) - 2.$$

Funktionen ganz anderer Art bekommt man durch Inversion der durch (2,4) definierten Funktion.

### Literatur.

1. FATOU, P.: Sur les équations fonctionnelles - Bull. Soc. math. de France 47 (1919) et 48 (1920).
  2. JULIA, G.: Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles - J. math. et appl. (8). 1. (1918).
  3. MYRBERG, P. J.: Eine Verallgemeinerung des arithmetisch-geometrischen Mittels - Ann. Acad. Sci. Fennicæ, A. I. Mathematica 253 (1958).
  4. —»— Iteration der reellen Polynome zweiten Grades - Ibidem 256 (1958).
  5. —»— Iteration von Quadratwurzeloperationen - Ibidem 259 (1958).
  6. —»— Iteration der reellen Polynome zweiten Grades II. - Ibidem 268 (1959).
  7. —»— Inversion der Iteration für rationale Funktionen - Ibidem 292 (1960).
-